

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА»
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA (RUDN University)

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯХ
(АВМТВ-2017)**

Материалы Международной научной конференции

Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г.

*Под общей редакцией
доктора физико-математических наук А.В. Лебедева*

**ANALYTICAL AND COMPUTATIONAL
METHODS IN PROBABILITY THEORY
AND ITS APPLICATIONS
(ACMPT-2017)**

Proceedings of the International Scientific Conference

23–27 October 2017, Moscow, Russia

Under the general editorship of D.Sc. A.V. Lebedev

**Москва
2017**

УДК 004.7:004.4.001:621.391:007(063)

ББК 32.973.202:32.968

А64

А63 Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017) = Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (АСМРТ-2017) : материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г. / под общ. ред. А. В. Лебедева. – Москва : РУДН, 2017. – 743 с. : ил.

В научном издании представлены материалы международной научной конференции «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях» по следующим основным направлениям:

- Аналитические методы в теории вероятностей и её приложениях;
- Вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях;
- Асимптотические методы в анализе;
- История математики.

Сборник материалов конференции предназначен для научных работников и специалистов в области теории вероятностей и её приложений.

Текст воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Программным комитетом конференции

ISBN 978-5-209-08291-0

© Коллектив авторов, 2017

© Российский университет

дружбы народов, 2017

Contents

Sakhobov O. Two-sided bounds of the probability of failure-free operation of the system under the discipline of Soloviev	12
Zaytseva O.B., Kondrashova E.V. Priority management in a semi-Markov queuing model	21
Kashtanov V.A. Controlled stochastic processes and control in queuing, reliability and safety	26
Pavlov A.V. Identical service and the odd or even transform of Laplace	31
Kanzitdinov S.K., Vasilyev S.A. Analysis of random neural networks with an infinite number of cells	36
Nazin A.V. Algorithms of Inertial Mirror Descent in Stochastic Convex Optimization Problems	41
Dimitrov M. Fluid model with jumps in heavy traffic	46
Efimov V.V., Shchemelinin D.A. Control system for automated operation of a globally distributed telecommunications network	51
Malyshkin Y. The number of vertices of fixed degree in the preferential attachment model with choice	55
Kalimulina E. Yu. On the Rate of Convergence to stationarity of the Unreliable Queueing Network with Dynamic Routing	60
Shukhman E. V., Shukhman A. E. Unpublished Manuscripts by G.W. Leibniz Associated with Nondecimal Systems.	65
Alyabieva V. G. The idea of order in geometry, algebra, combinatorics in the 17th-19th centuries.	70
Slepov N. A. Generalized Stein equation on extended class of functions.	75
Grishunina Yu., Manita L. A Model for Network Virus Protection Based on Regenerative Process	80
Tsitovich I. I. On Robust Sequential Parameters Estimating	85
Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V. Necessary conditions for stationary distribution existence in the adaptive control system of conflict flows.	90
Limnios N. Diffusion Approximation of Branching Processes	95

Sorokovikova O.S., Dzama D.V., Asfandiyarov D.G., Blagodatskikh D.V. Probabilistic models of contamination in large water areas. Statistics and stochastic algorithms	100
Chinenova V. Goryachkin and His Idea in the Agricultural mechanics: Human - Machine - Environment	105
Bashtova E.E., Chernavskaya E.A. Limit theorems for infinite-channel queueing systems with heavy-tailed service times	110
Shklyaev A.V. Large Deviation Probabilities for the Branching Process in Random Environment'	113
Grishunina S.A. Limit theorems for queueing systems with different service disciplines	119
Kozlov V.V. On limit theorems of A. D. Soloviev for regenerative processes	124
Kolesnikov S.N. Different formalism of classical mechanics	129
Simonov R.A. Kirik the Novgorodian – a mathematician of the Early Renaissance.	134
Butko Ya.A. Chernoff Approximation of transition kernels of Markov processes	139
Bulinskaya E.VI. The Particles Population Propagation in Catalytic Branching Random Walk	144
Foss Sergey Non-standard randomized multiple access transmission protocols: stability and optimization	147
Vatutin V.A. Branching processes in random environment	148
Abramov O.V. The reliability for gradual failure: functional-parametrical approach	150
Grusho A.A., Timonina E.E., Shorgin S.Ya. Probabilistic Models of Meta Data.	156
Rusakov O.V. From the Pseudo-Poisson Processes with the Random Intensity to the Fractional Brownian Motion	161
Basharin G.P., Naumov V.A. Markovian Modelling of Arrival Processes	166
Soloviev A.D., Sobolev V.N. One server queue with bulk arrivals	171
Kolesnikov S.N. Scientific revolution of 16–17 centuries and period of “mechanism” in science	176

Veretennikov A. Yu. On mean-field $GI/GI/1$ queueing model: existence and uniqueness	182
Smirnova G. S. Moscow 1935: the First International Topology Conference	187
Kondrat'yev A. I. Computational models of diamond anvil cell compression	192
Molchanov S., Zhang Zh., Zheng L. Central Limit Theorem of Turing's Formula	198
Konakov V., Menozzi S., Molchanov S. Approximation of diffusion processes on solvable Lie groups by random walks. Local and quasi-local limit theorems	202
Shevtsova I., Gabdullin R., Makarenko V. On natural convergence rate estimates in the Lindeberg theorem	207
Kolmogorov A. V. An Asymptotic Minimax Theorem for Gaussian Two-Armed Bandit	210
Gribkova N. V. On probabilities of large and moderate deviations for L -statistics: a survey of some recent developments	215
Glazunov N. M. Arithmetic Statistics, Probabilities and Langlands correspondence.	220
Farkhadov M. P., Petukhova N. V. Probabilistic methods for comparative analysis and optimization of scenarios and algorithms for managing speech dialogue.	226
Ivnitskiy V. A. About the thinning of a flow with limited aftereffect and different interarrivals distributions.	234
Pastukhova Yu. I. Applying the maximum likelihood method for constructing asymptotically effective nonparametrical estimators of functionals from the regression function	239
Burnaev E. V., Golubev G. K. Bayesian Test for Multi-Channel Signal Detection Problem	244
Savelov M. P. Limit distributions of the Pearson statistics for non-homogeneous polynomial scheme	249
Bochkov A. V., Yastrebenetsky M. A. The History of the Creation and Development of the e-Forum Gnedenko	252
Tikhomirov V. M. Golden periods of Moscow mathematics (30th and 60th years).	258
Demidov S. S., Petrova S. S. Mathematics in Moscow in the torrent of the Soviet history	260

Turzynsky M.K. On the properties of the system of gas dynamics equations in Lagrangian coordinates with Coriolis force	265
Timonin V.I., Tyannikova N.D. The Kolmogorov – Smirnov type tests for the Lehmann – Cox hypotheses in the case of progressively censored samples — about the possibility to use the Kaplan – Meier estimates in test statistics	270
Chernousova E., Molchanov S. Steady state for the critical branching random walk with the general number of offsprings	276
Han D., Makarova Yu., Molchanov S., Yarovaya E. Branching Random Walks with Immigration	281
Savinkina E.N., Sakhanenko A.I. Asymptotic Explicit Optimal Estimators of an Unknown Parameter in One Power Regression Problem	286
Grebeshkov A. Yu., Zaripova E.R., Pshenichnikov A.P. Vertical Handover Time Estimation Method	290
Martynov G.V. Anderson-Darling and New Weighted Cramér-von Mises Statistics	295
Mishkoy Gh.K. Priority systems with orientation. Analytical and numerical results	301
Kozlov M.V. On the asymptotics of large deviation probabilities for some partly or asymptotically homogeneous Markov chains	306
Boldin M.V., Petriev M.N. Robust GM-estimators in the autoregression and Pearson’s chi-square tests	309
Moiseev A.N., Shklennik M.A. Heterogeneous infinite-server queueing tandem with customers’ type defined by state of Markovian arrival process	314
Melezhik V.S. Quantum-semiclassical approach for treating excitation and ionization of hydrogen-like atoms and ions in collisions with heavy particles	319
Senatov V.V. On numerical studies of the accuracy of approximations in the central limit theorem	324
Alawadhi S.A. A probability model for Assessments of system loads	331
Kolev N., Ngo N., Ju Y.T. Bivariate Teissier Distribution	336
Antonyuk P.N. A brief history of the study of the fragment size distribution	341

Khmourkin G.G. Why do Indians need mathematics? (Reflections on the introductory chapter of Mahavira's treatise, 9th century A.D.)	347
Nazarov A.A., Broner V.I. Modified Kramer-Lundberg model with On/Off control and arbitrary distribution of demand purchases values	350
Krishnamoorthy A., Shajin Dhanya, Manjunath A.S. On a multi-server priority queue with preemption in crowdsourcing	355
Krishnamoorthy A., Shajin Dhanya MAP/PH/1 retrial queueing-inventory system with orbital search and renegeing of customers	360
Kovalenko I.N. ACMPT-2017 Conference Thesis Template	365
Koroliouk D., Koroliuk V.S. Adapted statistical experiments with random change of time	370
Vvedenskaya N.D., Logachev A.V., Suhov Yu.M., Yam-bartsev A.A. Local large deviation principle for inhomogeneous Markov processes	375
Veretennikova M., Sikorskii A., Boivin M. Data mining in predicting neuro-developmental scores from EEG data during coma due to cerebral malaria	380
Zaryadov I.S., Kradenyh A.A., Gorbunova A.V. The Analysis of Cloud Computing System as a Queueing System with Several Servers and a Single Buffer	384
Thorisson H. On Coupling and Convergence in Density and in Distribution	389
Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Veretel'nikova I.V., Novikova A.Yu. Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution	395
Lotov V.I. Factorization method in boundary crossing problems for random walks	400
Kelbert M., Suhov Y., Stuhl I. Weighted entropy: basic facts and properties	406
Zverkina G.A. Industrial revolution and reform of mathematics	411
Malyshev V.A., Zamyatin A.A. One-particle quantum walk on Z^d	416
Kuzicheva Z.A. Implication in the works of logics of the first half of the XX century	420

Lyuter I.O. Geometrization of the doctrines of place and continuum in medieval Arabic scholasticism.	425
Andronov A.M., Rykov V.V., Vishnevsky V.M. On Reliability Function of a Parallel System with Three Renewable Components	430
Bulinskaya E.V. Stability problems in modern actuarial sciences .	435
Singpurwalla Nozer D. Subjective Probability: Its Axioms and Operationalization	440
Konstantinides D.G., Li J.Z. Asymptotic Ruin Probabilities for a Multidimensional Renewal Risk Model with Multivariate Regularly Varying Claims	446
Ludkovsky S.V. Feynman-type local integration of stochastic PDE	453
Zolotukhin I.V. On Multivariate Geometric Random Sums	456
Zeifman A., Satin Ya., Kiseleva K., Korolev V. Two-sided Bounds for the Convergence Rate of Markov Chains	462
Pakhteev A.I. Some Algorithms of Record Generation.	467
Sokoł M. Markov stochastic processes in biology — almost the same than in mathematics but a bit different	471
Zaytsev E. Mathematical Methods in Practical Mechanics: From Heron of Alexandria to Galileo	475
Belopolskaya Ya.I., Stepanova A.O. Probabilistic algorithms of constructing numerical solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations.	480
Belkina T.A., Konyukhova N.B., Slavko B.V. Analytic-Numerical Investigation of the Dual Risk Model with Investments: Survival Probability Functions as the Solutions of Singular Problems for Integro-Differential Equations	485
Zubkov A.M., Filina M.V. Algorithm of exact computation of divisible statistics distributions and its applications.	490
Mogulskii A.A. Integro-local limit theorems for multidimensional compound renewal processes	495
Koldanov P.A., Koldanov A.P., Kalyagin V.A., Pardalos P.M. Optimal test of conditional independence testing in multivariate normal distribution	500
Farkas Yu., Hashorva E., Piterbarg V.I. Asymptotic behavior of reliability function for multidimensional aggregated Weibull type reliability indices	506

Isguder H. Okan, Kocer U. U. Analysis of Two-Heterogeneous Server Queueing System	512
Formanov Sh. K. On nonclassical versions of the Lindeberg-Feller theorem	517
Yakymiv A. L. On some recent investigations on Tauberian theory and their applications to probability theory	522
Zverkina G. A. On a generalization of the Leibniz theorem	528
Kobanenko G. K. Limit theorems for bounded branching processes	533
Borodina A. B., Efrosinin D. V., Morozov E. V. Adaptive Splitting Method for Failure Estimation in Controllable Degradation System	538
Sopin E. S. On the insensitivity conditions of the queuing system with resources stationary distribution to distribution of customer workload volume	541
Anulova S. V. Fluid Limit for Closed Queueing Network with Several Multi-Servers	547
Kharin Yu. S. Statistical analysis of big data based on parsimonious models of high-order Markov chains	552
Gadolina I. V., Lisachenko N. G. Bootstrap-modelling for building confidence intervals for percentiles: high-tech production quality control application	555
Fedorova E. A., Nazarov A. A., Paul S. V. Discrete gamma probability distribution approximation in retrial queues	560
Afanaseva L. G. Asymptotic Analysis of Queueing Models based on Synchronization Method	566
Muromskaya A. A. Optimal reinsurance strategy in the model with several risks within one insurance policy	571
Bulinski A. V. Asymptotic Methods and Limit Theorems.	576
Sakhanenko A. I. Non-classical boundary crossing problems for general random walks	581
Zorine A. V. A stopped random walk and stability of a service process of Poisson input flows by a loop algorithm	586
Mastikhin A. V. Integral representation of transition probabilities for Weiss multidimensional epidemic process	591

Tarasenko A.S. Moments of the sojourn time of random walk above a certain boundary	595
Zubkov A.M., Orlov O.P. Limit distributions of extreme distances to the nearest neighbor	598
Ermishkina E.M. Simulation of Branching Random Walks on Multidimensional Lattices	603
Yarovaya E. Survival Analysis and Recurrence Criteria for Branching Random Walks	608
Zverkina G.A. Simple bounds for the convergence rate of $M G \infty$ queueing system	613
Belyaev Yu.K., Källberg D., Rydén P. Statistical Analysis of Data Generated by a Mixture of Two Parametric Distributions	619
Popov G., Yarovaya E. Non-Markovian Models of Branching Random Walks	624
Rachinskaya M.A., Fedotkin M.A. Stationarity conditions for the control systems that provide service to the conflicting non-ordinary Poisson flows	629
Mashnikov O.V., Zamyatin A.A. An ergodicity criterion for Markov chains describing the dynamics of random words.	634
Berezin S., Zayats O. Skew Brownian motion with dry friction: The Pugachev–Sveshnikov equation approach	639
Manita A. Joint distributions of synchronization models	644
Manita L., Manita A. Agreement algorithms for synchronization of clocks in nodes of stochastic networks.	649
Zhdanok A.I. Dimension of the set of invariant finite additive measures of Markov chains in an arbitrary phase space and ergodic consequences.	654
Oprisan A. Limit theorems for Additive Functionals of Semi-Markov Processes	659
Lukashenko O.V., Morozov E.V., Khokhlov Y.S. On the asymptotic bound for the overflow probability of fluid queue with heterogenous input	665
Knobloch E. Leibniz’s Contributions to Financial and Insurance Mathematics.	669
Balashova D. Numerical analysis of phase transitions in supercritical branching random walks	674

Domoradzki S. On mathematics in Lvov from the second half of the 19th century till the end of WWII	678
Rusev V. N., Skorikov A. V. Analytical and discrete methods for determination Weibull-Gnedenko renewal density	681
Soós A., Somogyi I., Simon L. Interpolation using stochastic local iterated function systems	686
Rytova A. I. Harmonic Analysis of Random Walks on Lattices . .	689
Zolotukhin A. Ya., Nagaev S. V., Chebotarev V. I. On calculating the absolute constant in the Berry–Esseen inequality for two-point distributions	695
Kumar R., Sharma S. Transient Analysis of a Multi-Server Queuing Model with Discouraged Arrivals and Retention of Reneging Customers	700
Makarichev A. V., Brysina I. V. The Asymptotic Estimation The System Refuse Intensively When Elements Are Repaired Without Waiting And Elements That Have Reach The Repair Return Into The System With Minimal Standby Beginning Off any Quantity	705
Makarichev A. V., Makarichev V. A. Reliability Of Systems in Complexes with the Restoration and the Absolute Priority of Service Elements with Minimal Reserve Systems Under Heavy Load . . .	708
Makarichev A. V. Assessment of the Probability of System Failure with Minimum Service Accumulation Elements	711
Kolosova I. S., Vasilyev S. A. Numerical Solving of Relativistic Schrödinger Equation with Random Quasipotential.	718
Kalinkin A. V., Pavlov I. V., Sidnyaev N. I. Special course «Fundamentals of the mathematical theory of reliability» in the technical university	723
Rykov V. V., Kozyrev D. Analysis of renewable reliability systems by Markovization method	727
Zubkov A. M., Kruglov V. I. Number of pairs of identically marked embeddings of given subtree in q -ary tree with randomly marked vertices.	735
Author index	741

Двусторонние оценки вероятности безотказной работы системы при дисциплине Соловьева

О. Сахобов*

** Национальный Университет Узбекистана,
Механико-математический факультет,
Ташкент, Узбекистан, 100174*

Аннотация. В этой работе развивается метод получения двусторонних оценок для характеристик надежности восстанавливаемых систем. Функционирование таких систем описывается, как известно, процессами массового обслуживания, где роль поступающих на обслуживание требований играют возникающие отказы частей системы. Процессы обслуживания, описывающие поведение восстанавливаемых систем, весьма сложны и их характеристики очень редко находят в замкнутой форме. Поэтому за последние 25–30 лет в основном И.Н.Коваленко, А.Д.Соловьевым, их учениками были разработаны асимптотические методы анализа восстанавливаемых систем, использующие тот реальный факт, что время ремонта элементов, отказывающих в системе, в среднем во много раз меньше интервалов времени между соседними отказами. Доказанные в этой теории предельные теоремы дают приближенные формулы для характеристик надежности, однако, эти предельные теоремы дают приближенные формулы для характеристик надежности, однако, эти предельные теоремы носят топологический характер, и известными общими методами трудно с приемлемой точностью оценить скорость сходимости в этих схемах, т.е. оценить погрешность в соответствующих приближенных формулах. Полученные двусторонние оценки позволяют находить оценки характеристик надежности восстанавливаемых систем при дисциплине Соловьева.

Ключевые слова: надежность, дисциплина Соловьева, двусторонние оценки.

1. Введение

Представим систему, состоящую из $n + 1$ однотипных элементов - одного рабочего и n резервных. С течением времени некоторые элементы в системе отказывают и мгновенно поступают в ремонтное устройство, которое состоит из r ремонтных единиц. Каждая такая единица может одновременно ремонтировать один неисправный элемент. В начальный момент $t = 0$ все элементы исправны. Если одновременно не исправить более r элементов, то ремонтируются только r элементов, остальные остаются в очереди. Система отказывает, когда при неисправных n элементах отказывает последний работающий элемент. Если в системе неисправно k элементов, то суммарная интенсивность

отказа элементов не зависит от прошлого поведения системы и равна λ_k . Времена ремонта отказывающихся элементов независимы и имеют функцию распределения $G(x)$. После окончания ремонта каждый элемент мгновенно возвращается в систему. Процесс $\varkappa(t)$, описывающий поведение такой системы, есть число неисправных элементов в момент t . Множество состояний процесса $E = 0, 1, 2, \dots, n+1$, $E_+ = 0, 1, 2, \dots, n$ — множество исправных состояний, $E_- = \{n+1\}$ — множество неисправных состояний. Описанную таким образом модель обозначают $(\lambda_k, G, \Gamma, n)$. В частности, она включает (λ, G, Γ, n) — общую модель резервирования.

Общая модель резервирования восстановлением представлена на рис. 1.

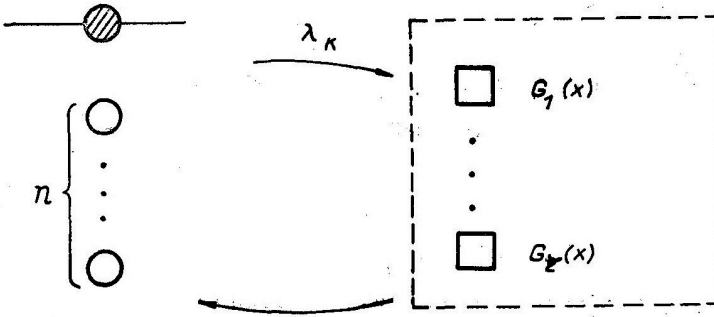


Рис. 1. Модель резервирования с восстановлением.

2. Постановка задачи. Вспомогательные результаты

Пусть дан регенирующийся процесс [1] $\varkappa(t)$ специального вида, в котором каждый период регенерации состоит из двух независимых частей

$$\xi^0 + \eta^0,$$

где первая часть имеет показательное распределение с параметром λ

$$P\{\xi^0 > t\} = e^{-\lambda t},$$

а вторая часть η^0 — произвольное распределение со средним

$$M\eta^0 = T_0.$$

Предположим, что траектории процесса на этих частях независимы, на второй части периода в некоторой точке η^- , отсчитываемой от начала второй части $0 \leq \eta^- \leq \eta^0$, может произойти некоторое событие A (например, отказ системы) с вероятностью $q = P(A)$, причем это событие зависит от траектории процесса на данной второй части периода и не зависит от поведения процесса вне этой части. На первой части периода регенерации событие A не наступает.

Введем следующие обозначения:

η^+ — длина второй части периода регенерации при условии, что на ней не произошло событие A ;

χ — индикатор события A ;

$$\eta = \eta^+(1 - \chi) + \eta^- \chi; \quad M\eta^+ = T_+, \quad M\eta^- = T_-,$$

$$M\eta = T = T_+p + T_-q = T_1 + T_2 \leq T_0,$$

где $T_1 = pT_+$, $T_2 = qT_-$, $p = 1 - q$.

Обозначим через τ момент первого наступления события A .

Тогда

$$\tau = (\xi_1 + \eta_1^+) + (\xi_2 + \eta_2^+) + \dots + (\xi_{\nu-1} + \eta_{\nu-1}^+) + (\xi_{\nu} + \eta_{\nu}^-) = \xi + \zeta,$$

где

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\nu}; \quad \zeta = \eta_1^+ + \eta_2^+ + \dots + \eta_{\nu-1}^+ + \eta_{\nu}^-,$$

случайная же величина ν — номер первого периода регенерации, на котором наступило событие A . Для него имеем, очевидно, геометрическое распределение

$$P\{\nu = n\} = qp^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее находим распределение ξ :

$$P\{\xi > t\} = e^{-\lambda qt}.$$

Так как случайные величины ξ и η при условии, что $\nu = n$, независимы, то плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ есть

$$\lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t},$$

Множество состояний E процесса $x(t)$ разбивается на два непересекающихся подмножества

$$E = E_+ \cup E_-$$

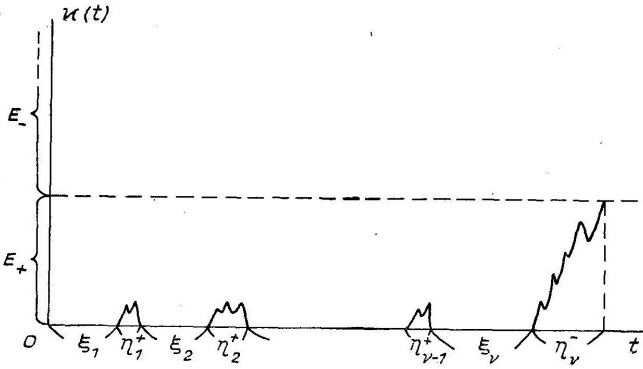


Рис. 2. Геометрическая интерпретация регенирующего процесса специального типа

где E_+ – множество исправных и E_- – множество неисправных состояний системы (рис. 2).

