Численное сравнение V-MLR и CUSUM методов обнаружения структурных сдвигов для кусочно-заданных GARCH-моделей

Борзых Д. А., Хасыков М. А., Языков А. А.

8 ноября 2017 г.

Аннотация

В работе предложен новый метод обнаружения структурных сдвигов для GARCH-моделей, названный авторами V-MLR.

V-MLR-метод сопоставляется с хорошо известным CUSUM-методом.

В рамках проведенных численных экспериментов получены следующие результаты.

1. При сопоставимой точности оценивания моментов структурных сдвигов V-MLR-метод чаще обнаруживает правильное число структурных сдвигов по сравнению с CUSUM.
2. При отсутствии структурных сдвигов V-MLR-метод значительно чаще правильно указывает на отсутствие структурных сдвигов по сравнению с CUSUM.

Аннотация

Предлагаемый вниманию доклад основан на результатах статьи

Борзых Д. А., Хасыков М. А., Языков А. А.

Численное сравнение V-MLR и CUSUM методов обнаружения структурных сдвигов для кусочно-заданных GARCH-моделей // Труды Московского физико-технического института (МФТИ). 2017. Т. 9. № 3. С. 115-121.

Актуальность

Для получения более точных оценок коэффициентов эконометрических моделей требуется большее количество наблюдений.

Однако при расширении выборки исследователи сталкиваются с проблемой, называемой **структурными сдвигами** или **разладками** случайного процесса.

Постановка задачи

Пусть $k \geq 0$ — неизвестное число структурных сдвигов временного ряда длины T, а $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — моменты структурных сдвигов, разделяющие исходный ряд на $k+1$ сегмент.

Будем предполагать, что j-й фрагмент временного ряда описывается соотношениями:

$$Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_j + \delta_j \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_j \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad \text{где } \tau_{j-1} \leq t \leq \tau_j - 1,$$

$j = 1, \ldots, k+1$, $\tau_0 := 1$, $\tau_{k+1} := T+1$, $\theta_j := (\omega_j, \delta_j, \gamma_j)$ — неизвестные параметры модели, принадлежащие множеству $\Theta := \big\{(\omega, \delta, \gamma)\colon\ \omega > 0,\ \delta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \delta + \gamma < 1\big\}$, а $(\xi_t)_{t=-\infty}^{+\infty}$ — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин.

Постановка задачи

Зафиксируем параметр $h > 0$, отвечающий за ширину «скользящего окна» и определим *скользящую статистику отношения правдоподобия* (*MLR — Moving Likelihood Ratio*):

$$MLR_\tau := -2\left(\max_{\substack{\theta_1,\,\theta_2\in\Theta,\\ \theta_1=\theta_2}} l(\theta_1,\theta_2,\tau,[\tau-h;\ \tau+h]) - \right.$$
$$\left. - \max_{\theta_1,\,\theta_2\in\Theta} l(\theta_1,\theta_2,\tau,[\tau-h;\ \tau+h]) \right),$$

где $\tau \in [h+1;\ T-h]$, $\theta_1 := (\omega_1,\ \delta_1,\ \gamma_1)$, $\theta_2 := (\omega_2,\ \delta_2,\ \gamma_2)$ и

$$l(\theta_1,\theta_2,\tau,[a;\ b]) := -\frac{1}{2}\sum_{t=a}^{\tau-1}\left(\ln 2\pi + \ln\sigma_t^2(\theta_1) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta_1)}{\sigma_t^2(\theta_1)}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=\tau}^{b}\left(\ln 2\pi + \ln\sigma_t^2(\theta_2) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta_2)}{\sigma_t^2(\theta_2)}\right)$$

— логарифмическая функция правдоподобия,

Постановка задачи

соответствующая модели:

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, \ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \ \sigma_t^2 = \omega_1 + \delta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [a; \tau - 1], \\ Y_t = \varepsilon_t, \ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \ \sigma_t^2 = \omega_2 + \delta_2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [\tau; b], \end{cases}$$

допускающей структурный сдвиг в момент времени τ.

Постановка задачи

Идея метода:

- в случае отсутствия структурного сдвига в точке τ статистика MLR_τ в среднем принимает сравнительно небольшие значения,
- при наличии структурного сдвига в точке τ данная статистика принимает достаточно высокие значения.

Для реализации данного подхода нужна критическая точка, указывающая на то, приняла ли статистика MLR_τ «достаточно большое» или «достаточно маленькое» значения.

Вычисление критической точки $\overline{q}_{MLR}$

Проведенные испытания по методу Монте-Карло в предположении отсутствия структурных сдвигов показали, что распределение статистики MLR_τ достаточно сильно зависит от параметров модели $(\omega,\ \delta,\ \gamma) \in \Theta$.

По этой причине мы ограничили множество Θ допустимых значений параметров до множества

$$\Omega := \big\{(\omega,\ \delta,\ \gamma)\colon\ \underline{\omega} \le \omega \le \overline{\omega},\ \underline{\delta} \le \delta,\ \underline{\gamma} \le \gamma,\ \delta + \gamma < 1\big\},$$

где $\underline{\omega} = 0,0001$, $\overline{\omega} = 0,031$, $\underline{\delta} = 0,7$, $\underline{\gamma} = 0$.

Анализ литературы показывает, что данное множество Ω является достаточно широким для приложений при изучении реальных финансово-экономических временных рядов.