Пусть

$$\tau = \inf\{t : \varkappa(t) \in E_-\}$$

- момент первого отказа системы. Функция $R(t) = P\{\tau > t\}$, которую мы хотим оценить, есть вероятность безотказной работы системы до момента t (т.е. $R(t)$ – функция надежности).

В реальных системах среднее время ремонта элемента обычно во много раз меньше среднего интервала между отказами элементов. Поскольку средний интервал

$$M\xi^0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

то такое условие означает, что $\lambda T_0 = \lambda M\eta^0 \ll 1$.

Поэтому мы находим двусторонние оценки $\underline{R}(t) \leq R(t) \leq \overline{R}(t)$ для которых $\underline{R}(t) \sim \overline{R}(t)$ при $\lambda T_0 \rightarrow 0$ равномерно по t .

В работе Соловьева А. Д. и Сахобова О. получены оценки:

Теорема 1. [1] Для процесса $\varkappa(t)$ при любом $t > 0$ справедливо неравенство

$$e^{-\lambda qt} \leq R(t) \leq e^{-\lambda qt} + \lambda T, \quad (1)$$

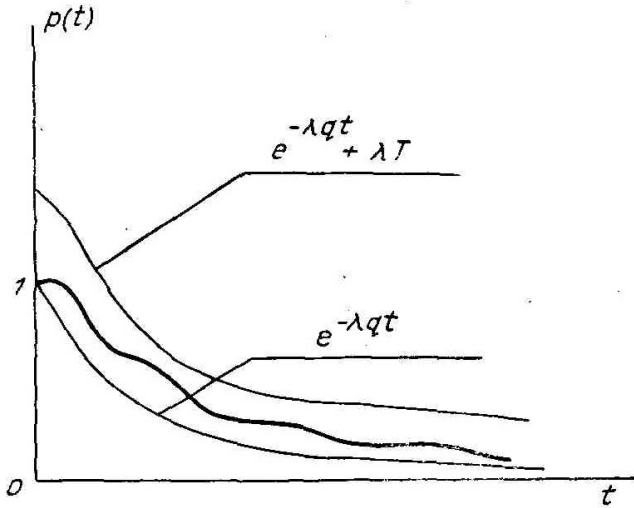


Рис. 3. Геометрическая иллюстрация оценки (1).

где q — вероятность попадания процесса в множество E_- на одном периоде регенерации (рис. 3).

Поскольку $\eta(\omega) \leq \eta^0(\omega)$, почти всюду, то $T = M\eta \leq M\eta^0 = T_0$ и тогда имеем более грубую, но более простую оценку

$$e^{-\lambda q t} \leq R(t) \leq e^{-\lambda q t} + \lambda T_0. \quad (2)$$

Отсюда, из (2) имеем

$$\lim_{\lambda T_0 \rightarrow 0} R(t) = e^{-\lambda q t}.$$

В работе [17] мы получили и неравномерную оценку для $R(t)$.

Заметим, что в оценках (1) и (2) участвует q — вероятность отказа, которая оценивается через стационарные вероятности, что для модели резервирования с восстановлением имеет вид

$$q_0 \leq q \leq \frac{\lambda_n p_n}{\lambda_0 p_0}, \quad (3)$$

где p_n — стационарные вероятности (в системе находится n требований).

Пусть $\xi_t(d)$ — число требований в системе в момент t при заданной дисциплине обслуживания d .

Рассмотрим наиболее часто употребляемые дисциплины.

1. Дисциплина d_0 означает, что в каждый момент времени обслуживается только то требование, которое имеет наименьшую остаточную длину.
2. Дисциплина d_1 , согласно которой требования поступают на обслуживание и обслуживаются в порядке пребывания.
3. Дисциплина d_2 – обратный порядок обслуживания с прерыванием.
4. Дисциплина d_3 – дисциплина разделения процессора.
5. Дисциплина d_4 – в каждый момент обслуживается только требование с наибольшей остаточной длиной.

В работе [17] построены двусторонние оценки надежности $R(t) = P\{\tau > t\}$ для описанных выше дисциплин обслуживания в системе $(\lambda, G, 1, n)$.

3. Основные результаты

Наша задача состоит в том, чтобы найти двусторонние оценки вероятности $R(t) = P\{\tau > t\}$ при d_4 - дисциплине Соловьева.

В работе [17] было доказано, что

$$\xi_t(d_0) \leq \xi_t(d) \leq \xi_t(d_4),$$

откуда следует

$$q(d_0) \leq q(d) \leq q(d_4).$$

Поэтому, в системе $(\lambda_k, G, 1, n)$ справедливо неравенство

$$\frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{n!} m_1^n \left(1 - \frac{n\lambda m_2}{2m_1}\right) \leq q(d) \leq \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{(n+1)!} M(\eta_1 + \dots + \eta_{n+1})^n,$$

где $m_i = \int_0^\infty x^i dG(x)$, $(i = 1, 2)$

Теорема 2. В системе (λ_k, G, l, n) с достаточно малой нагрузкой при d_4 - дисциплине Соловьева справедливо неравенство

$$\underline{q} < q(d_4) < \bar{q},$$

где

$$\underline{q} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{(n+1)!} M(\eta_1 + \dots + \eta_{n+1})^n - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}}{(n+1)!} M(\eta_1 + \dots + \eta_{n+1})^{n+1},$$

$$\bar{q} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{(n+1)!} M(\eta_1 + \dots + \eta_{n+1})^n.$$

Итак,

$$e^{-\lambda_0 \bar{q}t} \leq R(t) \leq e^{-\lambda_0 \underline{q}t} + \frac{\lambda_0 T_0}{1 - \bar{\lambda} T_0},$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$.

Следствие. Для системы (λ_k, G, l, n) при d_4 - дисциплине Соловьева

$$B_n \frac{\rho^n}{n!} \leq q \leq A_n \frac{\rho^n}{n!},$$

где

$$B_n = 1 - \frac{\lambda_n m_2}{m_1}; \quad A_n = \sum_{s=1}^{\infty} s^{n-1} (\gamma \gamma^*)^{s-1};$$

$$\rho = \lambda m_1, \quad m_1 = \int_0^{\infty} x^i dG(x) \quad (i = 1, 2); \quad \gamma^* = e^{\rho} - 1$$

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \frac{-\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n}{(n+1)!} M(\eta_1 + \dots + \eta_{n+1})^n \right\} \leq R(t) \leq \\ & \leq \exp \left\{ -\frac{-\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n}{(n+1)!} m_1^n \left(1 - \frac{n \lambda m_2}{m_1} \right) \right\} + \frac{\lambda_0 T_0}{1 - \bar{\lambda} T_0}. \end{aligned}$$

В основном А.Д.Соловьевым и его учениками [2]-[17] были разработаны асимптотические методы восстанавливаемых систем для случая, когда время ремонта элементов, отказывающих в системе, в среднем во много раз меньше интервалов времени между соседними отказами.

Литература

1. Кокс Д., Смат В. Теория восстановления. — М.: Сов. радио, 1967.
2. Гнеденко Б. В., Белаяев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
3. Гнеденко Д. В., Соловьев А. Д. Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1975. — No. 3. — С. 121–128.
4. Гнеденко Д. В., Соловьев А. Д. Одна общая модель резервирования с восстановлением // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика — 1974. — No. 6. — С. 113–118.
5. Соловьев А. Д. Основы математической теории надежности, вып.1,2,3. — М.: Знание, 1975.
6. Соловьев А. Д. Асимптотическое поведение первого наступления редкого события в регенерирующем процессе. — Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1971. — No. 6. — С. 79–89.

7. *Овчинников В. Н., Соловьев А. Д.* Асимптотический анализ после отказовых характеристик надежности. Теория массового обслуживания // Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания. Т.1. — М.: МГУ, 1976.
8. *Соловьев А. Д.* Резервирование с быстрым восстановлением // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1970. — No. 1. — С. 56–71.
9. *Козлов В. В., Соловьев А. Д.* Оптимальное обслуживание восстанавливаемых систем, часть I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1978. — No. 3.
10. *Козлов В. В., Соловьев А. Д.* Оптимальное обслуживание восстанавливаемых систем, часть II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1978. — No. 4.
11. *Соловьев А. Д., Сахобов О.* Двухсторонние оценки надежности восстанавливаемых систем // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1976. — No. 5. — С. 28–33.
12. *Соловьев А. Д., Сахобов О.* Двухсторонние оценки для вероятности отказа системы на одном периоде регенерации // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1977. — No. 2. — С. 41–46.
13. *Сахобов О., Соловьев А. Д.* Двусторонние оценки надежности в общей модели резервирования с одной ремонтной единицей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1977. — No. 4.
14. *Сахобов О.* Двухсторонняя оценка надежности сложной восстанавливаемой системы // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1979. — No. 1. — С. 30–35.
15. *Сахобов О.* О некоторых двусторонних неравенствах для характеристик надежности // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980. — No. 6. — С. 31–33.
16. *Сахобов О., Соловьев А. Д.* Двухсторонние оценки характеристик надежности восстанавливаемых систем. — Ташкент: Фан, 1983.
17. *Сахобов О.* Асимптотически точные неравенства для характеристик надежности восстанавливаемых систем. — Ташкент: Фан, 1988.

Two-sided bounds of the probability of failure-free operation of the system under the discipline of Soloviev

O. Sakhobov*

* *National University of Uzbekistan, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, 100174*

In this work, a method is developed for obtaining two-sided bounds for the reliability characteristics of the restorable systems. It is well-known, that the behaviour of such a systems is described by queueing processes, where the flow of the customers is a the flow of emerging failures of the parts of the system. Queueing processes describing the behaviour of the restorable systems are very complex and their characteristics are very rarely in the explicit form. Therefore, in recent 25-30 years, mainly I. Kovalenko, A.D. Soloviev and their students have developed the asymptotic methods of the analysis of the recoverable systems, taking into consideration the fact that the average value of the repair time of elements that fail in the system is many times less than the average length of the time intervals between neighboring failures. The limit theorems proved in this theory give approximate formulas for the reliability characteristics. However, these limit theorems have a topological nature, and it is difficult to estimate the rate of convergence for these systems with reasonable accuracy. I.e., to estimate the error in the corresponding approximate formulas. The obtained in the paper two-sided bounds give the possibility to find the bounds of the reliability characteristics of the restorable systems with the Soloviev discipline of the repair.

Keywords: reliability, discipline of Soloviev, two-sided bounds.

UDC 519.218.31

Priority management in a semi-Markov queuing model

O.B. Zaytseva*, E.V. Kondrashova[†]

* *Department of probability theory,
Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe highway, Moscow, Russia, 125993, Russia*

[†] *Department of Applied Mathematics,
National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000, Russia*

Abstract. We study a single-channel queuing system with an arbitrary distribution of the duration of service requirements, on the input of which there are n Poisson processes. The requirements of the various processes come in different queues. The task is to determine the rule for selecting service requirements and to determine the optimal strategy for establishing dynamic priorities. We consider a case $n = 2$.

To this end, a controlled semi-Markov process is defined, on the trajectories of which a functional is constructed that determines the quality of management and takes into account the number of lost requirements, the number of serviced requirements, the time of the requirement stay in the system, and so on. An algorithm for determining the optimal strategy is formulated.

Keywords: optimal strategy, controlled semi-Markov process, dynamic priorities.

1. Introduction

At a research of queueing systems the structure of system often is considered invariable, and characteristics of the system are investigated at the fixed initial parameters and functions. It is important to note that in actual applications not only the research of stationary characteristics, but a possibility of structural change of the system and obtaining at the same time new results is of great interest.

When developing mathematical models the concept of strategy is entered [2], [3]. Strategy is meant as the rule of adoption of concrete decisions in particular instants. Further work of system depends on the made decisions. It is possible to change structure of system to increase in effectiveness of its work and calculation of characteristics at optimum functioning of the system (such as in papers [5], [4]).

2. Main section

The research of queueing system is investigated. The quantity of various arrival-flows is equal to n . Let's consider that each of flows represents a i -th type flow with the arriving queries of i -th type, $i=1, \dots, n$. The moments of numbers' arrival form each flow make the simplest flow of homogeneous moments with the parameter λ_i .

Queries of i -th type come to queue of i -th type, $i \in (1, 2, \dots, n)$. The queue length for each flow is limited.

There is one channel in system. The channel can serve queries of any type. At the arbitrary moment here can be no more than one requirement on server. If there are no empty places in the queue, the query is lost. Durations of queries service are independent equally distributed random values. The cumulative distribution function of service duration changes depending on that what query type arrived for service. We assume that at the initial moment of functioning in system there are no requirements.

The G_i symbol means that the cumulative distribution function of service duration is arbitrary, but service duration depends on the type of the served requirement. That is if type of the served query i , then holding time is distributed under the law $G_i(x) = P\{\eta_i < x\}$. The maximal number of places in the queue of i -th type is equal N_i .

In system discrete control is carried out by two factors - we choose: type of queue from which the following application arrives on the serving device; service duration for the query of i -th type.

The system can be considered as the controlled semi-Markov queueing system. At a research of the controlled semi-Markov queueing systems and construction of the controlled semi-Markov process describing evolution of the system we realize the following algorithm [1], [6].

The Markov moments in the case are the moments of the termination and the beginning of a query service.

Let's define a set of states of the queueing system at the decision making moments. Let's designate $\vec{l} = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$, where l_k - the number of queries of k -th type turn at the time of decision-making, n - the quantity of queries types (amount of turns). The number of requirements in queue has terminating values, $l_k \in E_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$, where N_k - the maximal number of places in the queue of k -th type. Thus $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in E_1 \times \dots \times E_n = E$.

The semi-Markov process $\xi(t)$ at the moment t is defined as number of queries in each queue in the next, previous t , the Markov moment. In the accepted designations for a semi-Markov process it is possible to write down $\xi(t) \in E$.

The space of controls and the strategy of control is defined.

Each control consists of two components, and the set of possible controls depends on a state. Let's designate through $U(\vec{l})$ a set of possible decisions in a state \vec{l} . For a state \vec{l} we will designate a vector $k^+(\vec{l}) = (n_1, n_2, \dots, n_k), 0 \leq k \leq n, 1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$ for which components the ratio $l_{n_i} > 0, i = 1, 2, \dots, k$ is carried out. In other words, for each state the set of turns in which there are requirements is defined. Let's designate through v type of the requirement or type of queue of which the following requirement for service gets out. Therefore $\nu \in k^+(\vec{l})$. If to designate through u duration of service, then it is apparent that this

duration can accept any nonnegative values, that is $u \in [0, +\infty) = R^+$. Thus we have $(\nu, u) \in U(\vec{l}) = k^+(\vec{l}) \otimes R^+$.

We define Markov homogeneous randomized strategy, so is we will construct a probability measure on control set. For a discrete component v -the choice of queue type from which the application will arrive on service, we will put down

$$P\{v = k/\vec{l}\} = \begin{cases} 0, k \notin k^+(\vec{l}), \\ p_k, \end{cases} \quad p_k \geq 0, \quad \sum_{k \in k^+(\vec{l})} p_k = 1, \quad (1)$$

where through $P\{v = k/\vec{l}\}$ the probability to the query of k -th type for service is designated.

Components of managements dependent. Therefore we define distribution of the second component as the conditional probability

$$G(t, k, \vec{l}) = P\{u < t/\nu = k, \vec{l}\} \quad (2)$$

Elements of a semi-Markov matrix are defined as probabilities that some state will be the following state of a semi-Markovian process $\vec{l}' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_n) \in E$ and transition to this state will happen until t provided that process passed into a state $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ and the decision $(\nu, u) = (k, \tau)$ is made. We will designate this probability $Q_{\vec{l}'|\vec{l}}(t, k, \tau)$.

If the requirement of k -th of type begins to be served, duration of service is equal τ and process stayed in state $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n), l_k \geq 1$, then in time τ this query will be served, and m_i of queries will come to turn of i -th type with probability

$$\pi(\lambda_i, \tau, m_i) = \frac{(\lambda_i \tau)^{m_i}}{(m_i)!} e^{-\lambda_i \tau} \quad (3)$$

Let's notice that at $i \neq k$, if $m_i > N_i - l_i$, then there are lost queries and their number is equal $m_i - N_i + l_i$, at $i = k$ number of the lost queries equals $m_k - N_k + l_k - 1$ as one query left to service.

We will give reasonings for a case with two types of applications, $n=2$.

The system state is described by (l_1, l_2) , where l_1, l_2 - the number of queries in the queue of the 1st and 2nd type respectively, $0 \leq l_1 \leq N_1, 0 \leq l_2 \leq N_2$.

We give expressions for a *semi-Markov matrix*.

$$\begin{aligned} Q_{(0,0)(1,0)}(t) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}), \\ Q_{(0,0)(0,2)}(t) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}) \end{aligned} \quad (4)$$

These elements of a semi-Markov matrix are defined as probability that until t the application of i -th type ($i=1,2$) came to empty system of the first.

If being in state (l_1, l_2) the decision to send the query of the 1st type for service is made, that is $v = 1$ and service duration is set u , then the semi-Markov kernel will take a form $Q_{(l_1, l_2)(l'_1, l'_2)}(t, 1, u) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, t \leq u, \\ \frac{(\lambda_1 u)^{l'_1 - l_1 + 1}}{(l'_1 - l_1 + 1)!} e^{-\lambda_1 u} \frac{(\lambda_2 u)^{l'_2 - l_2}}{(l'_2 - l_2)!} e^{-\lambda_2 u}, l_1 - 1 \leq l'_1 < N_1, l_2 \leq l'_2 < N_2, t > u, \\ \frac{(\lambda_1 u)^{l'_1 - l_1 + 1}}{(l'_1 - l_1 + 1)!} e^{-\lambda_1 u} \sum_{k=N_2 - l_2}^{\infty} \frac{(\lambda_2 u)^k}{k!} e^{-\lambda_2 u}, l_1 - 1 \leq l'_1 < N_1, l'_2 = N_2, t > u, \\ \frac{(\lambda_2 u)^{l'_2 - l_2}}{(l'_2 - l_2)!} e^{-\lambda_2 u} \sum_{k=N_1 - l_1 + 1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 u)^k}{k!} e^{-\lambda_1 u}, l'_1 = N_1, l_2 \leq l'_2 < N_2, t > u, \\ \sum_{k=N_1 - l_1 + 1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 u)^k}{k!} e^{-\lambda_1 u} \sum_{k=N_2 - l_2}^{\infty} \frac{(\lambda_2 u)^k}{k!} e^{-\lambda_2 u}, l'_1 = N_1, l'_2 = N_2, t > u. \end{array} \right. \quad (5)$$

The semi-Markov kernel can be written out for each case by analogy with a formula (5).

The matrix of the transitional probabilities of the embedded Markov chain is bound to a semi-Markov matrix equality

$p_{(l_1, l_2)(l'_1, l'_2)}(\nu, u) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{(l_1, l_2)(l'_1, l'_2)}(t, \nu, u)$. Therefore, from equalities (4)-(5) easily we receive expressions for required probabilities.

Let's enter the cost characteristics defining the functional characteriz-
ing quality of functioning and control:

c_0^i - income from servicing one query of i -th type; c_1^i - payment per unit of time for servicing one query of i -th type on the service channel; c_2 - the expense per unit of time for the maintenance of the channel running idle; c_3^i - payment for one lost demand of i -th type; c_4^i - payment per unit of time for servicing one condition in the waiting room (in the queue) of i -th type.

These constants define the additive functional on trajectories of a semi-Markov process. We write out the *conditional expectations of the saved-up income* $R_{(l_1, l_2)(l'_1, l'_2)}(t, u, v)$ provided that process stays in state (l_1, l_2) , through time of t will pass into a state (l'_1, l'_2) and the decision $\{u, v\}$ is made.

For any state (not $(0, 0)$) (l_1, l_2) and states $(l'_1, l'_2), l_1 - 1 \leq l'_1 < N_1, l_2 - 1 \leq l'_2 < N_2$ we have

$$\begin{aligned} R_{(l_1, l_2)(l'_1, l'_2)}(u, u, 1) &= c_0^1 + c_1^1 u + c_4^1 \left(\frac{l'_1 + l_1 - 1}{2} \right) u + c_4^2 \frac{l'_2 + l_2}{2} u, \\ R_{(l_1, l_2)(l'_1, l'_2)}(u, u, 2) &= c_0^2 + c_1^2 u + c_4^2 \left(\frac{l'_2 + l_2 - 1}{2} \right) u + c_4^1 \frac{l'_1 + l_1}{2} u \end{aligned} \quad (6)$$

Conditional expectations of the saved-up income can be written out including for other states taking into account loss of queries.

Further we use the following facts:

1) For the income functional equality is fair [1], [6]:

$$S = \frac{\sum_{(l_1, l_2) \in \tilde{E}} s_{(l_1, l_2)} \pi_{(l_1, l_2)}}{\sum_{(l_1, l_2) \in \tilde{E}} m_{(l_1, l_2)} \pi_{(l_1, l_2)}} \quad (7)$$

where $s_{(l_1, l_2)}$ are the conditional mathematical expectations of the accumulated income for the entire period of the process in the state $(l_1, l_2) \in E$, $\pi_{(l_1, l_2)}$ – stationary probabilities, $m_{(l_1, l_2)}$ – are the conditional mathematical expectations of the time of the continuous stay of the process in the state $(l_1, l_2) \in E$;

2) The functional $S = S(\vec{G})$ is linear-fractional rather probability measures \vec{G} , defining Markov homogeneous randomized strategy [2], [6] and optimum strategy can be looked for in a class of the determined strategy of control.

3. Conclusions

So we give the algorithm of the income functional construction and searching of optimum strategy for the system with two types of queries at control of service duration and the choice of query type for service.

References

1. *Kashtanov V. A., Zaytseva O. B.* Operations research: Textbook. — M.: COURSE: INFRA-M, 2016. — 256 pages.
2. *Barzilovich E. Yu., Belyaev Yu. K., Kashtanov V. A., etc.* Questions of a mathematical reliability theory. — M. Radio i svaz', 1983. — 376 pages.
3. *Mine H., Osaki S.* Markovian decision processes. — Nauka, 1977.
4. *Kondrashova E. V.* Optimizing income function in controlled Markov queueing model // Upravlenie bol'simi sistemami. — 2011. — Vol. 36, No. 36. — P. 93–105.
5. *Kashtanov V. A., Kondrashova E. V.* Optimization of the CBSMAP-Queueing Model // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. — L.: NL International Association of Engineers, 2013. — P. 69–73.
6. *Kashtanov V. A., Medvedev A.* Reliability theory of the composite systems (theory and practice). — M.: Fizmatlit, 2010.
7. *Ivchenko G. I., Kashtanov V. A., Kovalenko I. N.* Theory of a queueing. — M.: Librocom, 2012.

Controlled stochastic processes and control in queuing, reliability and safety

V.A. Kashtanov*

** Department of Applied Mathematics,
National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya str., Moscow, Russia, 101000*

Аннотация. The functionals constructed on trajectories of the controlled semi-Markov process with a finite set of states are investigated. Theorems of functionals' structure (dependences on the probability measures defining the Markov homogeneous randomized strategy of control) and of structure of probability measures on which the extremum of these functionals is reached, are formulated. Examples are given.

Ключевые слова: security, controlled semi-Markov process with disasters, homogeneous Markov randomized control strategy, reliability, failure-free operation, maintainability, optimal control.

1. Introduction

Jump-like processes (renewal processes, Markov processes, semi-Markov processes) a long time and widely are used for analyzing of queuing models and of models of reliability. Now these processes involved for description and analysis of security issues. Study of controlled random processes allows to put the task of optimization and to expand the area of application. When solving these task, there are two problems: how functionals, defining the quality of governance, depends on strategies of management and how to determine the optimal strategy of control. Addressing these issues is set out below.

2. Main section

The object of research is the homogeneous controlled semi-Markov process $X(t)$. The homogeneous controlled semi-Markov process

$$X(t) = (\xi(t), u(t))$$

is determined [1, 4] by a semi-Markov kernel $Q_{ij}(t, u)$, $i, j \in E$, $t \geq 0$, $u \in U_i$, by a probability measures $\vec{G} = (G_i, i \in E)$ and by the initial distribution of the leading component $\xi(0)$, where E is the spaces of stats of leading component, $\xi(t) \in E$,

$(U_i, A_i), i \in E$ is the measurable sets of control parameters, $u(t) \in U_i$, if $\xi(t) = i$, which some σ -algebra A_i of their subsets.

We will define a functional $S_i(t)$ as the conditional expected value of complete effect to time $[0, t)$ if $\xi(0) = i \in E$.

Let be $\xi(0) = i, u(0) = u, \theta = t$ ($\xi(x) = i, 0 \leq x < \theta = t$) and $\xi(t) = j$ – a next value of leading component. We will designate $R_{ij}(y, t, u)$ – as the conditional expected value of effect to time $[0, y]$ if $\xi(0) = i \in E, \xi(t) = j \in E, u(0) = u, \theta = t$. The functions $R_{ij}(y, t, u)$ are defined in area of $0 \leq y \leq t < \infty, i, j \in E, u \in U_i$. We will notice that in the model of function $R_{ij}(y, t, u)$ is determined as the conditional expected values of the accumulated effect, as in certain problems the controlled semi-Markov process is often examined as the inlaid process in more thin casual process that changes the states between Markov moments. Let $R_{ij}(t, t, u) = R_{ij}(t, u)$. We assume that for disjoint time intervals accumulated effect (income) summed up. We will define a functional accumulation $S_i(t)$ as the conditional expected value of complete effect to time $[0, t]$ if $\xi(0) = i \in E$. The object of study is the limit of the ratio $\frac{S_i(t)}{t}$ (if that limit exists) for $t \rightarrow \infty$

Define the functionality of the other. We divide the set E into two disjoint subsets E_0 and $E \setminus E_0$. Then each trajectory of semi-Markov process we put into correspondence the time τ of the first occurrence of the trajectory in subset $E \setminus E_0$ and shall study the functional $S_1^{(i)}, i \in E_0$ – the conditional mathematical expectation the accumulated income before the time τ , if $\xi(0) = i$.

The following two problems arise for the functional defined on a trajectories controlled semi-Markov process $X(t) = (\xi(t), u(t))$. First we have to clarify how the functional $S_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_i(t)}{t}$ and the functional $S_1^{(i)}$ depend on the probability measures $\vec{G} = (G_i, i \in E)$ which determine a homogeneous Markov randomized control strategy. Secondly, we want to find the extremum of these functionals and determine the structure of the distributions $\vec{G} = (G_i, i \in E)$ on which the extremum is reached.

Now we will set forth a main theorem.

Let Ω is a set of acceptable strategy, E_0 is a subset of the unimportant states, $E_k, k = 1, 2, \dots, K, K < \infty$ are subsets of the substantial states.

THEOREM 1. [5]

Suppose:

1. The set E is finite;
2. For any acceptable strategy $\vec{G} = (G_i, i \in E) \in \Omega$ the process $X(t) = (\xi(t), u(t))$ is regular;
3. Conditions

$$\begin{aligned}
 m_i &= \sum_{j \in E} \int_{U_i} \int_0^\infty z dQ_{ij}(z, u) G_i(du) < \infty, \\
 &\sum_{j \in E} \int_{U_i} \int_0^\infty z^2 dQ_{ij}(z, u) G_i(du) < \infty, \\
 &\int_0^\infty \int_{U_i} \int_0^z x dx R_{ij}(x, z, u) dQ_{ij}(z, u) G_i(du) < \infty
 \end{aligned}$$

are true;

4. For any $k = 1, 2, \dots, K$ there exists $i_k \rightarrow E_k$ for which

$$s_{i_k} = \sum_{j \in E} \int_{U_i} \int_0^\infty R_{i_k j}(z, u) dQ_{i_k j}(z, u) G_{i_k}(du) \neq 0.$$

Then

$$S_i(t) = S_i t + O(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1)$$

and S_i is fractional - linear functional with respect to the probability measure, defining homogeneous Markov randomized control strategy, and

$$S^{(k)} = S_i(G^{(k)}) = \frac{I_1^{(k)}(G_i, i \in E_k)}{I_2^{(k)}(G_i, i \in E_k)} \quad i \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$S_i = S_i(\vec{G}) = \sum_{k=1}^K \gamma_i^{(k)} S^{(k)} \quad i \in E_0$$

$$\gamma_i^{(k)} = \frac{I_{i_k}^{(0)}(G_n, n \in E_0)}{I^{(0)}(G_n, n \in E_0)}, \quad i \in E_0,$$

Functionals $S_1^{(i)}, i \in E_0$ have a similar structure.

THEOREM 2.

If a semi-Markov process has a finite number of states $E = (1, 2, \dots, N)$, $N < \infty$, a set $E_0 = (1, 2, \dots, n)$, is a subset of non-recurrent states, $E_1 = (n + 1, n + 2, \dots, N)$, $0 < n < N < \infty$, is a set of absorbing states of embedded chain of Markov, then the functionals $S_1^{(i)}, i \in E_0$ are fractional - linear functionals with respect to the distribution functions $\vec{G} = (G_i, i \in E_0) \in \Omega$.

Problem fractional - linear programming can be reduced to problem linear programming.

Denote fractional - linear functional

$$I(G_1, G_2, \dots, G_N) = \frac{I_1(G_1, G_2, \dots, G_N)}{I_2(G_1, G_2, \dots, G_N)} = \frac{I_1(\vec{G})}{I_2(\vec{G})} \quad (2)$$

where for $i = 1, 2$

$$I_i(\vec{G}) = \int_{U_1} \int_{U_2} \dots \int_{U_N} A_i(u_1, u_2, \dots, u_N) G_1(du_1) G(du_2) \dots G(du_N),$$

Ω_1 is a set of acceptable strategy \vec{G} such that $I_2(\vec{G}) > 0$, Ω_2 is a set of acceptable strategy \vec{G} such that $I_2(\vec{G}) < 0$.

LEMMA. [2, 3] If the maximum of the linear-fractional functional (2) over the set of acceptable strategy Ω exists, $\max_{\vec{G} \in \Omega} I(\vec{G}) = c$, then

$$\{\vec{F} : I(\vec{F}) = \max_{\vec{G} \in \Omega} I(\vec{G}) = c\} =$$

$$\{\vec{F} : I_1(\vec{F}) - cI_2(\vec{F}) = \max_{\vec{G} \in \Omega} [I_1(\vec{G}) - cI_2(\vec{G})] = 0\} = \bigcup_{i=1}^2 H_i,$$

$$H_i = \{\vec{F} : I_1(\vec{F}) - cI_2(\vec{F}) = \max_{\vec{G} \in \Omega_i} [I_1(\vec{G}) - cI_2(\vec{G})] = 0\}.$$

Next, we analyze the structure of strategies on which an extremum of a fractional-linear functional is attained.

Let be true $\{u_i\} \in A_i, u_i \in U_i, i \in E$ and $\vec{G}^* = (G_i^*, i \in E)$,

$$G_i^*(\{u_i\}) = 1, G_i^*(B) = 0, B \neq \{u_i\}. \quad (3)$$

We denote by Ω^* the set of strategies for which the relations (3).

THEOREM 3. [6] If the maximum of the linear-fractional functional (2) exists and $\Omega^* \in \Omega$, then

$$\max_{\vec{G} \in \Omega} I(\vec{G}) = \max_{\vec{G} \in \Omega^*} I(\vec{G}) = \max_{u_i \in U_i, i \in E} \frac{A_1(u_i, i \in E)}{A_2(u_i, i \in E)}$$

that is, the optimal distribution can be found in class Ω^* of degenerate distributions.

The examples.

By this model we study the controlled semi-Markov queues, models of maintenance and models of safety.

1. *Queueing system* [4,7]. We define the optimal duration of the service (the dependence on the state of the system).

2. *Queueing system* [7]. Supposed that recurrent flow arrive in system which have n servers and N waiting places, the distribution function $G(t)$ interval between the moments of the arrival depend on state of system. We shell control by the interval between the moments of the arrival and select this interval (the distribution function) depending on number of demands at queuing system.

3. *Model maintenance of redundancy system* [6]. We study a system of two equivalent components (a basis element and a back-up element, which do not come out of action, if his is found at the place of back-up element). The damaged component is repaired by one worker, we shall call this repair as repair after failure. In model it is possible also two kinds of preventive repair: scheduled repair and non scheduled repair. The all kinds of repair make element new. Built a semi-Markov process which changes its state at the start of the repairs of one of the elements.

4. *Model safety* [8]. Consider the model of functioning of technical systems that protect information. Since the system is going to fail, and the attacker can obtain during these periods, information, solves the problem of choosing the optimal period for preventive maintenance, ensuring the maximum expectation time to the loss of information.

3. Conclusions

The theorems formulated above allow us to construct an algorithm for computing the optimal control strategy for the controlled queuing models, reliability and security, in the case where the operation of such systems are described by semi-Markov process with finite set of states.

Литература

1. *Kashtanov V. A. Yanishevsky I. M.* Joint distribution of the moment of accident and the additive functional of income // Probability theory and its applications. — 1996. — Vol. 41, no. 3. — P. 650-655.
2. *Kashtanov V. A.* Discrete distributions in control problems // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference (Petrozavodsk, 1996). — Utrecht: VSP, 1997. — P. 267-274.
3. *Kashtanov V. A.* The controlled semi-Markov processes in problem of maintenance and effectiveness // MMR' 2000. Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability (Bordeaux, France, 2000), Abstracts' Book. — Vol. 2. — P. 587-590.
4. *Kashtanov V. A.* Semi-Markov processes in problem of control of queueing systems // Queueing Theory. Proc. of All-Union School-Seminar. — The Institute for Systems Studies, Moscow, 1981. — P. 54-63 (in Russian)
5. *Kashtanov V. A.* The Structure of the Functional of Accumulation Defined on a Trajectory of Semi-Markov Process with a Finite Set of States // Theory of Probability and Its Applications. — 2016. — Vol. 60, no. 2. — P. 281-294.
6. *Barzilovuch E. Yu. Belyaev Yu. K. Kashtanov V. A. Kovalenko I. N. Solovyov A. D. Ushakov I. A.* Problems of mathematical reliability theory. — M.: Radio i Svyaz, 1983. (in Russian)
7. *Kashtanov V. A., Zaytseva O. B.* Operations research: Textbook — M.: COURSE: INFRA-M, 2016. — 256 pages.
8. *Kashtanov V. A., Dlinnova E. S.* On a mathematical security model // Proceedings Karelian research center, Russian Academy of Sciences. Series Mathematical modeling and information technologies. — 2016. — Vol. 8, no. 1. — P. 34-44.

UDC 519.872.5, 517.442

Identical service and the odd or even transform of Laplace

A. V. Pavlov*

** Department of Cybernetics, Higher Mathematics,
(MTU) Moscow Institute of Radio-techniques, Electronics and Automatics,
Vernadskogo av., 78, Moscow, 119454, Russia*

Abstract. The article is devoted to two joint work assignments with the professor A.D.Solovjev. In the first part we consider K nodes in series in conditions of identical service: the time of service of one customer on one device of nodes is the same for all different nodes (a.s.). In every node N devices are located (N more 0). Each node contains the infinite set of places for wait. The total number of customers (in real situation), the time of wait, the total time of work in nodes $2, \dots, K$ remains limited for all moments of times in heavy traffic conditions on the first node, if the classical loading is equal to 1 or more 1 or not more 1. The fact takes place, if the time of service of one customer by one device of node is limited by the constant. In the second part of the article a new class of the odd or even transforms of Laplace is presented. The class leads to some unforeseeable consequences in the direction of the Fourier transforms. We have proved a regularity of the transforms of Laplace in $|z| < b > 0$ for a new class of functions. The regularity leads to some results in direction of a new inversion of Laplace transform only with help of positive values of the transform on real axis.

Keywords: Identical service for multi-channels nodes in series, heavy traffic, total time of work, waiting times, transform of Laplace, transform of Fourier, evenness of the transform of Laplace, new inverse of the transform of Laplace.

1. Introduction

The article is devoted to two joint work assignments with the professor A.D.Solovjev. A primary aim of the first part of work (the theorem 1) is a generalization of the [1–3] results on some general nets with the total loading $\rho > 0$ (on input nodes) in conditions of identical service, [4, 5]. The sharp reduction of time of expectation and total work on the inlying nodes was marked, [3–5] (for identical service). The leading role at such reduction is played by the identity of Legendre (the first the identity for the identical service appeared in works of author, [3–5]):

$$f(Y(t) - f(Y(t))) \equiv 0, t \in [0, 1],$$

for any continuous on $[0, 1]$ functions $Y(t), Y(0) = 0$, where the transformations of Legendre is (by definition)

$$f(Y(t)) = Y(t) - t - \inf_{u \in [0, t]} (Y(u) - u) = \sup_{0 \leq u \leq t} (Y(t) - Y(u) - (t - u)).$$

Some applications of the given results are resulted in the examples 1,2.

In the second part of the article we consider a new results of the author of given article devoted to the double transform of Laplace (lemma 1), [5, 7]. A regularity of such transform in the area of 0 results in many new theorems, related to the inverse problem of the cosine-sine transform of Fourier and Laplace (and for the new class of odd or even transform of Laplace in the lemma 2 in the article), [5, 7].

2. Identical service; the regularity of the transform of Laplace in the area of 0

Main part of the first part is expounded in the examples 1-2. The examples follow from the [3, 5] works of author.

We consider the K nodes, $K \geq 2$. The arrival process for the j -th node is equal to the output process on the $(j - 1)$ -th node, $j = 2, \dots, K$. In the first node the customers are served in order of arrival, and as soon as the service is finished the customer arrives on the next node. In all nodes the customers are served in order of arrival. If a customers arrives on a node in group (for non-ordinary process), the customers are disposed in the group in the random order - all results d't rely on order in the group. The j -th node consists of N service units (devices) with infinite set of waiting places, $j = 1, \dots, K$.

In our article for $j > 1$ we explore a net characteristics: W_j^t - the total time of service of all the customers being on j -th node at t moment, $j = 1, \dots, K$ (the virtual time of wait for one channel); ν_j^t - the total number of the customers on j -th node at t moment, $j = 1, \dots, K$; V_j^t - the full time of service on the j -th node of the customer, which arrives on the j -th node at t moment $j = 1, \dots, K$ (the time of wait plus the "length of customer").

By definition, $A(t)$ is a number of final customer among all customers arriving on first node during $[0, t]$.

Let j be the number of the customer arriving on the first node j -th on the account. By definition, ξ_j^i is the time of service of the j -th customer on the i -th node by one device (unit of service); **all the different devices on all nodes are identical:**

$$\xi_j^1 = \xi_j^2 = \dots = \xi_j^K,$$

for all $j = 1, 2, \dots$, and $\{\xi_j^1, j = 1, 2, \dots\}$ are the mutually independent random values with the distribution function $F(x) = \Pr(\xi_j^1 \leq x)$ for all T .

The process $A(t)$, $0 \leq t \leq 1$, and the sequence $\{\xi_j^1, j = 1, 2, \dots\}$ are mutually independent for all $T \in [0, \infty)$.

Example 1. Let's consider K consistently located devices with **identical** service ($N = 1$). If the time of service of one customer by one device

more of m constant, and it is always limited by $2m$ constant:

$$0 < m < \xi_1^1 < 2m < \infty,$$

the number of customers on every devices with numbers $j > 1$ **will be or 0 or one or two** (independently from an intensity of arriving of customers on the first device), if $\rho < 1, \rho = 1, \rho > 1$, where ρ is the traditional loading on the first device: $\nu_j^t \leq 2$, for all $t \in [0, \infty), j = 2, \dots, K$, if $\nu_j^0 = 0, j = 1, \dots, K$. The situation (the theorem 1) is executed for all input streams of customers on first device ([5]).

For instance, the number of customers on every devices **with numbers $j > 1$ will be or 0 or one or two**, for all known input process and for all ρ , if

$$m < \xi_1^1 < 2m,$$

where ξ_1^1 is the length of service of one customer.

Example 2. We consider K consistently located devices with **identical** service ($N = 1$) (one device in one node). The number of customers **on every devices with numbers $j > 1$ will be or 0 or one (not more)**, if the time of service of every customer by one device is the m constant for all nodes :

$$\nu_j^t \leq 1,$$

for all $t \in [0, \infty), j = 2, \dots, K$, if $\nu_j^0 = 0, j = 1, \dots, K$,

$$\xi_j^1 \equiv m = const < \infty, \quad j = 1, 2, \dots,$$

[5].

As in the first example the situation (the theorem 1) is executed for all input streams of customers on first device and for all $\lambda m < 1, \lambda m = 1, \lambda m > 1$, for instance $m = 0, 1, \lambda = 0, 0001$ or $\lambda = 10$ or, $\lambda = 1000$.

Theorem 1. [3–5]

1.

$$\max_{i=2, \dots, K} \sup_{0 \leq t \leq T} \max(W_i^t, V_i^t) \leq C(N)\Delta,$$

$\Delta(T) = \max_{j \leq A(T)} \xi_j^1, C(N) = 2N - 1$; and $C(N) = 1$, if $N = 1, C(N) = 2N - 1$, if $N > 1$. (For all the input processes $A(t)$).

By definition,

$$\begin{aligned}
 L_{\pm}Z(t)(\cdot)(x) &= \int_0^{\infty} e^{\pm xt} Z(t) dt, \quad x \in [0, \infty), \quad L_+ = L; \\
 CoS(t)(\cdot)(x) &= \int_0^{\infty} \cos xt S(t) dt, \quad SiS(v)(\cdot)(x) = \int_0^{\infty} \sin xt S(t) dt, \\
 & \quad x \in (-\infty, \infty); \\
 F_{\pm}S(t)(\cdot)(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm pit} S(t) dt, \quad F_{\pm}^0 S(t)(\cdot)(p) = \int_0^{\infty} e^{\pm pit} S(t) dt, \\
 & \quad p \in (-\infty, \infty).
 \end{aligned}$$

Lemma 1 ([5]).

The

$$R_+(z) = \int_0^{\infty} e^{zt} dt \int_0^{\infty} e^{itx} S_0(x-a) dx, \quad LLS_0(x-a)(\cdot)(z),$$

functions are regular in the area $z : |z| < 2a > 0$, if

1. the function $S_0(-z)$ is regular in the area $G(S) = \{z : |Im z| < 2a\}$;
2. $|S_0(z)| < c_0/|z|^{2+\delta}$, $|z| \rightarrow \infty$, $z \in G(S)$, $\delta > 0$, $c_0, \delta = const.$ (We do not use $S_0(0) = 0$).

Proof.

In the integral

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} e^{pt} dt \int_{-\infty}^{-a} e^{txi} S_0(x) dx = \int_0^{\infty} e^{pt} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{txi} S_0(x) dx - \\
 & - \int_0^{\infty} e^{pt} dt \int_{-a}^{\infty} e^{txi} S_0(x) dx = L_+ F_+ S_0(x)(\cdot)(p) + \\
 & + \left[- \int_0^{\infty} e^{(p-ai)t} dt \int_0^{\infty} e^{txi} S_0(x-a) dx \right],
 \end{aligned}$$

the first part of the sum is regular in the $|Re p| < 2a$ area, if the $S_0(-z)$ function is regular in $|Im p| < 2a$ (the fact is well-known, see [5, 7] or many works of Privalov).

We obtain, that the first part of the sum is regular in $\{|Re p| < 2a\} = G_1(s)$, where $\{z : |z| < 2a > 0\} \in G_1(s)$. The second part

of the sum together with the integral $J(p) = \int_0^{\infty} e^{pt} dt \int_{-\infty}^{-a} e^{txi} S_0(x) dx = \int_{-\infty}^{-a} [-S_0(x)/(p + ix)] dx$ is regular for all $p : Imp \in (-a, +\infty), a > 0$ (the integral obviously has $dJ(p)/dp$ in the area $([6, 7])$.

We obtain, that the second part of the sum $[- \int_0^{\infty} e^{(p-ai)t} dt \int_0^{\infty} e^{txi} S_0(x - a) dx] = J_0(p)$, is regular for all $z = p - ai : Imp \in (-a, +\infty) \cap \{|Re p| < 2a\}$, or for the all $G_0 = \{z : Im z \in (-2a, +\infty) \cap \{|Re z| < 2a\}\}$, where $|z| < 2a \in G_0$. The lemma 1 we obtain now from $LLS_0(x - a)(\cdot)(iu) = (-i)R_+(-u), u \in (0, +\infty)$, [5].

From the lemma 1 we get the obvious **Lemma 2**:

In the conditions of the lemma 1 $R_1(-p) = -R_1(p), p \in C$, where $R_1(p) = LCo(S(x))(\cdot)(p), S(-x) = S(x), x \in (-\infty, \infty)$; $R_2(-p) = R_2(p), p \in C$, where $R_2(p) = LSi(S(x))(\cdot)(p), S(-x) = -S(x), x \in (-\infty, \infty)$, [5], (the values on the complex axis do not have the real part).

References

1. *Boxma O. J.* On a tandem queueing model with identical service time at both counters // *Advan. in Appl. Probab.* — 1997. — Vol. 11, no. 3. — P. 616–659.
2. *Vinogradov O. P.* On the output stream and joint distribution of sojourn times in a multiphase system with identical service // *Theory Prob. and Appl.* — 1995. — Vol. 40, no. 3. — P. 646–654.
3. *Pavlov A. V.* Diffusion approximations and variation of conditions of ergodicity for identical service // *Advan. Math. Scien.* — 1997. — Vol. 52, no. 3 (315). — P. 171–172.
4. *Pavlov A. V.* A net with serial access and the reduction of total work for identical service // *China, Publ. in Intern. Academic Press (www.IAPress.org), Statist., Optimiz., Inform., Comput., 2017.* — Vol. 5, no. 2. — P. 121-126.
5. *Pavlov A. V.* The disciplines of service with prior to the shortest and identical service // *Moscow, MGTUREA (MIREA) Publishers, 2014.* — numb. of gov. reg.0321401014 at 17 apr. 2014. — ISBN 978-5-7339-1261-5. — <http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/300386>.
6. *Pavlov A. V.* The Fourier transform and new inversion formula of the Laplace transform // *Math. Notes.* — 2011. — Vol. 90, no. 5. — P. 793–796 (in Russian). — Vol. 90, no. 5–6. — P. 775–779 (in English).
7. *Pavlov A. V.* About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier // *Issues of Analysis.* — 2016. — Vol. 23, no. 1. — P. 21–30.

УДК 517.937, 517.928.2, 519.711.2, 519.21

Analysis of random neural networks with an infinite number of cells

S. K. Kanzitdinov*, S. A. Vasilyev*

** Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

Аннотация. In this paper we consider dynamics of complex systems using random neural networks with an infinite number of cells. The Cauchy problem for singular perturbed infinite order systems of stochastic differential equations which describes the random neural network with infinite number of cells is studied.

Ключевые слова: analytical methods in probability theory, asymptotic methods, neural network; dynamics of complex systems.