Вычисление критической точки $\overline{q}_{MLR}$

На введенном выше множестве Ω мы задали сетку Ξ:

- параметр ω пробегает все значения из отрезка $[\underline{\omega};\ \overline{\omega}]$ с шагом $\Delta\omega = 0,001$;
- параметр δ пробегает все значения из отрезка $[\delta;\ 1-\Delta\delta]$ с шагом $\Delta\delta = 0,03$;
- при каждом фиксированном значении параметра δ параметр γ пробегает все значения из отрезка $[\underline{\gamma};\ (1-\Delta\gamma)-\delta]$ с шагом $\Delta\gamma = 0,03$.

Вычисление критической точки $\overline{q}_{MLR}$

Для каждого узла $(\omega,\ \delta,\ \gamma)$ сетки Ξ с помощью модели

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, \ \ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \ \ \sigma_t^2 = \omega_1 + \delta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [a;\ \tau - 1], \\ Y_t = \varepsilon_t, \ \ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \ \ \sigma_t^2 = \omega_2 + \delta_2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [\tau;\ b], \end{cases}$$

в которой мы положили

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma,$$

$$h = 200, \quad a = \tau - h, \quad b = \tau + h,$$

мы провели серию из 10 000 симуляций, в каждой из которых была рассчитана статистика MLR_τ. На основе вычисленных значений статистики MLR_τ мы получили 99 % выборочные квантили $q_{MLR}(\omega,\ \delta,\ \gamma)$, где $(\omega,\ \delta,\ \gamma) \in \Xi$, и определили верхнюю критическую точку:

$$\overline{q}_{MLR} := \max_{(\omega,\,\delta,\,\gamma)\in\Xi} q_{MLR}(\omega,\ \delta,\ \gamma) = 17,78.$$

Шаг 1 (обнаружение). Пусть в некоторой точке $\tau^* \in \mathbb{Z}$ функция MLR_τ имеет h-локальный максимум ($\forall t \in [\tau^* - h; \tau^* + h] \setminus \{\tau^*\}:\ MLR_t < MLR_{\tau^*}$). Если $MLR_{\tau^*} > \overline{q}_{MLR}$, считаем точку τ^* *точкой возможного структурного сдвига*; в противном случае считаем, что в точке τ^* структурного сдвига нет.

Шаг 2 (перепроверка). Пусть на предыдущем шаге алгоритм обнаружил $k > 0$ возможных структурных сдвигов $\tau_1, \ldots, \tau_k$. Для каждого возможного структурного сдвига τ_j, $j = 1, \ldots, k$, рассчитываем статистику

$$LR(\tau_j) := -2\left(\max_{\substack{\theta_1, \theta_2 \in \Theta, \\ \theta_1 = \theta_2}} l(\theta_1, \theta_2, \tau_j, [\tau_{j-1}; \tau_{j+1} - 1]) - \right.$$
$$\left. - \max_{\theta_1, \theta_2 \in \Theta} l(\theta_1, \theta_2, \tau_j, [\tau_{j-1}; \tau_{j+1} - 1]) \right).$$

Тогда, если $LR(\tau_j) > \overline{q}_{MLR}$, то точка τ_j объявляется структурным сдвигом, в противном случае — считаем, что в точке τ_j структурного сдвига нет.

Численный эксперимент 1

Данный эксперимент состоял из 10 000 симуляций, в каждой из которых генерировался ряд $(Y_t)_{t=1}^{T}$ согласно модели

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t,\ \ \sigma_t^2 = 0,001 + 0,8\sigma_{t-1}^2 + 0,1\varepsilon_{t-1}^2,\ t \in [1;1000], \\ Y_t = \varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t,\ \ \sigma_t^2 = 0,006 + 0,8\sigma_{t-1}^2 + 0,1\varepsilon_{t-1}^2,\ t \in [1001;2000], \end{cases}$$

содержащей структурный сдвиг в точке $\tau_1 = 1001$. Для каждого из сгенерированных рядов были применены V-MLR и CUSUM методы обнаружения структурных сдвигов. В результате получено, что **V-MLR-метод обнаружил правильное число структурных сдвигов в 91,00 % случаев, в то время как CUSUM — только в 84,97 % случаев**. Для подвыборок, в которых указанные методы обнаружили правильное число структурных сдвигов, были рассчитаны характеристики, отражающие точность обнаружения структурных сдвигов: $\mathrm{Mean}(\widehat{\tau}_1) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\widehat{\tau}_1^j$ — среднее и $\mathrm{MAE}(\widehat{\tau}_1) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\widehat{\tau}_1^j - \tau_1|$ — среднее абсолютное отклонение (см. табл. 1).

Численный эксперимент 1

Таблица 1

Mean и MAE для V-MLR и CUSUM методов

	V-MLR	CUSUM
Mean	1001,44	1010,94
MAE	11,54	10,92

Как видно из табл. 1, CUSUM имеет несколько меньшее среднее абсолютное отклонение по сравнению с V-MLR, однако V-MLR-метод практически не имеет смещения в отличие от CUSUM.

Численный эксперимент 2

Во втором эксперименте также было проведено 10 000 испытаний. В отличие от предыдущего эксперимента, модель, порождающая данные

$$Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = 0,001 + 0,8 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0,1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \qquad t \in [1;\, 2000],$$

не содержала структурных сдвигов. Получены следующие результаты: **V-MLR-метод указал на отсутствие структурных сдвигов в 99,45 % случаев, в то время как CUSUM — только в 90,65 % случаев.**

Выводы

1. При сопоставимой точности оценивания моментов структурных сдвигов V-MLR-метод чаще обнаруживает правильное число структурных сдвигов по сравнению с CUSUM.
2. При отсутствии структурных сдвигов V-MLR-метод значительно чаще указывает на отсутствие структурных сдвигов по сравнению с CUSUM.

Спасибо за внимание!