1. Introduction

The recent research of random neural networks with an infinite number of cells deal with the problem of the solutions analysis of certain infinite systems of ordinary differential equations. A model for a large network of "neurons" with a graded response (or sigmoid input-output relation) was studied [4]. The idea was used in biological systems was given added credence by the continued presence of such properties for more nearly biological "neurons". In the paper [1] was given existence and uniqueness results for the equations describing the dynamics of some neural networks for which there were infinitely many cells. Such system was considered and neural nets which were modeled were described by the singular perturbed infinite system of ordinary differential equations. Bruce D. Calvert and Armen H. Zemanian [2] investigated a nonlinear infinite resistive network, an operating point could be determined by approximating the network by finite networks obtained by shorting together various infinite sets of nodes, and then taking a limit of the nodal potential functions of the finite networks. Claudio Turchetti and other author [5], [6] provided applications of stochastic neural networks.

In paper [7], we considered neural networks with an infinite number of cells. The Cauchy problem for infinite order systems of differential equations is considered. The theorems of existence and uniqueness of solution is proved.

In this paper we propose method of analysis random neural networks with an infinite number of cells. Cauchy problem is studied for singular perturbed infinite order systems of differential equations with random coefficients, which describes the stochastic process in neural network with infinite number of cells.

2. Large scale random neural networks model

In 1984 Hopfield investigated a neural network which was described using system of ordinary differential equations [4]

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^N T_{ij} g(u_j(t)) - \frac{u_i(t)}{R_i} + I_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

where $u_i(t) \in \mathbf{R}$ is a monotone-increasing function of the instantaneous input to neuron i , $C_i > 0$ is a capacitance of the cell membrane, $R_i > 0$ is a transmembrane resistance, $I_i > 0$ is a fixed input current to neuron i and $t \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T} \in \mathbf{R}_+$) is a time parameter. The matrix element $T_{ij} \in \mathbf{R}$ can be assumed as a description of the synaptic interconnection strength from neuron j to neuron i and T_{ij}^{-1} is a finite impedance between the output V_j and the cell body of cell i , where $u_i = g_i^{-1}(V_i)$ and $g(u_i(t)) \in [-1; 1]$ is an increasing continuous function from \mathbf{R} to $[-1; 1]$, perhaps $g(u_i(t)) = \tanh(u_i(t))$.

We can rewrite the system (2) in the form

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= f_i(\mathbf{u}, g, t) + a_i u_i(t) + b_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad t \geq 0, \\ f_i(\mathbf{u}, g, t) &= \sum_{j=1}^N \frac{T_{ij}}{C_i} g(u_j(t)), \quad a_i = -\frac{1}{C_i R_i}, \quad b_i = \frac{I_i}{C_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ (u_1, u_2, \dots, u_N), $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^N$ (f_1, f_2, \dots, f_N) are N -dimensional vector functions and $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^N$ (a_1, a_2, \dots, a_N), $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^N$ (b_1, b_2, \dots, b_N) are N -dimensional vectors.

We can generalize the system (2) assuming $g(u_j(t))$ is a random function

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= f_i^N(\mathbf{u}, g, t; \omega) + a_i u_i(t) + b_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad t \geq 0, \\ f_i^N(\mathbf{u}, g, t; \omega) &= \sum_{j=1}^N \frac{T_{ij}}{C_i} g(u_j(t), \omega), \end{aligned} \quad (3)$$

where $g(u_j(t); \omega) \in [-1; 1]$ is an increasing random function ($(t; \omega) \in \mathcal{T} \times \Omega$, $(\Omega; \mathbf{F}; \mathcal{P})$ is an abstract probability space).

For describing rapid changes of processes in some element of the neural network we can use a small parameter $\mu > 0$ that bring a singular perturbation to the system (2)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= f_i^N(\mathbf{u}, g, t; \omega) + a_i u_i(t) + b_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \mu^{s_i} \frac{du_i}{dt} &= f_i^N(\mathbf{u}, g, t; \omega) + a_i u_i(t) + b_i, \quad i = n + 1, \dots, N, \quad n < N, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

where $s_i \in \mathbf{N}$ ($0 < s_{n+1} \leq s_{n+2} \dots \leq s_N$) is a finite sequence of natural numbers and $i \in (n+1, \dots, N)$ is the numbers of neural cells in which the speed of the processes faster than in neural cells with numbers $i \in (1, \dots, n)$.

For the system (2) we can use extended variables $\tau_i = t/\mu^{s_i}$ where $s_i = 0$ when $i \in (1, \dots, n)$ or $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^N$ ($0, \dots, 0, s_{n+1}, \dots, s_N$) and rewrite it in the form

$$\frac{du_i}{d\tau_i} = f_i^N(\mathbf{u}, g, \tau_i; \omega) + a_i u_i(\tau_i) + b_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

where $(\tau_i; \omega) \in \mathcal{T}_i \times \Omega$ ($(\Omega; \mathbf{F}; \mathcal{P})$ is an abstract probability space).

For system (2) we can formulate the following Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{du_i}{d\tau_i} = f_i^N(\mathbf{u}, g, \tau_i; \omega) + a_i u_i(\tau_i) + b_i, \\ u_i(0) = \bar{u}_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (6)$$

where a finite numerical sequence $(\bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, \dots, \bar{u}_N^0)$ or $\bar{\mathbf{u}}^0 \in \mathbf{R}^N$ is the initial conditions of the problem (2). The sequence $\bar{\mathbf{u}}^0$ determines the initial state of the neural network.

We can consider the neural network with infinite number of cells and we can formulate the following Cauchy problem in case $N \rightarrow \infty$ in the form

$$\begin{cases} \frac{du_i}{d\tau_i} = f_i(\mathbf{u}, g, \tau_i; \omega) + a_i u_i(\tau_i) + b_i, \\ u_i(0) = \bar{u}_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (7)$$

where

$$f_i(\mathbf{u}, g, \tau_i; \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{T_{ij}}{C_i} g(u_j(\tau_i), \omega), \quad i = 1, 2, \dots,$$

and $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^\infty$ (u_1, u_2, \dots), $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^\infty$ (f_1, f_2, \dots) are infinite dimensional vector functions and $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^\infty$ (a_1, a_2, \dots), $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^\infty$ (b_1, b_2, \dots) are infinite dimensional vectors. The initial conditions $(\bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, \dots)$ of the problem (2) or $\bar{\mathbf{u}}^0 \in \mathbf{R}^\infty$ determines the initial state of the neural network.

3. Random neural networks with an infinite number of cells modeling

We can consider the following Cauchy problem for infinite order systems of differential equations with a random coefficient

$$\begin{cases} \frac{du_i}{d\tau_i} = \epsilon_{\tau_i} u_{i+1}(\tau_i), \\ u_i(0) = \bar{u}_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

where $\epsilon_{\tau_i} \cong N(r, \sigma^2)$ are independent normally distributed random variables. For this infinite order systems of differential equations we can study a similar problem without a stochastic variable such form

$$\begin{cases} \frac{du_i}{d\tau_i} = u_{i+1}(\tau_i), \\ u_i(0) = \bar{u}_i^0, i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Therefore, at least one solution of this system of equations passes through every point $(0, 0, \dots, \bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, \dots)$. It is easy to see that the series

$$u_i(\tau_i) = \bar{u}_i^0 + \tau_i \bar{u}_{i+1}^0 + \frac{\tau_i^2}{2} \bar{u}_{i+2}^0 + \dots, i = 1, 2, \dots,$$

define the required solution. Now we can obtain the exact solution of the problem (3)

$$u_i(\tau_i) = \bar{u}_i^0 \int_0^\infty u_i(\tau_i \zeta) f(\zeta) d\zeta, i = 1, 2, \dots,$$

where $f(\zeta)$ is the probability density function. If ϵ_{τ_i} is a Gaussian random variable with mean r and variance σ , then the integral can be evaluated exactly if the initial condition of Chauchy problem we get as $\bar{u}_i^0 = 1, i = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} u_i(\tau_i) &= \int_0^\infty \exp(\tau_i \zeta) f(\zeta) d\zeta, i = 1, 2, \dots, \\ u_i(\tau_i) &= \exp\left(r\tau_i + \frac{\sigma^2 \tau_i^2}{2}\right), i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

or turning to the usual variables we get solutions Cauchy problem

$$u_i(t) = \exp\left(r\mu^{-s_i} t + \frac{\sigma^2 \mu^{-2s_i} t^2}{2}\right), i = 1, 2, \dots$$

We can solve infinite order systems of differential equations with random coefficients using wide class of continuous transfer functions.

4. Conclusions

In this paper we propose method of analysis random neural networks with an infinite number of cells. Cauchy problem for singular perturbed infinite order systems of differential equations with random coefficients, which describes the stochastic process in neural network with infinite number of cells, is studied. For this Cauchy problem consider the question of the existence of solution and obtain some exact solutions.

Благодарности

The reported study was funded within the Agreement No 02.a03.21.0008 dated 24.11.2016 between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and RUDN University.

Литература

1. *Calvert B. D.* Neural networks with an infinite number of cells // Journal of Differential Equations. — 2002. — Vol. 186, no. 1. — P. 31–51.
2. *Calvert B. D., Zemanian A.H.* Operating points in infinite nonlinear networks approximated by finite networks // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352, no 2. — P. 753–780.
3. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics. — Springer-Verlag, Berlin, 1981.
4. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1984. — Vol. 81. — P. 3088 – 3092.
5. *Turchetti C.* Stochastic Models of Neural Networks, Frontiers in artificial intelligence and applications: Knowledge-based intelligent engineering systems. — IOS Press, 2004. — Vol. 102.
6. *Turchetti C., Crippa P., Pirani M., Biagetti G.* Representation of Nonlinear Random Transformations by Non-Gaussian Stochastic Neural Networks // IEEE transactions on neural networks / a publication of the IEEE Neural Networks Council. — 2008.— Vol. 19. — P. 1033–1060.
7. *Vasilyev S. A., Kanzitdinov S. K.* Model of neural networks with an infinite number of cells and small parameter // International scientific journal “Modern Information Technologies and IT-Education”. — 2016. — Vol. 12, no. 2. — P. 15–20.

УДК 519.853.6+519.856

Algorithms of Inertial Mirror Descent in Stochastic Convex Optimization Problems

A. V. Nazin*

* V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of
Russian Academy of Sciences,
Profsoyuznaya str. 65, Moscow, 117997, Russia

Аннотация. The goal is to modify the known method of mirror descent (MD) in convex optimization, which having been proposed by A.S. Nemirovsky and D.B. Yudin in 1979 and generalized the standard gradient method. To start, the paper shows the idea of a new, so-called inertial MD method with the example of a deterministic optimization problem in continuous time. In particular, in the Euclidean case, the heavy ball method by B.T. Polyak is realized. It is noted that the new method does not use additional averaging of points. Then, a discrete algorithm of inertial MD is described. The proved theorem of the upper bound on error in objective function is formulated.

Ключевые слова: stochastic optimization problem, convex optimization, mirror descent, heavy ball method, inertial MD method.

1. Introduction

Many problems of an applied nature can formally be reduced to minimization problem $f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$, where a priori unknown function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ is convex, set X is convex compact in \mathbb{R}^N ; see e.g. [1,2] where both problem statements and optimization methods are described. In such problems, in order to sequentially estimate the minimum point $x^* \in \text{Argmin}_{x \in X} f(x)$ it is assumed that, at each time $t = 1, 2, \dots$, there is an ability to get subgradient $g_t = g_t(x_{t-1}) \in \partial f(x_{t-1})$ or its stochastic version $u_t(x_{t-1}) = g_t + \xi_t$ at current point $x_{t-1} \in X$ where $\partial f(x)$ denotes subdifferential of function f at point x , and ξ_t represents a disturbance of the subgradient.¹ The foregoing assumes that the minimized function is known up to its membership in a given class \mathcal{F} of convex functions (probably, under additional smooth properties); in addition, it is assumed that at each current time $t \geq 1$ it is possible to access the oracle at current input point x_{t-1} and get a stochastic subgradient as the output $u_t(x_{t-1})$.

In [3] it is shown that in convex problems with the “correct” choice of the MDM parameters, the latter is an effective method in the sense that

¹We are talking about the concept of an oracle of the first order in the optimization problem under consideration (either deterministic problem, when $\xi_t \equiv 0$, or stochastic one, under $\mathbb{E}\{\xi_t\} \equiv 0$) [3].

for each $t > 1$ the upper and lower bounds of the error (by the objective function)

$$f(\hat{x}_t) - \min_{x \in X} f(x)$$

coincide up to an absolute constant; here \hat{x}_t represents “final” estimate of the minimum point by the time t , based on previous observations of subgradients at the obtained points x_k , $k = 0, 1, \dots, t - 1$.

Often, as estimate \hat{x}_t , the arithmetic mean of the preceding points is taken, $\hat{x}_t = (x_0 + x_1 + \dots + x_{t-1})/t$. We note that the fundamentally new in the structure of the MD method in comparison with the classical methods of gradient type is the (explicit or implicit) presence of two spaces, primal space $E \supset X$ with an initial norm $\|\cdot\|$ and conjugate one E^* with dual norm $\|\cdot\|_*$; for details, see [4], section 3.1. In the particular, “Euclidean” case $E = E^*$ when both norms are Euclidean and the set $X = \mathbb{R}^N$ is the whole initial space, the MD method is transformed into subgradient method $x_t = x_{t-1} - \gamma_t u_t(x_{t-1})$, $t = 1, 2, \dots$. Recall that the introduction of an additional inertia term into the gradient method can improve the convergence properties of the algorithm. This refers to the heavy-ball method proposed by B.T. Polyak in 1964 [5] (see also [6]). Hence, it is reasonable to generalize the MDM by adding an appropriate inertia term [7]. Sections 3 and 4 are devoted to the realization and study of this idea.

2. Stochastic optimization problem

Consider well-known minimization problem

$$f(x) \triangleq \mathbb{E} Q(x, Z) \rightarrow \min_{x \in X}, \quad (1)$$

where loss function $Q : X \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ contains random variable Z with unknown distribution on space \mathcal{Z} , \mathbb{E} — mathematical expectation, set $X \subset \mathbb{R}^N$ — given convex compact in N -dimension space, random function $Q(\cdot, Z) : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ is convex a.s. on X .

Let i.i.d sample (Z_1, \dots, Z_{t-1}) be given where all Z_i have the same distribution on \mathcal{Z} as Z . Introduce notation for stochastic subgradients

$$u_k(x) = \nabla_x Q(x, Z_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

such² that $\forall x \in X$, $\mathbb{E} u_k(x) \in \partial f(x)$. The goal is in constructing and proving novel recursive MD algorithms meant for minimization (2) and using stochastic subgradients (2) at current points $x = x_{t-1} \in X$, $t \geq 1$.

²Below we mean $\nabla_x Q(x, Z_k)$ be the subgradient which are measurable functions defined on $X \times \mathcal{Z}$ such that, for any $x \in X$, the expectation $\mathbb{E} u_k(x)$ belongs to $\partial f(x)$.

3. The idea of method of inertial mirror descent

In this section, let $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ be convex, continuously differentiable function having a unique minimum point $x^* \in \text{Argmin} f(x)$ and its minimal value $f^* = f(x^*)$. Consider continuous algorithm which extends MDM

$$\dot{\zeta}(t) = -\nabla f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad \zeta(0) = 0, \quad (3)$$

$$\mu_t \dot{x}(t) + x(t) = \nabla W(\zeta(t)), \quad x(0) = \nabla W(\zeta(0)). \quad (4)$$

Functional parameter in (3) is a convex, continuously differentiable function $W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ having conjugate function

$$V(x) = \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^N} \{\langle \zeta, x \rangle - W(\zeta)\}. \quad (5)$$

Let $W(0) = 0$, $V(0) = 0$, and $\nabla W(0) = 0$ for simplicity.

Remark. Under parameter $\mu_t \equiv 0$ in (3), algorithm (3)–(3) represents MDM (in continuous time) [3]; in particular, the identical mapping $\nabla W(\zeta) \equiv \zeta$ and $\mu_t \equiv 0$ lead to a continuous standard gradient method. Under $\mu_t \equiv \mu > 0$ and $\nabla W(\zeta) \equiv \zeta$, algorithm (3)–(3) leads to continuous method of heavy ball (MHB) [6]. \square

Further, we assume that parameter $\mu_t \geq 0$ is differentiable, and method (3)–(3) we call continuous Method of Inertial Mirror Descent (MIDM).

Assume a solution $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ to system equations (3)–(3) exists. Consider function $W_*(\zeta) = W(\zeta) - \langle \zeta, x^* \rangle$, $\zeta \in \mathbb{R}^N$, attempting to find a candidate Lyapunov function. Trajectory derivative to system (3)–(3) be

$$\begin{aligned} dW_*(\zeta(t))/dt &= \langle \dot{\zeta}, \nabla W - x^* \rangle = -\langle \nabla f(x), \mu_t \dot{x} + x - x^* \rangle \leq \quad (1) \\ &\leq f(x^*) - f(x(t)) - \mu_t d[f(x(t)) - f^*]/dt \quad (2) \end{aligned}$$

where last inequality results from convexity $f(\cdot)$. Now, integrating on interval $[0, t]$ with $W_*(0) = 0$, we obtain

$$\int_0^t [f(x(t)) - f^*] dt \leq -W_*(\zeta(t)) - \mu_t [f(x(t)) - f^*]_0^t + \int_0^t [f(x(t)) - f^*] \mu_t dt,$$

where two last terms in RHS got by integrating in parts. Taking (3) into account, we continue $\left(1 - \sup_{s \in [0, t]} \dot{\mu}_s\right) \int_0^t [f(x(t)) - f^*] dt \leq V(x^*) - \mu_t [f(x(t)) - f^*]_0^t$. Therefore, it is reasonable to introduce the following constraints on parameter $\mu_t \geq 0$: $\mu_0 = 0$, $\dot{\mu}_t \leq 1 \forall t > 0$, leading to inequality $f(x(t)) - f^* \leq V(x^*)/\mu_t$. Maximizing μ_t under constraints above we get $\mu_t = t$, $t \geq 0$. The related (continuous) IMD algorithm

$$\dot{\zeta}(t) = -\nabla f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad \zeta(0) = 0, \quad (8)$$

$$t \dot{x}(t) + x(t) = \nabla W(\zeta(t)), \quad (9)$$

proves upper bound $f(x(t)) - f^* \leq V(x^*)t^{-1}$, $\forall t > 0$.

4. Algorithm IMD. Main results

Now return back to optimization problem of section 2. Let $\|\cdot\|$ be a norm in primal space $E = \mathbb{R}^N$, and $\|\cdot\|_*$ be the related norm in dual space $E^* = \mathbb{R}^N$; set $X \subset E$ is convex compact, $\beta > 0$ is a scale parameter.

Assumption (L). *Convex function $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ is such that its β -conjugate $W_\beta(\zeta) \triangleq \sup_{x \in X} \{-\zeta^T x - \beta V(x)\}$ is continuously differential on E^* with Lipschitz condition $\|\nabla W_\beta(\zeta) - \nabla W_\beta(\tilde{\zeta})\| \leq (\alpha\beta)^{-1} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_*$, $\forall \zeta, \tilde{\zeta} \in E^*$, $\beta > 0$, where α is positive constant being independent of β .*

Consider now the discrete time $t = 1, 2, \dots$ and introduce sequence $\gamma_t > 0$. Write a discrete version of algorithm IMD (3)–(3) using stochastic subgradients (2) instead of the gradients $\nabla f(\cdot)$:

$$\tau_t = \tau_{t-1} + \gamma_t, \quad t \geq 1, \tau_0 = 0, \quad (3)$$

$$\zeta_t = \zeta_{t-1} + \gamma_t u_t(x_{t-1}), \quad \zeta_0 = 0, \quad (4)$$

$$\tau_t \frac{x_t - x_{t-1}}{\gamma_{t+1}} + x_t = -\nabla W_{\beta_t}(\zeta_t), \quad x_0 = -\nabla W_{\beta_0}(\zeta_0); \quad (5)$$

parameters $\gamma_t > 0$ and $\beta_t \geq \beta_{t-1} > 0$ are specified in (4), function W_β is defined by proxy-function $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ via Legendre–Fenchel type transform [4], $W_\beta(\zeta) = \sup_{x \in X} \{-\zeta^T x - \beta V(x)\}$, $\zeta \in E^*$.

Remark. Equation (5) may be written as

$$x_t = \frac{\tau_t}{\tau_t + \gamma_{t+1}} x_{t-1} - \frac{\gamma_{t+1}}{\tau_t + \gamma_{t+1}} \nabla W_{\beta_t}(\zeta_t).$$

Since the vectors $[-\nabla W_{\beta_t}(\zeta_t)] \in X$ under each $t \geq 0$, equations (3)–(4) show that $x_t \in X$ by induction. \square

Further, let sequences $(\gamma_i)_{i \geq 1}$ and $(\beta_i)_{i \geq 1}$ are of view

$$\gamma_i \equiv 1, \quad \beta_i = \beta_0 \sqrt{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \beta_0 > 0. \quad (13)$$

Then system equations (3)–(5) leads to the IMD algorithm (c.f. [8]):

$$\zeta_t = \zeta_{t-1} + u_t(x_{t-1}), \quad \zeta_0 = 0, \quad x_0 = -\nabla W_{\beta_0}(\zeta_0), \quad (6)$$

$$x_t = x_{t-1} - (t+1)^{-1} (x_{t-1} + \nabla W_{\beta_t}(\zeta_t)), \quad t \geq 1. \quad (7)$$

Theorem 1. *Let X be convex closed set in \mathbb{R}^N , and loss function $Q(\cdot, \cdot)$ satisfies the conditions of section 2, and, moreover, $\sup_{x \in X} \mathbb{E} \|\nabla_x Q(x, Z)\|_*^2 \leq L_{X, Q}^2$, where constant $L_{X, Q} \in (0, \infty)$. Let V be proxy-function on X with parameter $\alpha > 0$ from Assumption (L), and let exists minimum point $x^* \in \text{Argmin}_{x \in X} f(x)$, perhaps non unique. Then for any $t \geq 1$ estimate x_t ,*

defined by algorithm (6), (7) with stochastic subgradients (2) and sequence $(\beta_i)_{i \geq 1}$ from (4) with arbitrary $\beta_0 > 0$, satisfies inequality

$$\mathbb{E} f(x_t) - \min_{x \in X} f(x) \leq (\beta_0 V(x^*) + L_{X, Q}^2 / (\alpha \beta_0)) \sqrt{t+2} / (t+1).$$

If constant \bar{V} is such that $\max_{x \in X} V(x) \leq \bar{V}$, and $\beta_0 = L_{X,Q} (\alpha \bar{V})^{-1/2}$ then

$$\mathbb{E} f(x_t) - \min_{x \in X} f(x) \leq 2 L_{X,Q} (\alpha^{-1} \bar{V})^{1/2} \sqrt{t+2}/(t+1). \quad \square$$

5. Conclusion

We considered the well-known convex problem of stochastic optimization with the goal of constructing and investigating the novel recursive algorithms of mirror descent type which generalize both heavy ball method and MDM. It turned out that the new method does not require additional averaging of the input points to the oracle and it ensures the same upper bound on the objective function, as the previous, effective method of MD (on the class of considered problems) [3, 4]. It seems interesting the further research for another classes of objective functions and requirements to oracle.

Благодарности

The work is partially supported by the Russian Science Foundation grant No 16-11-10015. The author considers it his duty to thank B.T. Polyak for his attention to this work and A. Juditsky for important discussions and sending the reference [8].

Литература

1. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. — Cambridge University Press, 2004.
2. *Nesterov Yu.* Introductory Lectures on Convex Optimization. — Boston: Kluwer, 2004.
3. *Nemirovskii A.S., Yudin D.B.* Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization. — Chichester: Wiley, 1983.
4. *Juditsky A.B., Nazin A.V., Tsybakov A.B., Vayatis N.* Recursive aggregation of estimators by the mirror descent algorithm with averaging // Problems of Information Transmission. — 2005. — Vol. 41, no. 4. — P. 368–384.
5. *Polyak B.T.* Some methods of speeding up the convergence of iteration methods // USSR Comp. Math. and Math. Phys. — 1964. — Vol. 4, no. 5. — P. 1–17.
6. *Polyak B.T.* Introduction to optimization. — New York: Optimization Software Inc., 1987.
7. *Nazin A.* Algorithms of Inertial Mirror Descent in Convex Problems of Stochastic Optimization // ArXiv: 1705.01073. — 2017.
8. *Nesterov Yu., Shikhman V.* Quasi-monotone Subgradient Methods for Nonsmooth Convex Minimization // J. Optim. Theory Appl. — 2015. — No. 165. — P. 917–940. — DOI: 10.1007/s10957-014-0677-5.

Fluid model with jumps in heavy traffic

M. Dimitrov*

** Department of mathematics,
University of National and World Economy,
Students campus, Sofia 1700, Bulgaria*

Abstract. In the conventional Markov modulated fluid queue, the buffer content process has a continuous sample path. This paper considers a general stochastic fluid model with a single infinite capacity buffer whose buffer content process may have jumps. The continuous, as well as the instantaneous, change is modulated by an external environment process as a finite state continuous time Markov chain. Heavy traffic limit theorem for the distribution of the stationary fluid content is considered.

Keywords: single-server queue, fluid model with jumps, heavy traffic limit theorem.

1. Introduction

Classical fluid queueing models are queueing models in which work enters and leaves a buffer non-instantaneously, i.e. like a fluid. They are used for modeling and performance analysis of high-speed data networks, and large scale production systems.

In the present study we used the analytical approach introduced in [2] and prove a heavy traffic limit theorem for steady state fluid content for fluid model with jumps, considered in [1].

2. The model

We will continue the investigation of a fluid model introduced in [1]. The buffer content $X(t)$ can increase continuously and also by instantaneous jumps. The rate of change of the fluid level depends on the state of an external stochastic process $\{I(t), t \geq 0\}$, with a finite space $S = \{0, 1, \dots, K\}$. The buffer content increases continuously with rate $c_i \in (-\infty, +\infty)$ if the process $\{I(t), t \geq 0\}$ is in a state i . The process $\{I(t), t \geq 0\}$ remains an exponential amount of time at each state $i \in S$ with a parameter λ_i and, when leaving such state i , it will make a jump from state i to state j , not necessarily different from i with probability p_{ij} . When the $I(t)$ process jumps from state i to state j the amount of fluid in the buffer can increase by a non-negative random amount with a given c.d.f, $G_{ij}(y), y \geq 0$ with mean m_{ij} and second moment v_{ij} . A bivariate process $\{X(t), I(t)\}$ can jump from state (x, i) to state $(x + y, j)$ with rate $\lambda_i p_{ij} dG_{ij}(y), y \geq 0$. We need some notations $C = \text{diag}(c_0, c_1, \dots, c_K)$, $P = \|p_{ij}\|, 0 \leq i, j \leq K$, $M = \|m_{ij}\|, 0 \leq i, j \leq K$,

$V = \|v_{ij}\|, 0 \leq i, j \leq K, \Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_K), \lambda_i = \lambda\lambda_i^0, \Lambda^0 = \text{diag}(\lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_K^0), \lambda_i^0 > 0, 0 \leq i \leq K, \Gamma = \lambda\Lambda^0, \Gamma = \Lambda P \circ M, \Gamma^0 = \lambda_0\Lambda^0$
 $P \circ M., Q_{ij}(x) = \lambda_i p_{ij} G_{ij}(x), x \geq 0, i, j \in S, Q_{ii}(x) = \lambda_i P_{ii} G_{ii}(x), x \geq 0, i \in S, Q(x) = \|Q_{ij}\|, i, j \in S, \bar{Q}_{ij}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dQ_{ij}(x), \bar{G}_{ij}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dG_{ij}(x), \bar{Q}(s) = \|\bar{Q}_{ij}(s)\|, \bar{G}(s) = \|\bar{G}_{ij}(s)\|, 0 \leq i, j \leq K, \bar{Q}(s) = \Lambda P \circ \bar{G}(s).$

Obviously, the process $I(t), t \geq 0$ is a continuous Markov chain on S with rate matrix $Q = Q(\infty)$. The matrix Q is defined as $Q = \|q_{ij}\|, 0 \leq i, j \leq K, q_{ij} = \lambda_i p_{ij}, i \neq j, q_{ii} = \lambda_{ii} p_{ii} - \lambda_i$. Further we will assume that the process $I(t)$ is irreducible with the limiting distribution $\pi_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(I(t) = i)$. The queueing system is stable iff

$$\sum_{i=0}^K \pi_i (c_i + \sum_{j=0}^K \lambda_i p_{ij} m_{ij}) = \pi(C + \Lambda P \circ M)e = \pi(C + \Gamma)e < 0.$$

The matrix operation $A \circ B$ denotes the matrix with (i, j) -th element is equal to $a_{ij} b_{ij}$. If the stability condition holds there exists a limiting distribution

$$F_i(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(X(t) \leq x, I(t) = i),$$

$x \geq 0, i \in S$ of the bivariate stochastic process $\{X(t), I(t)\}$.

The LST $\phi(s)$ of the vector $F(X) = (F_0(x), F_1(x), \dots, F_K(x))$

$$\phi(s) = sF(0)C(sC - \bar{Q}(s))^{-1} \quad (1)$$

is derived in [1].

We shall assume from now that $\Lambda = \lambda\Lambda^0$. As the main process we shall consider the fluid content $X(t)$ in steady state. Our goal is to find the asymptotic behavior of the process $X(t)$ under heavy traffic condition when $\epsilon = \pi(C + \lambda\Gamma^0)e \rightarrow 0$. To avoid unnecessary complication with minor details we consider the following specific problem settings: all parameters except for λ are fixed, and λ increases in such a way that $\epsilon \rightarrow 0$, or $\lambda \rightarrow \lambda_0$ and $\lambda_0 = -\pi C e / \pi \Gamma^0 e$.

The set of equations with respect to unknown a_0, a_1, \dots, a_K :

$$Qa = (\pi(C + \Gamma)e)e - (C + \Gamma)e \quad (2)$$

always has a solution, since the stationary distribution π is orthogonal to the right side of this equation. We will define a matrix A and a matrix R . The matrix A is defined by the rows and columns with numbers $1, 2, \dots, K$ of the matrix Q . The first row and the first column of matrix R are equal to zero vectors, and next K rows and K columns form matrix A^{-1} . Then a matrix QR looks as follows: the first row is $(0, -\pi_1/\pi_0, \dots, -\pi_K/\pi_0)$, and

the first column is a zero vector, and the next elements form the identity matrix, and for any vector $x = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ we have

$$xQR = x - x_0\pi/\pi_0. \quad (3)$$

The next equation

$$(a_0, a_1, \dots, a_K) = R((\pi(C + \Gamma)e)e - (C + \Gamma)e) \quad (4)$$

define the solution to the equation (2) when $a_0 = 0$.

3. The main results

The next theorem gives the mean value of a fluid level in steady state.

Theorem 1 *The mean value fluid level EX in steady state is given by the formula $EX = (\pi\Lambda P \circ Ve/2 + \pi(C + \Gamma)a - F(0)Ca) / (-\pi(C + \Gamma)e)$ where a is a solution to (2).*

Proof. Let us consider the LST $\phi(s)$ of the vector

$$(F_0(x), F_1(x), \dots, F_K(x)) = F(x)$$

defined by the equation (2) $\phi(s)(sC - \overline{Q}(s)) = sF(0)C$. After some algebraic manipulations of equation (2) we get the main equation for the next study.

$$\phi(s)Q = \phi(s)(sC + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s))) - sF(0)C, \quad (5)$$

where $G = \overline{G}(0)$ and multiplying both sides of the equation (3) from the right by the vector $e = (1, 1, \dots, 1)^T$, we have

$$F(0)Ce = \phi(s) \left(C + \Lambda P \circ \frac{G - \overline{G}(s)}{s} \right) e \quad (6)$$

After we let $s \rightarrow 0$, and taking into account that $\phi(0) = \pi$, and

$$\lim_{s \rightarrow 0} (G - \overline{G}(s)) / s = M \text{ we get } F(0)Ce = \pi(C + \Gamma)e.$$

Now, differentiating (3) with respect to s at the point $s = 0$ we have

$$(EX_0, EX_1, \dots, EX_K)(C + \Gamma)e = -\frac{\pi\Lambda P \circ Ve}{2}, \quad (7)$$

where $EX_i = E(X(t), I(t) = i)$ in steady state, $i = 0, 1, \dots, K$. Multiplying both sides of (3) by the vector a which is a solution to (2) we obtain

$$\phi(s)Qa = s\phi(s) \left(C + \Lambda P \circ \frac{G - \overline{G}(s)}{s} \right) a - sF(0)Ca.$$

After differentiating this equation and setting $s = 0$ we get

$$(EX_0, EX_1, \dots, EX_K)Qa = -\pi(C + \Gamma)a + F(0)Ca \quad (8)$$

Now, summing (3) and (3) we obtain EX . Thus, the theorem is proved.

Theorem 2 *Under heavy traffic assumptions, the random variables $-\epsilon X(t)$ and $I(t)$ are asymptotically independent and random variable $-\epsilon X(t)$ is asymptotically exponential with the mean*

$$N = (\pi\lambda_0\Lambda^0 P \circ V)/2 + \pi(C + \lambda_0\Lambda^0 P \circ M)a^0,$$

where a^0 is a solution to the equation (2) at $\lambda = \lambda_0$.

Proof: In order to find the asymptotic behavior of the stationary distribution of the process $\{X(t), I(t)\}$ we will consider the main equation (3). From (3) follows the next equation

$$\phi(s)(sC + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s)))e - s\epsilon = 0. \quad (9)$$

From (3), multiplying it by the matrix R , which was introduced earlier, we get the equation

$$\phi(s)QR = \phi(s)(sC + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s)))R - sF(0)CR. \quad (10)$$

From (2), it follows $\phi(s)QR = \phi(s) - \pi\phi_0(s)/\pi_0$. Then the equation (3) could be written in the following form

$$\phi(s) = \pi\phi_0(s)/\pi_0 + \phi(s)(sC + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s)))R - sF(0)CR. \quad (11)$$

Substituting $\phi(s)$ from (3) for $\phi(s)$ in the right hand side of the equation (3) we obtain

$$\phi(s) = \frac{1}{\pi_0}\pi\phi_0(s) (E + (sC + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s)))R) + sY(s), \quad (12)$$

where $Y(s) =$

$$s\phi(s) ((C + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s)))R)^2 - F(0)CR (E + (sC + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s))))).$$

Substituting $\phi(s)$ from (3) for $\phi(s)$ in (3) we can express $\phi_0(s)$ as follows

$$\phi_0(s) = \pi_0 \frac{A(s)}{B_1(s) + B_2(s)}, \text{ where} \quad (13)$$

$$A(s) = \epsilon s - sY(s) (sC + \Lambda P \circ (G - \overline{G}(s))) e \quad (14)$$

$$B_1(s) = \epsilon s + s^2 \pi \Lambda P \circ \frac{G - Ms - \bar{G}(s)}{s^2} \quad (15)$$

$$B_2(s) = s^2 \pi \left(C + \Lambda P \circ \frac{G - \bar{G}(s)}{s} \right) R \left(C + \Lambda P \circ \frac{G - \bar{G}(s)}{s} \right) e \quad (16)$$

Now, replacing s by $-\epsilon s$ in the equations (3), (3), (3), and letting $\epsilon \rightarrow 0$ and pointed out that

$$Y(-\epsilon s) \rightarrow 0, \frac{G - \bar{G}(-\epsilon s)}{-\epsilon s} \rightarrow M, \frac{\bar{G}(-\epsilon s) - G + M(-\epsilon s)}{(-\epsilon s)^2} \rightarrow V/2$$

we will have

$$A(-\epsilon s)/(-\epsilon^2 s) \rightarrow 1, B_1(-\epsilon s)/(-\epsilon^2 s) \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \pi s \lambda_0 \Lambda^0 P \circ Ve,$$

$$\begin{aligned} B_2(-\epsilon s)/(-\epsilon^2 s) &\rightarrow -\pi (C + \lambda_0 \Lambda^0 P \circ M) R^0 (C + \lambda_0 \Lambda^0 P \circ M) e = \\ &= \pi (C + \lambda_0 \Lambda^0 P \circ M) a^0, \end{aligned}$$

where from (2) follows that a^0 is a solution to (2) and R^0 are defined for $\lambda = \lambda_0$. Combining these equations with (3) we get that there exists

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_0(-\epsilon s) = \frac{\pi_0}{1 + Ns}, \text{ and } N = \frac{1}{2} \pi \lambda_0 \Lambda^0 P \circ Ve + \pi (C + \lambda_0 \Lambda^0 P \circ M) a^0.$$

Finally, from (3) we obtain

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(-\epsilon s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi \phi_0(-\epsilon s) / \pi_0 = \pi / (1 + Ns)$$

which implies the results of the theorem. Thus, the theorem is proved.

4. Conclusion

We studied the fluid level in a fluid model introduced in [1]. We used the analytical approach introduced in [2] and derived that the scaled fluid level converges to an exponentially distributed random variable in heavy traffic. This limit random variable is independent of the state of the environment.

References

1. *Tzenova E., Adan I. J. B. F., Kulkarni V. G.*, Fluid models with jumps // Stochastic models. — 2005. — Vol. 21, no. 1. — P. 37–56.
2. *Falın G., Falın A.* Heavy traffic analysis of $M|G|1$ type queueing systems with Markov modulated arrivals // TOP. — 1999. — Vol. 7, no. 2. — P. 279–291.

UDC 681.5

Control system for automated operation of a globally distributed telecommunications network

V. V. Efimov*, D. A. Shchemelinin†

* *St. Petersburg Polytechnic University, Polytekhnicheskaya 29, St. Petersburg, Russia, 195251*

† *RingCentral Inc., San Mateo, CA, USA, 94404*

Abstract. A globally distributed computing system providing a telecommunications cloud service under 99.999% SLA usually consists of a set of components, designed to execute a dedicated function, such as user authorisation, data storage, data analysis, media conversion, etc. Total number of remote servers is up to tens of thousands. Such complex service requires efficient operations tools to run Event Management, Incident Management, Change Management, Problem Management. This paper provides study on control system for automated operation of a globally distributed telecommunications network using well-known tools such as monitoring tool, log collector, configuration management database and other as sensors, controllers and actuators.

Keywords: cloud service, telecommunications network, configuration management, CMDB, control system, automation.

1. Introduction

An efficient operation of a globally distributed computing system and resource planning requires specialised software tools, such as a tool for automated resources allocation (compute, storage, network bandwidth), service restoration [4], deployment of software updates on all layers of the technology stack (firmware, OS, application).

Thus, the specialised software tools are usually divided into two categories: a) business applications aimed for enterprise resource planning (ERP tools) and b) information system operation tools, designed to execute following functions: 1. Deployment of software updates as part of SDLC, including critical security patches; 2. Control and monitoring of computing system capacity [5]; 3. Update of operating systems, running both on virtual and hardware machines; 4. Data and virtual machines backup and restoration in case of system failure; 5. Authentication, authorisation and access control

It is a common practice among IT companies providing cloud computing services to use specialised monitoring and management software. It significantly reduces the number of manual repetitive tasks, reduces number of incidents cases by human errors, therefore, making operation of a cloud service more reliable. [1]

The analysis of specialised software tools for automated operation of a cloud computing system in big IT companies [2] showed that in most cases the implementation of such tools was 'ad-hoc', was done with no

strategy, which led to the situation, when a company had to deal with big number of heterogeneous software tools with incompatible API, which blocked standartization of operation processes.

To prevent such a situation, the control system for automated operation of a globally distributed computing system is introduced as a universal, vendor independent solution.

2. Main section

A typical information system consists of computing units and informational links with flows of data. Besides this, each information system has its function and clients using its service under service level agreement. A monitoring system is used to achieve the service level agreement.

Implementation of a specialised monitoring software tool is always considered a complex project, part of general automation of operations. It should be considered that there are several types of data, needed to be collected for further analysis, independent of monitoring system used:

- Health data from remote computing units, including CPU utilisation, network availability, business applications status
- Application activity log, including error log
- Versions of operating systems, third-party software and business applications, deployed in each computing unit and their comparison with planned values

Fig. 1 shows the introduced control system, which consists of well-known components.

Sensors:

- Health data and log collectors are scalable components with function to collect and generalise data from remote monitoring agents, located in virtual machines of any type. The collector of remote data should guarantee acquisition of data and its delivery to centralised monitoring system.
- Time-series database stores full array of data from sensors and is aimed to serve queries for historical data in real time

Actuators:

- Configuration Management Database (CMDB) has data on system topology (units and links) as well as unit operation statuses
- Automated Deployment System (ADS) deploys additional computing units for capacity extension and during ongoing maintenance

Controllers are based on ITIL best practices [6]:

- Change Management - assures a change is reviewed, approved and communicated to stakeholders
- Incident Management - minimises system impact through escalation and coordination of restoration activities
- Release Management - plan and schedule for roll-out of software updates as part of SDLC

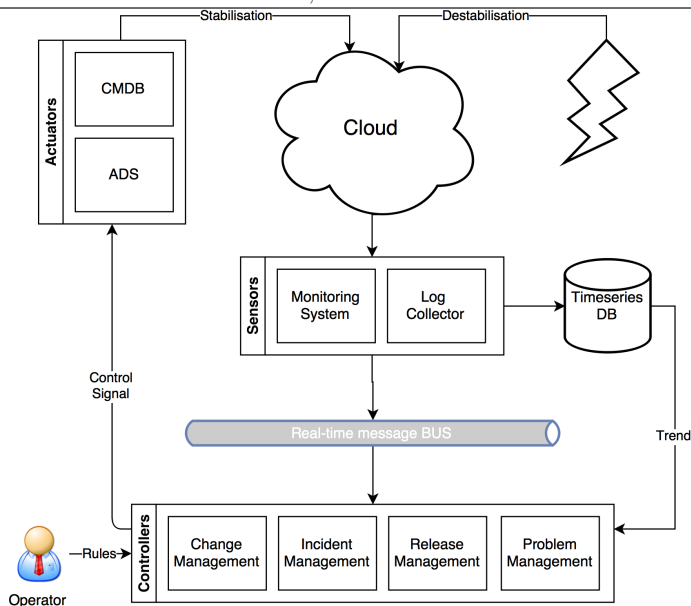


Figure 1. Control system for automated operation of globally distributed computing system

- Problem Management - prevents chronic problems from repeating through identification of the root cause, tracking of a permanent fix from development to roll-out to production

Operator configures controllers, providing machine-readable rules of operation.

In order to enable the above components to work together in the control system, following requirements have to be met:

- Sensors, including monitoring system are required to perform distributed data collection and processing from several nodes;
- Each specialised software tool has to have an API for integration with other tools;
- The tools need to use CMDB as a single authoritative point of data;
- The tools need to support software development lifecycle by supporting changes in the globally distributed computing system under operation, such as software updates, addition of new components, topology change;
- Scalability up to tens of thousands of remote hosts and hundreds of thousands of remote checks;

- Dynamic configuration of monitoring items including set up of thresholds;
- Anomaly detection based on historical monitoring data;
- Monitoring of globally distributed computing systems and geographical redundancy;

3. Conclusions

A universal, vendor independent control system for operation of globally distributed computing system was introduced. It uses well-known specialised software tools as its elements, introducing requirements to enable them to work as the system. This control system supports perspective control scenarios, which are currently under development, such as:

- Incident prediction based on dynamic performance patterns and response time measurements in different week days and time of a day;
- Fully automatic operation of a computing system due to ability to adopt to dynamic performance requirements;
- Visualisation of a computing system topology in real time to show dependencies between the system elements.

Acknowledgments

This work is implemented at and is partially supported by the International RingCentral Company [3]

References

1. *Atzmueller M., Oussena S., Roth-Berghofer T.* Enterprise Big Data Engineering, Analytics and Measurement. — IGI Global, 2016.
2. *Kucherova K. N., Mescheryakov S. V., Schemelinin D. A.* Comparative analysis of monitoring systems for globally distributed computing systems // System Analysis in Engineering and Control: XX international conference. — SPbSTU, 2016. — P. 303-309.
3. RingCentral Inc. — <http://ringcentral.com>
4. *Ardulov Y., Mescheryakov S. V., Schemelinin D. A.* Monitoring and remediation of cloud services based on 4R approach // 41st International IT capacity and performance conference, San Antonio, 2015.
5. *Mescheryakov S. V., Schemelinin D.A.* Capacity management of Java-based business applications running on virtualised environment // Annual international conference of the computer measurement group, 2013.
6. ITIL Service Operations. — <https://ru.wikipedia.org/wiki/ITIL>

UDC 519.1,519.2

The number of vertices of fixed degree in the preferential attachment model with choice

Y. Malyshkin*

* *Tver State University,
Sadovij per. 35, Tver, 170002, Russia*

Abstract. The preferential attachment models are widely used to describe different web and social network (random) graphs. We concentrate on some generalizations of these models. Namely, a random tree under consideration is constructed in the following way. Let $d(1), d(2), \dots$ be i.i.d. integer-valued random variables. At each step n a new vertex is introduced. Then we select $d(n)$ vertices, chosen from the old vertices with probabilities proportional to their degrees and conditionally independent given $d(n)$, and connect new vertex to the vertex from the sample with largest degree. In preferential attachment without choice $d(n) = 1$ for all n . We establish the upper class law of the iterated logarithm for the number of vertices of degree k at step n . The proof employs results of stochastic approximation theory along with analysis of specified martingales and system of the equations describing an evolution of the model.

Keywords: random trees, stochastic approximation, preferential attachment.

1. Introduction

In the present work, we study how the addition of choice affects the Mori's preferential attachment model. Let describe the max-choice Mori's preferential attachment tree model. This model is a time-indexed inductively constructed sequence of trees, built in the following way. First, fix number $\beta > -1$ and distribution of a random variable d with values in \mathbb{N} . These are the parameters of our model. Consider set of vertices $V = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$. Define a sequence of random trees $\{T_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, by the following inductive rule. Let T_1 be the one-edge tree which consists of vertices v_1 and v_2 and an edge between them. Given T_n , we construct T_{n+1} by adding one vertex and drawing one edge in the following way. First, we add a vertex v_{n+2} to T_n . So, for the set $V(T_{n+1})$ of vertices of T_{n+1} we get $V(T_{n+1}) = \{v_i, i = 1, \dots, n+2\}$. Note that $\sum_{v_i \in V(T_n)} \deg_{T_n} v_i = 2n$, where $\deg_{T_n} v_i$ is the degree of v_i in T_n . Second, we draw an edge between v_{n+2} and $Y_n \in V(T_n)$, which we choose by the rule describe below. So, for the set $E(T_{n+1})$ of edges of T_{n+1} we get $E(T_{n+1}) = E(T_n) \cup \{v_{n+2}, Y_n\}$. The randomness of T_{n+1} given T_n is due to randomness of Y_n . Order the set $V(T_n)$ by the vertices degrees in T_n . In other words, $V(T_n) = \{v_{(1)}^n, \dots, v_{(n+1)}^n\}$, $\deg_{T_n} v_{(i)}^n \leq \deg_{T_n} v_{(i+1)}^n$. Let

The presented work was performed under the State Assignment N3.8032.2017/BCh of the Ministry of Science and Education of Russia.

$\vartheta_j(n)$ denote the position of vertex v_j in ordered set $\{v_{(1)}^n, \dots, v_{(n+1)}^n\}$, i.e. $v_j = v_{(\vartheta_j(n))}^n$ and if $\deg_{T_n} v_i = \deg_{T_n} v_j$ and $i < j$, then $\vartheta_i(n) < \vartheta_j(n)$. Consider i.i.d. random variables $\{U_n^i\}_{n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}}$, distributed uniformly on $[0, 1]$. Define random variables $X_n^i, i \in \mathbb{N}$ with values in $V(T_n)$ as follow. Let $X_n^i = v_{(1)}^n$ if $U_n^i \leq \frac{\deg_{T_n} v_{(1)}^n + \beta}{(2+\beta)n + \beta}$ and $X_n^i = v_{(j)}$, $1 < j \leq n + 1$, if $\sum_{l=1}^{j-1} \frac{\deg_{T_n} v_{(l)}^n + \beta}{(2+\beta)n + \beta} < U_n^i \leq \sum_{l=1}^j \frac{\deg_{T_n} v_{(l)}^n + \beta}{(2+\beta)n + \beta}$. Let d_1, d_2, \dots be i.i.d. random variable distributed as d . Finally, we take Y_n as the vertex among $X_n^1, \dots, X_n^{d_n}$ with the largest degree. In the case of a tie, choose the vertex with the largest index.

Remark 1 Since T_{n+1} is well defined by Y_1, \dots, Y_n , all its parameters are \mathcal{F}_{n+1} measurable.

Remark 2 Prove of the main result would require analysis of event $A_n = \{(U_1^n, \dots, U_{d_n}^n) \in D_{d_n}\}$ for random sets $D_i \in \mathbb{R}^i, i \in \mathbb{N}$. Note that if $|D_i|$ (here $|B|$ stands for the Lebesgue measure of B) does not depend on \mathcal{F}_n , then A_n does not depend on \mathcal{F}_n .

Let formulate our theorem. Let $N_k(n)$ be the number of vertices of degree k in tree T_n , $Z_k(n) = \frac{N_k(n)}{n}$ and $W_k(n) = (Z_1(n), \dots, Z_k(n))$. Theorem 5.1 of [1] states that there is a point $\rho_k^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ and a positively defined symmetric matrix $B_k = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$ (both depends on β and distribution of d) such that $n^{1/2}(W_k(n) - \rho_k^*)$ converge in distribution to normal distribution $N(0, B)$ as $n \rightarrow \infty$. We will prove an upper class law of the iterated logarithm for variables $N_k(n)$.

Theorem 3 Let $\mathbb{E}d^2 < \infty$. Then, for any $k \in \mathbb{N}$ one has

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{N_k(n) - nx_k^*}{\sqrt{2b_{k,k}n \ln \ln n}} \right| \leq 1 \quad a.s.$$

2. Proof of the main result

For $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$, define functions

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \quad h_1(x_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(d = m) \left(x_1 \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)^m, \quad h_k(x_1, \dots, x_k) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(d = m) \left(\left(\sum_{j=1}^k x_j \frac{(j + \beta)}{2 + \beta} \right)^m - \left(\sum_{j=1}^{k-1} x_j \frac{(j + \beta)}{2 + \beta} \right)^m \right), \end{aligned}$$

$$f_k(x_1, \dots, x_k) = h_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) - h_k(x_1, \dots, x_k),$$

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k) - x_k.$$

As it is shown in [1],

$$b_{1,1} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(d = m) \left(x_1^* \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)^m,$$

$$\mathbb{P}(N_1(n+1) - N_1(n) = 1 | \mathcal{F}_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(d = m) \left(1 - \left(\frac{N_1(n)(1 + \beta)}{(2 + \beta)n + \beta} \right)^m \right)$$

and

$$\begin{aligned} b_{k,k} &= h_k(x_1^*, \dots, x_k^*) + h_{k-1}(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*), \\ g_k(x_1^*, \dots, x_k^*) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(N_k(n+1) - N_k(n) = 1 | \mathcal{F}_n) = h_{k-1} \left(\tilde{Z}_1(n), \dots, \tilde{Z}_k(n) \right), \tag{2}$$

$$\mathbb{P}(N_k(n+1) - N_k(n) = -1 | \mathcal{F}_n) = h_k \left(\tilde{Z}_1(n), \dots, \tilde{Z}_k(n) \right) \tag{3}$$

for $k > 1$, where

$$\tilde{Z}_i(n) = \frac{N_i(n)}{n + \frac{\beta}{2+\beta}} = Z_i(n) \frac{1}{1 + \frac{\beta}{n(2+\beta)}}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Also there are random \mathcal{F}_n -measurable sets $D_n^+(k, m), D_n^-(k, m) \subset [0, 1]^m$, $m, k, n \in \mathbb{N}$, such that

$$\{N_k(n+1) - N_k(n) = 1\} = \{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_n^+(k, d_n)\},$$

$$\{N_k(n+1) - N_k(n) = -1\} = \{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_n^-(k, d_n)\}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} N_k(n+1) - N_k(n) &= \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_n^+(k, d_n)\} \\ &\quad - \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_n^-(k, d_n)\}. \end{aligned}$$

Hence, from (2), (3) and definition of h_k , we have for $k > 1$

$$|D_n^-(k, m)| = \left(\left(\sum_{j=1}^k \tilde{Z}_j(n) \frac{(j + \beta)}{2 + \beta} \right)^m - \left(\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{Z}_j(n) \frac{(j + \beta)}{2 + \beta} \right)^m \right),$$

$$|D_n^+(k, m)| = \left(\left(\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{Z}_j(n) \frac{(j + \beta)}{2 + \beta} \right)^m - \left(\sum_{j=1}^{k-2} \tilde{Z}_j(n) \frac{(j + \beta)}{2 + \beta} \right)^m \right)$$

and for $k = 1$ we get $|D_n^-(1, m)| = 0$, $|D_n^+(1, m)| = 1 - \left(\frac{N_1(n)(1+\beta)}{(2+\beta)n+\beta}\right)^m$.

Let $\alpha_{1,m}^- = 0$, $\alpha_{1,m}^+ = \left(1 - \left(x_1^* \frac{(1+\beta)}{2+\beta}\right)^m\right)$ and for $k > 1$

$$\alpha_{k,m}^- = \left(\left(\sum_{j=1}^k x_j^* \frac{(j+\beta)}{2+\beta} \right)^m - \left(\sum_{j=1}^{k-1} x_j^* \frac{(j+\beta)}{2+\beta} \right)^m \right),$$

$$\alpha_{k,m}^+ = \left(\left(\sum_{j=1}^{k-1} x_j^* \frac{(j+\beta)}{2+\beta} \right)^m - \left(\sum_{j=1}^{k-2} x_j^* \frac{(j+\beta)}{2+\beta} \right)^m \right).$$

Introduce random \mathcal{F}_n -measurable sets $D_*^+(k, m, n)$ and $D_*^-(k, m, n)$ such that $|D_*^+(k, m, n)| = \alpha_{k,m}^+$, $|D_*^-(k, m, n)| = \alpha_{k,m}^-$. Moreover if $|D_n^+(k, m)| > \alpha_{k,m}^+$ then $D_*^+(k, m, n) \subset D_n^+(k, m)$, if $|D_n^+(k, m)| \leq \alpha_{k,m}^+$, then $D_n^+(k, m) \subset D_*^+(k, m, n)$, if $|D_n^-(k, m)| > \alpha_{k,m}^-$, then $D_*^-(k, m, n) \subset D_n^-(k, m)$ and if $|D_n^-(k, m)| \leq \alpha_{k,m}^-$, then $D_n^-(k, m) \subset D_*^-(k, m, n)$. Let

$$X_k(n) = \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_*^+(k, d_n, n)\} \\ - \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_*^-(k, d_n, n)\} - x_k^*.$$

Note that due to Remark 2 and formula (2) we have that $X_k(n)$, $n \in \mathbb{N}$ are i.i.d. random variables and

$$\mathbb{E}X_k(n) = g_k(x_1^*, \dots, x_k^*) = 0.$$

Also $\mathbb{E}X_k(n)^2 = b_{k,k}$. Hence, by the law of the iterated logarithm for i.i.d. random variables

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_k(i)}{\sqrt{2b_{k,k}n \ln \ln n}} \right| = 1 \quad a.s.$$

Introduce random variables

$$\epsilon_k(n) = \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_n^+(k, d_n) \setminus D_*^+(k, d_n, n)\} \\ - \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_*^+(k, d_n, n) \setminus D_n^+(k, d_n)\} \\ - \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_n^-(k, d_n) \setminus D_*^-(k, d_n, n)\} \\ + \mathbf{1}\{(U_n^1, \dots, U_n^{d_n}) \in D_*^-(k, d_n, n) \setminus D_n^-(k, d_n)\}.$$

Therefore,

$$N_k(n+1) - N_k(n) - x_k^* = X_k(n) + \epsilon_k(n).$$

To complete the proof we need to estimate $\sum_{i=1}^n \epsilon_k(i)$. We give the sketch of the proof. Define

$$\begin{aligned} S_i(n) &= N_i(n+1) - N_i(n) - x_i^*, \quad Y_k(n) = (S_1(n), \dots, S_k(n)), \\ F_k(x_1, \dots, x_k) &= (f_1(x_1), \dots, f_k(x_1, \dots, x_k)), \\ A_k(n) &= (\epsilon_1(n), \dots, \epsilon_k(n)), \quad \widetilde{W}_k(n) = (\widetilde{Z}_1(n), \dots, \widetilde{Z}_k(n)). \end{aligned}$$

We get

$$\mathbb{E}(Y_k(n)|\mathcal{F}_n) = F_k(\widetilde{Z}_1(n), \dots, \widetilde{Z}_k(n)) - F_k(x_1^*, \dots, x_k^*).$$

Consequently,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_k(n)|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(Y_k(n)|\mathcal{F}_n) = \nabla F_k \left(\widetilde{W}_k(n) - \rho_k^* \right) + O(\|\widetilde{W}_k(n) - \rho_k^*\|^2) \\ &= \nabla F_k \left(\frac{1}{n} \left((N_1(0), \dots, N_k(0)) + \sum_{i=1}^n Y_k(i) \right) \right) + O(\|\widetilde{W}_k(n) - \rho_k^*\|^2). \end{aligned}$$

Since all eigenvalues of ∇F_k are negative, $A_k(n)$ could be decomposed as $A_k(n) = A_k^1(n) + A_k^2(n)$ (with $\epsilon_i(n) = \epsilon_i^1(n) + \epsilon_i^2(n)$, $i = 1, \dots, k$) where a.s. $A_k^1(n)$ is of opposite sign to $\sum_{i=1}^n Y_k(i)$ and $\mathbb{E}(A_k^2(n)|\mathcal{F}_n) = 0$. Therefore, by the law of the iterated logarithm for martingales (see, e.g., [2]) $\sum_{i=1}^n A_k^2(i)$ is of order $(n^{1/2} \ln \ln n)^{1/2}$. Thus,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n S_k(i) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n S_k(i) + \epsilon_k^1(n) + \epsilon_k^2(n) + X_k(n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n S_k(i) + \epsilon_k^1(n) \right| + |\epsilon_k^2(n)| + |X_k(n)| \leq \left| \sum_{i=1}^n S_k(i) \right| + |\epsilon_k^2(n)| + |X_k(n)| \\ &\leq \dots \leq \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_k^2(i) \right| + \left| \sum_{i=1}^n X_k(i) \right|. \end{aligned}$$

We come to the desire statement.

References

1. *Malyshkin Y.* Preferential attachment combined with random number of choices // ArXiv 1612.02229. — <https://arxiv.org/abs/1612.02229>.
2. *Stout W.* A martingale analogue of Kolmogorov's law of iterated logarithm // Z. Vahr. Verw. Geb. — 1970. — Vol. 15. — P. 279–290.

On the Rate of Convergence to stationarity of the Unreliable Queueing Network with Dynamic Routing

E. Yu. Kalimulina*

* *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences,
Russian Academy of Sciences,
Profsoyuznaya st. 65, Moscow, 11799, Russia*

Abstract. In this paper we consider a Jackson type queueing network with unreliable nodes. The network consists of $m < \infty$ nodes, each node is a queueing system of M/G/1 type. The input flow is assumed to be the Poisson process with parameter $\Lambda(t)$. The routing matrix $\{r_{ij}\}$ is given, $i, j = 0, 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m r_{0i} \leq 1$. The new request is sent to the node i with the probability r_{0i} , where it is processed with the intensity rate $\mu_i(t, n_i(t))$. The intensity of service depends on both time t and the number of requests at the node $n_i(t)$. Nodes in a network may break down and repair with some intensity rates, depending on the number of already broken nodes. Failures and repairs may occur isolated or in groups simultaneously. In this paper we assumed if the node j is unavailable, the request from node i is sent to the first available node with minimal distance to j , i.e. the dynamic routing protocol is considered in the case of failure of some nodes. We formulate some results on the bounds of convergence rate for such case.

Keywords: dynamic routing, queueing system M/G/1, unreliable network, Jackson network, convergence rate.

1. Introduction

Queueing systems and networks are the most suitable mathematical tools for modelling and performance evaluation of complex systems such as modern computer systems, telecommunication networks, transport, energy and others [1-3]. A large number of research papers study queueing systems with unreliable servers. [4]. The less ones consider queueing networks.

This work is motivated by a practical task of modelling of modern telecommunication networks. We propose a modification of the open queueing network model, based on the principle of dynamic routing.

There are some math research papers where queueing networks with dynamic routing were considered. Queueing networks with constant routing matrix were considered in papers [5,6], each node there was modelled as a multichannel system, principle of dynamic routing was a random selection of a channel at the node. There are some researches on unreliable queueing networks. The common idea for modifying the routing matrix is blocking of requests and repeated service after nodes recovery. The result related to the rate of convergence to the stationary distribution for unreliable network is given in [7,8]. In this paper we give some results for unreliable networks similarly as it was done in [8], but we propose another

approach to the modification of the route matrix $\{r_{ij}\}$ and consider in a more general model for network nodes.

2. Process Definition

It is assumed that nodes at the network are unreliable and may break down or repair. Failures can be both individual and in a group (as in models in [7, 8]). We will refer to $M_0 = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ as the set of nodes, where "0" is the "external node" (entry and exit from the network) and to $D \subset M$ as the subset of failed nodes, $I \subset M \setminus D$ the subset of working nodes, nodes from I may break down with the intensity $\alpha_{D \cup I}^D(n_i(t))$. Nodes from $H \subset D$ may recover with the intensity $\beta_{D \setminus H}^D(n_i(t))$. It is assumed the routing matrix (s_{ij}) is given. Additionally the adjacency matrix for our network (s_{ij}) is considered, where $s_{ij} = 1$, if $r_{ij} \neq 0$, and $s_{ij} = 0$, if $r_{ij} = 0$.

Now we can consider all possible paths of the network graph. To find them we need to calculate the following matrix: $(s_{ij})^2, (s_{ij})^3, \dots, (s_{ij})^m$, $m < \infty$, $(s_{ij})^1 = (s_{ij})$. The matrix $(s_{ij})^m$ has the following property: the element in row i and column j is the number of paths from node i in the unit j of length m (including $(m - 1)$ transitional nodes).

We take the following routing scheme for network nodes from the subset D (we call it as "dynamic routing without blocking"). Only transitions to $M_0 \setminus D$ are possible for nodes from D :

$$r_{ij}^D = \begin{cases} 0, & \text{if } j \in D, i \neq j, \\ r_{ij} + r_{ik}/s_{ik}^p, & \text{if } j \notin D, k \in D \\ & \exists i \rightarrow j \rightarrow i' \rightarrow j' \rightarrow \dots \rightarrow i'' \rightarrow k : \\ & \underbrace{s_{ij}^1 * s_{ji'}^1 * s_{i'j'}^1 * \dots * s_{i''k}^1}_{p+1} \neq 0, \\ & \text{where } p = \min\{2, 3, \dots, m : s_{ik_{k \in D}}^p \neq 0\}, \\ r_{ii} + \sum_{\substack{k \in D \\ s_{ik}^p = 0 \forall 1 < p \leq m}} r_{ik}, & \text{if } i \in M_0 \setminus D, i = j, \end{cases}$$

where s_{ik}^p - element of a matrix $(s_{ij})^p$.

The routing matrix is changed according to the same way for the input flow:

$$\Lambda r_{0j}^D = \begin{cases} \Lambda r_{0j}, & \text{if } j \in M \setminus D, \\ \Lambda(r_{0j} + r_{0k}/s_{0k}^p * \underbrace{(s_{0j}^1 * s_{j'j'}^1 * s_{j''j''}^1 * \dots * s_{i''k}^1)}_{p+1}), & \\ \text{if } j \notin D, k \in D \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Further we will refer to the modified routing matrix as $R^D = (r_{ij}^D)$, the intensities of failures and recoveries depend on the state of nodes and does not depend on network load and are defined as $\alpha(D, I)$, and $\beta(D, H)$.

A more general model than in [7] is considered for network nodes. It is assumed that each network node is a queueing system type $M/G/1$. The system's dynamic will be described by a continuous in time random process $X(t)$ taking values from the following enlarged state space \mathbb{E} :

$$\tilde{\mathbf{n}} = ((n_1, z_1), (n_3, z_2), \dots, (n_m, z_m), D) \in \{\mathbb{Z}_+ \times \{R_+ \cup 0\}\}^m \times |D| = \mathbb{E},$$

where n_i is the number of requests at the node i , z_i - time elapsed from the beginning of service for the current request i , $|D|$ - the cardinality of set D . Intensity rates $\mu_i(n_i, z_i)$ depend on both the number of requests at nodes $n_i(t)$ and time $z_i(t)$, time elapsed from the beginning of service for the current request at time t .

The following transitions in a network are possible:

$$\begin{aligned} T_{ij}\tilde{\mathbf{n}} &:= (D, n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1 \dots, n_m), \\ T_{0j}\tilde{\mathbf{n}} &:= (D, n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_m), \\ T_{i0}\tilde{\mathbf{n}} &:= (D, n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_m), \\ T_H\tilde{\mathbf{n}} &:= (D \setminus H, n_1, \dots, n_m), \\ T^I\tilde{\mathbf{n}} &:= (D \cup I, n_1, \dots, n_m). \end{aligned}$$

Definition 1 *The Markov process $\mathbf{X} = (X(t), t \geq 0)$ is called unreliable queueing network if it's defined by the following infinitesimal generator:*

$$\begin{aligned} \tilde{Q}f(\tilde{\mathbf{n}}) &= \sum_{j=1}^m [f(T_{0j}\tilde{\mathbf{n}}) - f(\tilde{\mathbf{n}})]\Lambda(t)r_{0j}^D \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [f(T_{ij}\tilde{\mathbf{n}}) - f(\tilde{\mathbf{n}})]\mu_i(n_i(t), z_i(t))r_{ij}^D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{I \subset M} [f(T^I \tilde{\mathbf{n}}) - f(\tilde{\mathbf{n}})] \alpha(D, I) + \sum_{H \subset M} [f(T^I \tilde{\mathbf{n}}) - f(\tilde{\mathbf{n}})] \beta(D, H) \\
& + \sum_{j=1}^m [f(T_{j0} \tilde{\mathbf{n}}) - f(\tilde{\mathbf{n}})] \mu_j(n_i(t), z_i(t)) r_{j0}^D.
\end{aligned}$$

3. Main results

Like the classical Jackson network the existence of a stationary distribution for an unreliable network with dynamic routing may be proved.

Theorem 1 *It is assumed the following conditions for unreliable network from the Definition 1*

$$1) \inf_{n_j, t} \mu_j(n_j, z_j) > 0 \quad \forall j,$$

2) *time of service and time between new arrivals are independent random variables,*

3) *routing matrix R^D is reversible,*

then the stationary distribution for unreliable networks is defined by formulae

$$\pi(\tilde{\mathbf{n}}) = \pi(D, n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{1}{C} \frac{\psi(D)}{\phi(D)} \prod_{i=1}^m \frac{1}{C_i} \frac{\lambda_i^{n_i}}{\prod_{k=1}^{n_i} \mu_i(k)}$$

where

$$C_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{\prod_{y=1}^n \mu_i(y)}, \quad \lambda_i = \sum_{j=0}^m \Lambda * r_{ji}.$$

The main result for the convergence rate is formulated in terms of the spectral gap for unreliable queueing network. The preliminary notations and results on the spectral gap: there is a Markov process $\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0)$ with the matrix of transition intensities $Q = [q(\mathbf{e}, \mathbf{e}')]_{\mathbf{e}, \mathbf{e}' \in \mathbb{E}}$, with stationary distribution π and an infinitesimal generator given by

$$\mathbf{Q}f(\mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{e}' \in \mathbb{E}} (f(\mathbf{e}') - f(\mathbf{e})) q(\mathbf{e}, \mathbf{e}').$$

The usual scalar product on $L_2(\mathbb{E}, \pi)$ is defined as

$$\langle f, g \rangle_{pi} = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}} f(\mathbf{e}) g(\mathbf{e}) \pi(\mathbf{e}).$$

The spectral gap for \mathbf{X} is

$$Gap(\mathbf{Q}) = \inf \{ -\langle f, \mathbf{Q}f \rangle_{\pi} : \|f\|_2 = 1, \langle f, \mathbf{1} \rangle_{\pi} = 0 \}.$$

The main result for a network is formulated in the following theorems:

Theorem 2 *If \mathbf{X} is a Markov process with infinitesimal generator \mathbf{Q} , it is assumed that \mathbf{Q} is bounded, the minimal intensity of service is strictly positive $\inf_{n_j, t} \mu_j(n_j, z_j) > 0$ and the routing matrix (r_{ij}^D) is reversible, then $\text{Gap}(\mathbf{Q})$ is strongly positive, if the following condition is true: for any $i = 1, \dots, m$, for the birth and death process, corresponding to the node i with parameters λ_i and $\mu_i(n_i, z_i)$ the spectral gap is strictly positive $\text{Gap}_i(\mathbf{Q}_i) > 0$.*

Theorem 3 *If \mathbf{X} is a Markov process with a bounded infinitesimal generator \mathbf{Q} , positive minimal intensity of service $\inf_{n_j, t} \mu_j(n_j, z_j) > 0$ and reversible routing matrix (r_{ij}^D) , then $\text{Gap}(\mathbf{Q}) > 0$ iff for any $i = 1, \dots, m$, the distribution $\pi = (\pi_i), i \geq 0$ has light tails, i.e. the following condition $\inf_k \frac{\pi_i(k)}{\sum_{j>k} \pi_i(j)} > 0$.*

References

1. *Lakatos L., Szeidl L., Telek M.* Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications. — Springer Science & Business Media, Mathematics, 2012. — 388 p.
2. *Daigle J.* Queueing Theory with Applications to Packet Telecommunication. — Springer Science & Business Media. Technology & Engineering, Jan 16, 2006. — 316 p.
3. *Thomasian A.* Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems // ACM Comput. Surv. — 2014. — Vol. 47, no. 2. — Article No. 17. — dx.doi.org/10.1145/2628913.
4. *Jain M., Sharma G.C., Sharma R.* Unreliable server M/G/1 queue with multi-optional services and multi-optional vacations // International Journal of Mathematics in Operational Research. — 2013. — Vol. 5, no. 2. — P. 145–169.
5. *Vvedenskaya N.D.* Configuration of overloaded servers with dynamic routing // Probl. Inf. Transm. — 2011. — Vol. 47, no. 3. — P. 289–303.
6. *Sukhov Yu.M., Vvedenskaya N.D.* Fast Jackson Networks with Dynamic Routing // Prob. Inf. Transm. — 2002. — Vol. 38, no. 2. — P. 136–153.
7. *Lorek P., Szekli R.* Computable bounds on the spectral gap for unreliable Jackson networks. // Adv. in Appl. Probab — 2015. — Vol. 47. — P. 402–424.
8. *Lorek P.* The exact asymptotic for the stationary distribution of some unreliable systems // arXiv:1102.4707 [math.PR]. 2011.
9. *Chen M.F.* Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory. — Springer, 2005.

UDC 51(091)

Unpublished Manuscripts by G.W. Leibniz Associated with Nondecimal Systems

E. V. Shukhman*, A. E. Shukhman†

* *Orenburg State Pedagogical University,
Gagarina av. 1, Orenburg, 460001, Russia*

† *Orenburg State University,
Pobedy av. 13, Orenburg, 460018, Russia*

Abstract. The paper presents unpublished manuscripts from Leibniz Archive in Hannover on binary fractions and hexadecimal numbers. The research of Leibniz's correspondence and manuscripts shows that he knew the principles of binary fraction representation, could operate them, and was the first who proposed to apply the binary system for calculating transcendental numbers. At the same time to calculate binary fractions he used either division or the method of undetermined digits. Evidently he did not know any efficient algorithm of conversion into binary fractions. Also Leibniz understood the connection between hexadecimal and binary systems, knew the algorithm for converting integers to hexadecimal system, introduced several methods to present hexadecimal digits and suggested the practical use of the hexadecimal system instead of the binary system that nowadays came true in computer science and mathematics.

Keywords: history of mathematics, G. W. Leibniz, unpublished manuscripts, binary system, hexadecimal system.

1. Introduction

The history of the binary and hexadecimal number systems is interesting due to their wide use in theoretical computer science and computer technology. Nondecimal systems have been the subject of research and tool for problem solving in the works of many mathematicians, although not all the results had been published.

The German mathematician and philosopher Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) is considered the founder of binary arithmetic, despite the fact that the English mathematician Thomas Harriot (1560—1621) had used the binary system in his manuscripts long before Leibniz [1].

First time Leibniz introduced the binary arithmetic in his manuscript “De Progressione Dyadica” (About binary progression) dated March 15, 1679 [2]. Leibniz presents the binary representations of numbers from 1 to 100, proposes an algorithm of converting integers into the binary system by means of multiple division by 2 calculating binary digits as remainders, presents examples of addition, subtraction, multiplication and division in the binary system.

Leibniz's article in 1703 [3] was the first publication on the binary system. However in this article Leibniz doesn't present algorithms for converting integers into the binary system and back. Leibniz points out

where $p = n = 1, m = l = 0$.

Similarly Leibniz finds the period 001 for $\frac{1}{7}$ adding 3 values: the fraction without shift, with 1 digit shift and with 2 digits shift (using the equality $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 1$). He uses the method to calculate the period 000111 for $\frac{1}{9}$.

On following page (LH XXXV, 3b, 5, p.12) Leibniz tries to apply his method for the binary representation of $\frac{1}{11}$. Denoting sequential digits of the fraction $\frac{1}{11}$ as $\gamma\beta\alpha zy x w u t v q p m l$, Leibniz expresses the sum of 3 expressions: the fraction, the fraction with 1 digit left shift, and the fraction with 3 digit left shift. In fact he expressed the sum $\frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \frac{8}{11} = 1 = 0, 1111111\dots$ This gave him the possibility to calculate the digits $l=1, m=0, n=1, p=1, q=1, r=0, s=1, t=0, u=1, w=0, x=0, y=0$. At this point he stops the calculation, apparently having found an error (in fact $u=0$).

In other note (LH XXXV, 3b, 5, p. 89) Leibniz tries to obtain binary expressions for fractions through multiplication of the already obtained ones. For example, he tries to calculate the expression for $\frac{1}{15}$ as $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$. Obtaining the erroneous intermediate outcome 0,0000111100001111 he converts it into the known right answer 0,000100010001 adding some periodic fraction. Then he tries to obtain a binary representation for $\frac{1}{9}$ as $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, but only the first 9 digits after the point are correct.

In "Pro fractionibus dyadica exprimendi" (Binary fraction expressions, LH XXXV, 3b, 5 p. 2-3) dated December 20, 1699, Leibniz begins with the binary expression for $\frac{1}{3}$, then introduces the notation (b) (b in brackets) for the number he calls "anti- b ", i.e., if $b = 0$, then $(b) = 1$ and vice versa. Further on, he deduces some formulae for (b) , trying to use them for calculating products of binary fractions in a generalized form.

The note "Tentata expressio circuli per progressionem dyadicam" (The attempt to express the circle through binary progression, LH XXXV 12, 2, p.97) describes the initial steps of conversion $\frac{\pi}{4}$ into the binary system. Leibniz tries to compare the sum of several terms of the progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}\dots$ with the sum of the series for $\frac{\pi}{4}$. So he deduces the following inequalities $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. In the next step Leibniz makes a mistake and arrives at the wrong conclusion $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, so that the digit 0 must be placed in second position after the point. Of course his further attempts to evaluate the sum of the series were unsuccessful. In another note without a title (LH XXXV, 13, 3, p.33-34) Leibniz expressed $\pi/4$ as a sum of a double row, in which the denominators are powers of two, but no simplification has reached in the summation.

3. The hexadecimal system in unpublished manuscripts by G. W. Leibniz

It's worth remarking that Leibniz was working on the hexadecimal system at the same time as on the binary in "Sedecimal progression" dated 1679 (Hexadecimal progression, LH XXXV, 13, 3 p. 23). For the greater part the note deals with the rules for converting decimal numbers to the hexadecimal number system. Leibniz presents the algorithm of conversion using the example of 1679 (the year of writing the note).

The algorithm is based on sequential division by the powers of 16: 4096, 256, 16, 1. First the smallest power 256 is chosen which doesn't exceed the initial number. The division of 1679 by 256 gives 6 which is the first digit of the number. Leibniz notices that hexadecimal presentation of 1679 has 6 in hundreds. The remainder 143 is divided by 16, given 8 and a new remainder 15. Thus Leibniz obtained three digits 6, 8, 15.

The digits between 10 and 15 can be represented in different ways. At the top of this page Leibniz uses sequential Latin letters *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, *s*. He skipped the letter *o*, probably not to be mistaken for zero. Next Leibniz represents the digits between 10 and 15 through the initial letters at the time used for musical notes (*Ut*, *Re*, *Mi*, *Fa*, *Sol*, *La*). Leibniz also introduced the names for hexadecimal numerals from 1 to 30 combining German words and affixations with Latin names for musical notes. For example, the decimal number 42 in hexadecimal system is presented as *2u* and pronounced *utzwanzig*. On the reverse page Leibniz converts the powers of 10 through 100000 into the hexadecimal number system. He obtains $10 = u$, $100 = 64$, $1000 = 3s8$, $10000 = 2710$, $100000 = 186u0$. On the same page he checks the result, multiplying 100 by 10 in hexadecimal system (i.e. 64 by *u*).

In the other notes (LH XXXV, 3b,17 p. 4r and LH XXXV, 3b, 5 p. 77) Leibniz introduces special signs for hexadecimal digits with values from 0 to 15 based on their binary representation. So the digit with value 11 has a binary presentation 1011 and is shown as the 4-component sign written in a column: dash, dot, dash and one more dash. Leibniz uses one more way for writing digits in a line. He writes a digit as the union of several arcs. An arc is convex upwards if it correspond to binary 1, an arc is convex downwards if it correspond to 0.

Here Leibniz also points out that the binary numeration is theoretical but the hexadecimal numeration is more practical. Note that Leibniz's prediction that the practical applications of the hexadecimal and the binary systems are possible in the search for regularities in the sequences of digits of transcendental numbers is a genius because in 1995 the Bailey-Borwein-Plouffe (BBP) formula was discovered [6], which allows you to calculate any number of the number π in hexadecimal notation without having to calculate the previous digits:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right).$$

Thus, the hexadecimal system has advantages over the decimal system just to calculate the number π . Similar formulas exist for some constants, for example, $\ln 2$.

4. Conclusions

The study of Leibniz's correspondence and manuscripts shows that he knew the principles of binary fraction representation, could operate them, and was the first who proposed to apply the binary system for calculating transcendental numbers. At the same time Leibniz did not know any efficient algorithm of conversion into binary fractions. So analyzing Leibniz's manuscripts we can see his understanding of the connection between hexadecimal and binary systems. He also knew the algorithm for converting integers to hexadecimal system, introduced several methods to present hexadecimal digits and suggested the practical use of hexadecimal system instead of binary system that nowadays came true in computer science and mathematics.

Acknowledgments

The work is partially supported by Russian Foundation for Basic Research (grant No 15-33-01300) and German Academic Exchange Service (DAAD).

References

1. *Shirley J. W.* Binary numeration before Leibniz // American Journal of Physics. — 1951. — Vol.19. — P. 452-454.
2. *Greve J., Gumin H., Hochstetter E.* Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins — Berlin, München: SiemensAG, 1966. — P. 42-47.
3. *Leibniz G. W.* Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoises de Fohy // Histoire de l'Académie Royale des Sciences année MDCCIII. Avec les mémoires de mathématiques. — 1705. — P. 85-89.
4. *Zacher H. J.* Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz: Ein Beitr. zur Geschichte des binären Zahlensystems — Frankfurt a. M., Klostermann, 1973. — 384 p.
5. *Shukhman E. V.* About non-decimal representations of fractional numbers in works by mathematicians in XVII-XVIII centuries // Istoriya nauki i tekhniki. — 2013. — No. 1. — P. 3-16.
6. *Bailey D. H., Borwein P. B., Plouffe S.* On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants // Mathematics of Computation. — 1997. — Vol. 218. — No. 66. — P. 903-913.

The idea of order in geometry, algebra, combinatorics in the 17th-19th centuries

V. G. Alyabieva*

** Department of Mechanics and Mathematics,
Perm State University,
Bukireva str. 15, Perm, 614990, Russia*

Abstract. Leibniz formulated the idea of constructing a special geometry - geometria situs, in which the basic relation is mutual arrangement of figures. He called the corresponding calculus an analysis situs. In the 19th century, Leibniz's ideas about the analysis situs were developed and implemented in combinatorics, projective geometry, and algebra. In combinatorics and projective geometry configurations have been actively investigated, substitutions have been analysed in algebra. Poincare created a new discipline, which he called first "Analysis Situs", and then "Topology".

Keywords: analysis situs, order, Leibniz, combinatorics, geometria situs, Tactic, tactical configuration, Sylvester, graph.

1. Introduction

Leibniz's idea of geometria situs stimulated research in combinatorics, projective geometry, and the theory of finite groups. Sylvester J.J. proposed to create a section of mathematics that studies the arrangement of elements, and called it Tactic. He referred to it combinatorics, number theory and algebra. The idea of Leibniz contributed to the emergence of topology, the graph theory; integration of sciences that study discrete structures; development of modern discrete mathematics.

2. Leibniz on analysis situs

Leibniz's idea of analysis situs arose from his thinking about universal science based on a universal language. Rene Descartes formulated the idea of universal science in "Discours de la methode. Pour bien conduire sa raison, et chercher la verite dans les sciences", 1637. One of the appendices of this work was "Geometry" which contained general rules of a scientific method. He proposed to reduce all mathematics to algebra. Descartes desire for mathematization of natural science, for the creation of universal science, was supported by Leibniz. Leibniz's idea of analysis situs refers to a new understanding of "geometric algebra". It played an exceptional role in the development of geometry and mathematics in general. In a letter to Ch. Huygens dated September 8, 1679, Leibniz wrote: "... I am no longer content with algebra, insofar as it gives neither the shortest nor the most elegant constructions in geometry. That is why... I think we still need another, properly geometrical linear analysis that will directly

express for us situation, just as algebra expresses magnitude. I believe I have a method of doing this, and that we can represent figures and even machines and movements with characters, just as algebra represents numbers or magnitudes. I am sending you an essay that seems to me important ..." (Leibnizens mathematische Schriften, Bd.2, S. 17-25).

3. From analysis situs to geometry on a chessboard

In a letter to P. R. de Montmort written on 17th January 1718 G. W. Leibnitz wrote (in French): "The game called Solitaire pleases me much. I take it in reverse order. That is to say, instead of making a configuration according to the rules of the game, which is to jump to an empty place and remove the piece over which one has jumped, I thought it was better to reconstruct what had been demolished by filling an empty hole over which one has leaped". Following Leibniz, L. Euler (1758) and Ch. A. Vandermonde (1771) were engaged in geometry on the chessboard. Euler solved the knight's tour problem – the problem of finding a sequence of moves of a knight on a chessboard such that the knight visits every square only once. Euler considered square, cross-shaped and rectangular boards. Vandermonde generalized the knight's tour problem to the three-dimensional case.

4. Development of the ideas of Leibniz in the XIX century geometry

The geometric ideas of Leibniz were further developed in the 19th century in the construction of regular star polyhedra, projective geometry, and topology. Lazare Carnot called projective geometry "Geometrie de position" (1803). Ch. Staudt in "Geometrie der Lage" (1847) showed that the essence of projective geometry is the study of mutual arrangement of points, lines, and planes. Louis Poincot contributed a lot to the development of analysis situs. In the Institut de France in 1809, he read a report "Sur les polygones et les polyedres" [1]. Poincot conducts his research within the framework of the geometry of the situation, the founder of which was Leibniz. Poincot builds a regular star polyhedron. Since the time of the Greeks, five types of convex polyhedra were known: a cube, a tetrahedron, an octahedron, a dodecahedron, an icosahedron. Kepler J. in his main work "Harmonice mundi libri V" (1619) pointed out that two more types of regular polyhedra exist, both of which are star polyhedra. Poincot rediscovered Kepler star polyhedra and constructed two more regular star polyhedra: a large dodecahedron and a large icosahedron. After the publication of the work by Poincot, the regular stellating polyhedra became known as Kepler-Poincot regular bodies. A. Cauchy (1813) in the "Recherches sur les Polyedres" proved that the regular Kepler-Poincot bodies complete the list of all regular stellating polyhedra. In 1882 Stringham found all six regular convex polyhedra of four-dimensional space.

In 35 years, Poincaré turned to the ideas of the "Memoire" of 1810 again. In his work "Reflexions sur les principes fondamentaux de la theorie des nombres" [2], he gives an overview of some new ideas in mathematics and notes that the achievements of modern geometry and number theory go hand in hand. If number theory considers numbers in themselves, studies their properties, independent of the way they are represented and acted on, and rational algebra (or universal arithmetic), starting from ordinary numbers (rational numbers), extends to anything, the higher algebra, in turn, in the theory of equations is predicated on the theory of order and combinations. Geometry – the science of spatial or extended forms – like algebra is divided into two parts: one part studies proportionality and measurement, the other part considers the order and arrangement of objects in space, regardless of their size and shape. This branch of geometry is called the geometry of position, which, according to Poincaré, includes the theory of stellating polygons and polyhedra.

5. Leibniz and combinatorics

Leibniz's idea of analysis situs laid foundation for the theory of configurations, both geometric and combinatorial. Combinations, arrangements, and permutations are the simplest combinatorial configurations. The combination is the basic operation in the theory of configurations. It is not strictly mathematical, but belongs to general intellectual abilities, such as the abilities to classify and create. The essence of combinatorics was first discovered by Leibniz, who also described its area of application. Leibniz regarded combinatorics as part of the art of invention. He performed his first combinatorial calculations in 1666 in his dissertation "Dissertatio de arte combinatoria", and then throughout his life repeatedly returned to reflections on the role of combinatorics in the system of scientific knowledge.

Leibniz's views on the high importance of combinatorial art were shared by J.J. Sylvester. Sylvester wrote several articles on combinatorial configurations, the first one being the article of 1844 "Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregation", in which he discussed the rules for the formation of different sets and systems of sets from elements of a given n -set. He wrote: "The present theory may be considered as belonging to a part of mathematics which bears to the combinatorial analysis much the same relation as the geometry of position to that of measure, or the theory of numbers to computative arithmetic; number, place, and combination being the three intersecting but distinct spheres of thought which all mathematical ideas admit of being referred" [3]. To the ideas of 1844, Sylvester returned in 1861: "I have elsewhere given the general name of Tactic to the third pure mathematical science, of which order is the proper sphere, as is number and space of the other two. Syntax and Groups are each of them only special branches of tactic" [4], and in "Concluding paper on Tactic": "Tactic appears to me to constitute the main stem from which all others, including even arithmetic itself, are derived

and secondary branches. The key to success in dealing with the problems of this incipient science (as I suppose of most others) must be sought for in the construction of an apt and expressive notation, and in the discovery of language by force of which the mind may be enabled to lay hold of complex operations and mould them into simple and easily transmissible forms of thought" [5]. However, Sylvester did not realize this wide idea, limited to solving particular problems. A. Cayley shared Sylvester's views on tactic. In 1864, Cayley proposed in his article "On the notion and boundaries of algebra" to distinguish between two types of operations in algebra: tactical and logistic: "Although it may not be possible absolutely to separate the tactical and the logistical operations; for in (at all events) a series of logical operations, there is always something that is tactical, and in many tactical operations (e.g. in the Partition of Numbers) there is something which is logistical, yet the two great divisions of Algebra are Tactic and Logistic. Or if, as might be done, we separate Tactic off altogether from Algebra, making it a distinct branch of Mathematical Science, then (assuming in Algebra a knowledge of all the Tactic which is required) Algebra will be nothing else than Logistic" [6]. In 1896 the American mathematician Moore E.H. in the article "Tactical memoranda" [7] introduced the term "tactical configuration". In his article Moore considers numerous examples of tactical systems and proves their properties. A generalization of the concept of "tactical configuration" in XX was the concept of a block design.

6. Topology and graph theory

In 1895 Henry Poincare published his topological work "Analysis Situs". A new subdiscipline in mathematics was born. In the introduction to his first major topology paper, the Analysis situs, Poincare (1895) announced his goal of creating an n-dimensional geometry: "...geometry is the art of reasoning well from badly drawn figures; however, these figures, if they are not to deceive us, must satisfy certain conditions; the proportions may be grossly altered, but the relative positions of the different parts must not be upset". Because "positions must not be upset", Poincare sought what Leibniz called Analysis situs, a geometry of position, or what we now call topology. He cited as precedents the work of Riemann and Betti, and his own experience with differential equations, celestial mechanics, and discontinuous groups.

The founder of the graph theory is Euler, who in 1736 published a solution to the problem of the Konigsberg bridges. Only 200 years later appeared Denes Konig's textbook "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" (1936). Konig's book was a major factor in the growth of interest in graph theory worldwide. It was eventually translated into English. Many of the topics dealt with by Konig are to be found in almost any text on the subject, for example, Euler trails, Hamiltonian cycles, mazes, trees, directed graphs and factorisations, but unlike many later authors,

Konig considers infinite as well as finite graphs. In the Preface to his book, Konig discusses whether graph theory is a branch of topology or a branch of combinatorics. He argues that it is the latter: "... mainly because we attribute to the elements of a graph - vertices and edges - no geometrical content at all: the vertices are arbitrary distinguishable elements, and an edge is nothing other than a unification of its two endpoints. This abstract point of view - which Sylvester emphasized in 1873 - will be strictly maintained in our representation, with the exception of some examples and applications". Serious development of graph theory was in the second half of the 20th century.

7. Conclusions

Leibniz's idea of Analysis Situs contributed to the development of geometry, combinatorics, the emergence of graph theory and the creation of topology in the 19th century. Combinatorics and graph theory in the twentieth century formed the core of discrete mathematics. In connection with powerful development of computer technology, discrete mathematics is now becoming the most demanded section of mathematics and demonstrates the true triumph of Leibniz's ideas

References

1. *Poinsot L.* Memoire sur les polygones et les polyedres // Journal de l'Ecole polytechnique. — 1810. — Vol. 4, no. 10. — P. 16–48.
2. *Poinsot L.* Reflexions sur les priencipes fondamentaux de la theorie des nombres // Journal de mathematiques pures et appliquees. — 1845. — Vol. 10. — P. 1–101.
3. *Sylvester J.J.* Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregation // Philosophical magazine and journal of science. — 1844. — V. 24. — P. 285–296.
4. *Sylvester J.J.* Note on the historical origin of the unsymmetrical Six-valued Function of six Letters. // Philosophical magazine and journal of science. — 1861. — Vol. 21. — P. 369–377.
5. *Sylvester J.J.* Concluding paper on Tactic // Philosophical Magazine. — 1861. — Vol. 22. — P. 45–54.
6. *Cayley A.* On the notion and boundaries of algebra // Quarterly Journal of pure and applied mathematics. — 1864. — Vol. 6. — P. 382–384.
7. *Moore E.H.* Tactical memoranda. I-III // American journal of mathematics. — 1896. — Vol. 18. — P. 264–303.

UDC 519.214.5

Generalized Stein equation on extended class of functions

N. A. Slepov*

* *Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. The Stein method is a powerful tool of obtaining convergence rates in limit theorems of probability theory and thus is widely used in various contexts. The deep results on this way were established by C.Stein, L.Chen, L.Goldstein, G.Reinert, Q-M.Shao, I.Tyurin and other researchers. To employ the mentioned method one has to derive (and study) the Stein equation for distribution P of a random variable X . It involves, along with a specified operator T defined on a class of functions \mathcal{F} , the law of another random variable Y as well (to evaluate distance, in a sense, between the laws of X and Y). The aim of our work is to provide a generalization of the Stein equation allowing to use the functions f for which the classical Stein's identity is not satisfied. We also show that our equation permits to characterize the law of X , i.e. this equation holds for all f in the extended \mathcal{F} if and only if $Law(Y) = P$. In the operator theory framework one can observe that a so-called density approach is a particular case of our method. Due to the modification proposed we can estimate a distance between the target distribution P of a random variable X and a distribution of Y when $supp(Y)$ is not a subset of $supp(X)$. Moreover, we can write the characteristic Stein equations for random variables with non-interval support. We illustrate some advantages of the introduced method by a number of interesting examples.

Keywords: the Stein equation, Stein's identity, density approach, Renyi theorem.

1. Introduction

The Stein method is a technique to estimate the distance between cumulative distribution functions proposed by C. Stein in 1972 (see [1]) in the context of normal approximation. He considered the normalized sums of m -dependent random variables to establish the convergence rate in the corresponding central limit theorem. Later this method was adapted to approximation with a number of other probability distributions, such as Poisson, exponential, binomial distributions and etc. The important results were obtained by L. Chen, A. Barbour, A.N. Tikhomirov, L. Goldstein, G. Reinart, I.S. Tyurin and other researchers. More specific information concerning the main results can be found in the paper [?].

Let us recall some key points of the method mentioned above.

Firstly, one must select a so-called *target* distribution, a distance to which will be estimated. Suppose random variable X has the target distribution. The chosen law of X is associated with an operator \mathcal{T}_X such

that *the Stein equation*

$$\mathcal{T}_X f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(X) \quad (1)$$

has a solution f for each function h from a set \mathcal{H} . Then for a random variable Y , function $h \in \mathcal{H}$ and corresponding solution f of the equation (1), it follows that

$$\mathbb{E}\mathcal{T}_X f(Y) = \mathbb{E}h(Y) - \mathbb{E}h(X). \quad (2)$$

We assume the mathematical expectations above exist. The class of functions \mathcal{H} should be chosen in such a way that the supremum over \mathcal{H} for the modulus of the right-hand side of (1) determines a metric to find the distance between distributions of X and Y . This construction proved to be very successful, since it allows the researchers to obtain results for the Kolmogorov, Kantorovich and total variation distances, some ideal metrics (of order not more than one) and others.

In order to find a candidate for operator \mathcal{T}_X , various approaches (such as the method of antisymmetric functions and the L^2 -approach) were developed to write down the so-called *Stein identity*

$$\mathbb{E}\mathcal{T}_X f(X) = 0$$

for a wide class \mathcal{F} of functions f . One can apply Stein's method using such an operator if a solution of the Stein equation exists and lies in \mathcal{F} for each function h from the set \mathcal{H} . Instead, in a number of papers, authors have checked the necessary condition to apply the Stein method:

$$\mathbb{E}\mathcal{T}_X f(Y) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{Law}(X) = \text{Law}(Y). \quad (3)$$

2. Generalized Stein equation

In the paper of Ley et al. [3] the operators

$$\mathcal{T}_X f(x) := \frac{D(f(x)p_X(x))}{p_X(x)}$$

are considered. Here p_X is the density of X by some measure μ (usually the Lebesgue measure or the counting measure on a lattice), the linear operator D has a right inverse operator and does not depend on the density p_X . Under a number of additional assumptions, the statement (1) ("characterization") is proved for this type of operators in the above-mentioned article [3].

It is important to notice that the condition $\text{supp}(Y) \subseteq \text{supp}(X)$ must be satisfied to estimate the distance between the random variables X and Y using operators from Ley et al. [3]. It follows from the next fact for the

proposed operators: the equation (1) is satisfied only on the support of the random variable X that has the target distribution.

In order to generalize the method, consider an equation

$$\mathbb{E}\mathcal{T}_p f(Y) - \mathbb{E}\mathcal{T}_p f(X) = \mathbb{E}h(Y) - \mathbb{E}h(X) \quad (4)$$

for an extended class of functions f on which the Stein identity may not be satisfied, but for these functions the corresponding averaged equation holds.

One can suppose $Df = f'$ in the equation (2) for any random variable with continuously differentiable density and find a family of Stein equations, which coincides with the equations derived in [4] by the density approach.

Employing new equations of the type (2) we can

- 1) remove the condition $\text{supp}(Y) \subseteq \text{supp}(X)$,
- 2) consider X with non-interval support by Lebesgue measure or counting measure on a lattice.

An example to the first point is as follows: an analogue of Renyi's theorem for random variables with non-positive support is proved.

Theorem 1. *Let $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a sequence of m -dependent random variables. Suppose $\mathbb{E}Y_i = \frac{1}{\lambda}$ and $\text{supp}(Y_i) \subset [a, b]$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Assume that N_p is independent of $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ and has geometric distribution with parameter p . Then $W_p = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{N_p} Y_i$ satisfies*

$$W_p \xrightarrow{d} Z \sim \text{Exp}(\lambda), \quad p \rightarrow 0.$$

More details on Renyi's theorem could be found in [5]. In addition, one can find the similar result for non-negative variables in the article [6].

Now let us to illustrate the second point. Consider lattice distributions with a step δ . The equation

$$\mathbb{E} \left[f(Y) \frac{p_X(Y + \delta)}{p_X(Y)} - f(Y - \delta) \right] = 0$$

characterizes random variables with these distributions in the sense of (1) if there isn't a point x_0 on lattice such that $p_X(x_0) = 0$ and there exist non-zero values $p_X(x)$ for arguments both less and greater than x_0 .

For continuous case, one can consider the equation (2) for X with the density $p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda(a-|x|)}$ on the support $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Thus, (2) is turned into

$$\mathbb{E} [f'(Y) - \lambda \text{sign}(Y) f(Y)] - \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda a} (f(-a) - f(a)) = \mathbb{E}h(Y) - \mathbb{E}h(X). \quad (5)$$

It is possible to show the left-hand side of (2) characterizes random variables with above-mentioned density in the sense of the condition (1).

In this report we discuss the development of a new approach to avoid problems associated with type of support.

3. Characterization involving factorial moment generating functions

Let us turn to the Stein-Tikhomirov method based on determining a characteristic function by a differential equation. For instance, in the paper [7] nonclassical central limit theorem with new conditions was proved using the equation

$$f'(t) = -\sigma^2 t f(t).$$

In our work a similar method is developed for factorial moment generating functions. For a Poisson distribution with parameter λ , generating function $f(z) = e^{\lambda(z-1)}$, $z \in [0, 1]$, is the unique solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} f' - \lambda f = 0, \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

We introduce the operator

$$A_\lambda f = f' - \lambda f,$$

where $\lambda = \left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=1} = \mathbb{E}\xi$. Thus, λ is equal to the mathematical expectation of a random variable, which produces argument for operator A_λ . So, λ under the operator can be omitted.

Equation

$$Af(t) \equiv 0 \text{ for } t \in [0, 1]$$

characterizes the factorial moment generating function of a Poisson random variable in a class of random variables with the same mathematical expectation.

Application of the operator leads to the following new result.

Theorem 2. *Let random variables $\{\xi_{n,k}\}_{k=1}^n$ be a triangular array of row-independent random variables with supports in \mathbb{Z}_+ and satisfy the condition $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\xi_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda < \infty$.*

Then

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |Af_{n,k}(t)| = 0 & \Rightarrow \sum_{k=1}^n \xi_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi \sim \text{Pois}(\lambda), \\ 2) \quad \sum_{k=1}^n \xi_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi \sim \text{Pois}(\lambda) & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |Af_{n,k}(t)| = 0, \\ \max_{k=1, \dots, n} \mathbb{E}\xi_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \end{aligned}$$

where $f_{n,k}$ - factorial moment generating function of $\xi_{n,k}$.

References

1. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables // Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 2: Probability Theory. — Berkley, Calif.: University of California Press, 1972. — P. 583–602.
2. *Barbour A.D., Chen L.H.* Stein's (magic) method / arXiv:1411.1179. — 2014.
3. *Ley C., Reinert G., Swan Y.* Stein's method for comparison of univariate distributions // Probab. Surveys. — 2017. — Vol. 14. — P. 1–52.
4. *Stein Ch., Diaconis P., Holmes S., Reinert G.* Use of exchangeable pairs in the analysis of simulations // Stein's Method / Ed. by Persi Diaconis, Susan Holmes. — Beachwood, Ohio, USA: Institute of Mathematical Statistics, 2004. — Vol. 46. — P. 1–25.
5. *Kalashnikov V.* Geometric sums: bounds for rare events with applications: risk analysis, reliability, queueing. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
6. *Peköz E. A., Röllin A.* New rates for exponential approximation and the theorems of Renyi and Yaglom // Ann. Probab. — 2011. — Vol. 39, no. 2. — P. 587–608.
7. *Formanov Sh.K.* On the Stein-Tikhomirov method and its applications in nonclassical limit theorems // Discrete Math. Appl. — 2007. — Vol. 17, no. 1. — P. 23–36.

A Model for Network Virus Protection Based on Regenerative Process

Yu. Grishunina*, L. Manita*

** National Research University Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Russia*

Abstract. We construct a mathematical model of antivirus protection of local area networks. The model belongs to the class of regenerative processes. To protect the network from the external attacks of viruses and the spread of viruses within the network we apply two methods: updating antivirus signatures and reinstallings of operating systems (OS). Operating systems are reinstalled in the case of failure of any of the computers (non-scheduled emergent reinstalling) or at scheduled time moments. We consider a maximization problem of an average unit income. The cumulative distribution function (CDF) of the scheduled intervals between complete OS reinstallings is considered as a control. We prove that the optimal CDF has to be degenerate, i.e., it is localized at a point τ .

Keywords: regenerative process, average unit profit, Laplace transform, virus propagation.

1. Introduction

The choice of strategy of antivirus protection is one of the key factors that determine effectiveness of the functioning of the local networks. Damage or loss of information that is commercial or state secret can lead to million losses and security threats. One of the main methods of solving the problems of the qualitative estimation of the possible risks and simulations of the virus propagation is mathematical modeling. Since propagation of computer viruses happens similarly as propagation of an epidemics in the population, epidemiological methods and terminology are widely used. To take random effects into account, stochastic epidemiological models were developed for modeling the propagation of viruses in a computer network (see, e.g., [1]- [4]). In these models it is assumed that the spread of viruses occurs only as a result of the interaction of infected and uninfected nodes within the network and does not take into account external virus attacks. In this paper we consider a stochastic model of virus protection of local area networks on the assumption that any computer can become infected due to the following two reasons: external attacks of viruses and spreading within network. We propose approach to optimization of the strategy of the antivirus protection is based on the fact that nowadays the only way to guarantee extermination of the viruses in the network is OS reinstall (the full system regeneration). Existence of regeneration points allows to construct a mathematical model based on a regenerating stochastic process. Our research continues the investigation of the problem of antivirus protection strategy discussed in [5].

2. Functioning of the local network with antivirus protection

We consider a local network (LAN) consisting of N computers (nodes). The antivirus protection is realized in two ways: by updating antivirus signatures and by reinstalling the OS. A node calls the update base at independent exponentially distributed with parameter β random time moments. The durations of the update install are independent exponential random variables (i.e.r.v.) of parameter γ . This type of antivirus protection does not guarantee the extermination of the viruses; if the node is infected, then it becomes “healthy” after the update with probability p_0 and remains infected with probability $(1 - p_0)$. OS reinstall happens on all the nodes of the network at the same moment of time and all the computers become “healthy” after it, i.e. the whole network regenerates. The expected reinstall time equals T . The decision about next scheduled OS reinstall is taken at the moment of the system regeneration according to a CDF $G(t)$. During the call for the signature update or OS reinstall the node is not working so no infection by viruses can take place.

Infection of a running node can happen in 2 ways: during successful virus attacks from outside the network or by interacting with infected nodes within the network. External virus attacks occur at time intervals that are i.e.r.v. of parameter λ . For any pair of nodes intervals between communications are i.e.r.v. of parameter α . We divide the viruses in 3 groups based on the damage. Type I viruses cause hidden damage: corrupt, destroy or transmit information. Type II viruses cause explicit system failures, so continuing work is impossible. Type III viruses combine features of both abovementioned types: they can cause hidden damage and system failures. We assume that moments of failure caused by infection by viruses of the types II and III are i.e.r.v. of parameter μ . Let p_1, p_2, p_3 be portions of the virus attacks of corresponding types: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

The network functions as follows. At the initial moment of time the decision about the scheduled OS reinstall is taken according to the CDF $G(t)$. If there are no node failures until that moment, then the OS is reinstalled. If there is a node failure, then the reinstall happens at the failure moment. After OS reinstall the network is completely regenerated, and the decision about the next OS reinstall is taken accordingly to $G(t)$. The network work restarts at that moment.

The network makes profit from the income of every functioning node minus the antivirus protection expenses and the losses caused by failures. The profit is determined by the following parameters: c_0 – profit of one node per unit of time; c_1 – hidden damage caused by viruses per unit of time; c_2 – cost of the OS reinstall per unit of time; c_3 – cost of the new antivirus software installed during OS reinstall.

We consider a problem of finding a CDF $G(t)$ such that the average profit made by the network per time unit is maximal for networks working for long enough time.

3. Mathematical model

The mathematical model of the described LAN is a stochastic process $X(t) = (\xi(t), \eta(t), r(t))$, where $\xi(t)$ is the number of infected but working nodes at moment t , $\eta(t)$ and $r(t)$ – number of noninfected and infected nodes respectively, on which the updates are installed at the moment t . Obviously, the state space \mathcal{X} of the process $X(t)$ is defined as follows: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \{\mathcal{R}\}$, where $\mathcal{X}_0 = \{(i, j, k) : i, j, k = \overline{0, N}, i + j + k \leq N\}$. Here the event $\{X(t) = \mathcal{R}\}$ means that the OS reinstall happens at moment t . Since at the moment of the OS reinstall the network regenerates completely and restarts, the moments of the end of the OS reinstall (the moments of the transition of the process $X(t)$ from the state \mathcal{R} to $(0, 0, 0)$) are regeneration points of the stochastic process $X(t)$.

The regeneration period consists of 2 intervals: time until the next scheduled or emergency (in case of failure of one of the nodes) OS reinstall and the time of the reinstall itself. Let Z be the duration of the regeneration period, τ – time between the update time and the beginning of the scheduled OS reinstall, $G(t) = P(\tau < t)$, Y – time between the update time and an emergency OS reinstall. Then

$$EZ = E \min(\tau, Y) + T = \int_0^\infty E \min(t, Y) dG(t) + T$$

Let $Q_{i,j,k}(t)$ be the mean time before OS reinstall under condition that $X(t)$ starts from the state (i, j, k) and at the moment t the OS reinstall is scheduled. Note that $E \min(t, Y) = Q_{0,0,0}(t)$. By virtue of the total expectation formula we get a system of integral convolution-like equations with respect to $Q_{i,j,k}(t)$:

$$Q_{0,0,0}(t) = te^{-N(\lambda+\beta)t} + \int_0^t Ne^{-N(\lambda+\beta)x} \left[\lambda(x + Q_{1,0,0}(t-x)) + \beta(x + Q_{0,1,0}(t-x)) \right] dx$$

$$Q_{i,j,k}(t) = te^{-\Lambda_{i,j,k}t} + \int_0^t x(p_2 + p_3)i\mu e^{-\Lambda_{i,j,k}x} dx +$$

$$+ \int_0^t \left[\left((N - (i + j + k))\lambda + i\alpha \frac{N - (i + j + k)}{N - (1 + j + k)} \right) (x + Q_{i+1,j,k}(t-x)) \right.$$

$$+ i\beta(x + Q_{i-1,j,k+1}(t-x)) + k\gamma p_0(x + Q_{i,j,k-1}(t-x))$$

$$\left. + k\gamma(1 - p_0)(x + Q_{i+1,j,k-1}(t-x)) + j\gamma(x + Q_{i,j-1,k}(t-x)) \right]$$

$$+ (N - (i + j + k))\beta(x + Q_{i,j+1,k}(t - x)) \Big] e^{-\Lambda_{i,j,k}x} dx,$$

where

$$\Lambda_{i,j,k} = (p_2 + p_3)i\mu + (N - (i + j + k))\lambda + i\alpha \frac{N - (i + j + k)}{N - (1 + j + k)} + (N - (j + k))\beta + (j + k)\gamma$$

Remark 1. $Q_{0,0,0}(t)$ does not depend on $G(t)$.

By $R(Z)$ denote the profit made by the network over one regeneration period. $R(Z)$ consists of incomes of single nodes minus the damage caused by viruses on the interval between regeneration till the OS reinstall, OS reinstall costs. Let $R_{i,j,k}(t)$ be a mean profit of the network from the initial moment till the start of the OS reinstall under condition that X starts from (i, j, k) and time till next scheduled OS reinstall equals t . Then

$$\mathbb{E} R(Z) = \int_0^\infty R_{0,0,0}(t) dG(t) - c_2T - c_3.$$

We get a system of integral convolution-like equations with respect to $R_{i,j,k}(t)$ that is similar to the system for $Q_{i,j,k}(t)$.

Remark 2. $R_{0,0,0}(t)$ does not depend on $G(t)$.

4. Optimal distribution of the intervals between OS reinstalls

Let $S(t)$ be the average profit from the network functioning on the interval $(0; t)$ and $\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t}$. It is known from the regeneration theory [6] that $\rho = \mathbb{E} R(Z) / \mathbb{E} Z$. Hence

$$\rho = \frac{\int_0^\infty R_{0,0,0}(t) dG(t) - c_2T - c_3}{\int_0^\infty Q_{0,0,0}(t) dG(t) + T}$$

Remarks 1 and 2 imply that the functional ρ is a linear fractional with respect to the distribution $G(t)$.

Consider the following optimization problem (\mathcal{Z}_1) : $\rho \rightarrow \max_{\{G(\cdot)\}}$ where $\{G(\cdot)\}$ is the set of distribution functions such that $G(t) = 0$ as $t \leq 0$. Using the theorem about the maximum of a linear fractional functional [6] and remarks 1 and 2, we get the following result:

Theorem. The optimal solution of (\mathcal{Z}_1) (i.e. distribution of τ) is degenerate: $\hat{G}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq r \\ 1, & t > r \end{cases}$.

Corollary. The problem (\mathcal{Z}_1) is equivalent to the problem (\mathcal{Z}_2) :

$$\frac{R_{0,0,0}(r) - c_2T - c_3}{Q_{0,0,0}(r) + T} \longrightarrow \max_{r \geq 0}.$$

For concrete networks the problem (\mathcal{Z}_2) can be effectively resolved. Let $f^*(s) = \int_0^t e^{-st} f(t) dt$ denote the Laplace transform (LT) of $f = f(t)$. First we find the LT R^* and Q^* from systems of linear equations obtained by applying the LT to the integral equations for R and Q . Note that $R^*(s)$ and $Q^*(s)$ will be rational functions and there is no problem in concrete situations to invert the LTs and to find R and Q explicitly. Then maximum points of ρ can be found numerically.

5. Conclusions

We construct a mathematical model of virus protection of LAN on the assumption that infection of a running node can happen in two ways: during successful virus attacks from outside the network or by interacting with infected nodes within the network. We consider two methods to protect the network: updating antivirus signatures and OS reinstallings. OS are reinstalled in the case of failure of any of the computers (non-scheduled emergent reinstalling) or at scheduled time moments. The developed model belongs to the class of regenerative processes. We consider a maximization problem of an average unit profit. We prove that the optimal CDF of the scheduled intervals between complete OS reinstallings has to be degenerate.

References

1. *Kephart J., White S.* Directed-graph epidemiological models of computer viruses // Proceedings of the 1991 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy. — 1991. — P. 343–359.
2. *Mieghem P., Omic J. and Kooij R.* Virus spread in networks // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 2009. — Vol. 17, no.1. — P. 1–14.
3. *Li C., Bovenkamp R., Mieghem P.* Susceptible-infected-susceptible model: A comparison of N -intertwined and heterogeneous mean-field approximations // Physical Review E. — 2012. — Vol. 86, no. 2 — Article ID 026116.
4. *Amador J., Artalejo J.* Stochastic modeling of computer virus spreading with warning signals // Journal of the Franklin Institute. — 2013. — V. 350, no. 5. — P. 1112–1138.
5. *Grishunina Yu., Manita L.* Stochastic Models of Virus Propagation in Computer Networks: Algorithms of Protection and Optimization // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 38, no. 5. — P. 906–909.
6. *Kashтанov V.A., Medvedev A.I.* Reliability theory of the composite systems. — M.: Fizmatlit, 2009.

UDC 519.234.22

On Robust Sequential Parameters Estimating

I. I. Tsitovich^{*†}

** Institute for Information Transmission Problems
(Kharkevich Institute) RAS,*

Bolshoy Karetny per. 19, build.1, Moscow, 127051, Russia

† Faculty of Computer Science,

*National Research University Higher School of Economics,
Myasnitskaya ul., 20, Moscow, 101000, Russia*

Abstract. We study the problem of parameters estimating if there is a slight deviation between the parametric model and real distributions. The estimator is based on suboptimal testing of builded by a special way nonparametric hypotheses. It is proposed a natural for this problem risk function. We found that the risk function has an exponential decrease to the mean number of observations. Numerical results of a comparative analysis our risk function behaviour for proposed estimator and some another estimators are outlined.

Keywords: estimating, robustness, sequential analysis, suboptimality.

1. Introduction

Robust estimation of a statistical model parameters is one of important problems in the statistic. The main problem consists in a rapidly decreasing power of a robust estimator under deviations from the pure parametric model. Our approach is the more strong, additionally we investigate a problem to construct a guaranteeing decision.

One of popular method for a robust estimator construction bases on influence functions [1]. But it is known that a power of a statistical decision depends on a distribution tail. In [2]– [4] there are investigated a problem of robust discriminating of hypotheses and an influence of a tail decreasing on a test power are indicated. Based on modification of the sequential probability ratio test, there are obtained the suboptimal sequential test. It is so that its power converges to the power of asymptotically optimal sequential test when the neighborhood size of the hypothesis converges to 0. In this paper, we apply this method for a robust estimation.

2. Setting of the problem

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and x_1, x_2, \dots be independent identical distributed random variables with values in a subset $X \subset \mathbf{R}$ with the probability distribution \mathbb{P} from a set \mathcal{P} . Let be some nondegenerate measure μ on X (with Borel σ -algebra on X) such that any probability distribution $\mathbb{P} = \mathbb{P}_f$ from the set \mathcal{P} has its density function $f(x)$ with respect to μ .

We suppose that \mathcal{P} has the following structure.

Let $z(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, x) = \log \frac{p(x)}{q(x)}$ and $I(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} z(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, x)$ be the relative entropy (Kullback–Leibler divergence) with usual conventions (logarithms are to the base e , $0 \log 0 = 0$ etc).

C1. It exists a metric d on \mathcal{P} such that I is uniformly continuous on \mathcal{P} under d .

Let \mathcal{P}_0 be a parametric set of densities $f(\theta, x)$ with respect to μ , $\theta \in \Theta$, where Θ is a compact in \mathbf{R}^m and $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, and the set \mathcal{P}_0 be continuous under the metric d . The distribution with the density $f(\theta, x)$ is denoted as \mathbf{P}_θ .

Let us define for $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_0$ a neighborhood $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{P}) = \left\{ \tilde{\mathbf{P}} \right\}$, δ is a positive number, as the subset in \mathcal{P} all distributions $\tilde{\mathbf{P}}$ where $d(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}) < \delta$. Let

$$\mathcal{P}_\delta = \bigcup_{\theta \in \Theta} \mathcal{O}_\delta(\mathbf{P}_\theta).$$

Therefore, the set \mathcal{P}_δ is the δ -neighborhood of the parametric family \mathcal{P}_0 in \mathcal{P} .

We suppose that $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\delta$ for certain $\delta > 0$.

The neighborhoods $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, generate open sets $\mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_\theta) = \mathcal{O}_\delta(\mathbf{P}_\theta) \cap \mathcal{P}_0$ in \mathcal{P}_0 and $\mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, give an open cover of \mathcal{P}_0 and this cover has finite subcovers. Any subcover is described by the set of its neighborhoods centers $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$.

Let us fix a subcover and denote its neighborhoods centers set as $\{\theta_1^0, \dots, \theta_{m_0}^0\}$. The subcover has two characteristics: the accuracy of the parameter estimating

$$\Delta^0 = \max_i \min_{j \in A(i)} |\theta_i^0 - \theta_j^0|$$

and the information distance

$$I_i = \inf_{\mathbf{P} \in \mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_{\theta_i^0})} \inf_{\mathbf{Q} \in \bigcup_{j \in A(i)} \mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_{\theta_j^0})} I(\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

where $A(i)$ is the alternative set of parameters for θ_i^0 and defines as

$$A(i) = \{j : \mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_{\theta_i^0}) \cap \mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_{\theta_j^0}) = \emptyset\}.$$

We have two contradict requirements for the subcover: Δ^0 needs be as large as possible for maximizing I_i and it needs be as small as possible for maximizing accuracy of the parameters estimating.

All $\theta' \in \mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_\theta)$ are undistinguished by the accuracy of the statistical model δ and, therefore, a risk function of the parameter estimation $R(\theta, \theta')$ needs be 0 for $\theta' \in \mathcal{O}'_\delta(\mathbf{P}_\theta)$. By this reason we define the lost function for an estimator $\hat{\theta}$ as

$$R(\hat{\theta}) = \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}_\delta} \mathbf{P}_{\mathbf{P}}(|\theta_{i(\mathbf{P})}^0 - \hat{\theta}| > \Delta). \quad (1)$$

This lost function means that we find guarantee decisions only.

3. Main result

We use the following regularity conditions:

C2. There is $c > 0$ such that $\mathbf{E}_P (z(P, Q, x_i))^2 < c$ for all $P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{P}$.

C3. There exist $t > 0$ and $f > 0$ such that for all $P \in \mathcal{P}$

$$\mathbf{E}_P \left(\sup_{Q \in \mathcal{P}} \exp(-tz(P, Q, x_i)) \right) \leq f.$$

C4. $z(P, Q, x)$ is differentiable w.r.t. x and

$$D = \int_X z_1(x) (a(x)b(x))^{1/2} dx < \infty,$$

where

$$z_1(x) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \left| \frac{\partial z(P, Q, x)}{\partial x} \right|,$$

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \int_{-\infty}^x p(t) \mu(dt) \leq a(x), \quad \sup_{P \in \mathcal{P}} \int_x^{\infty} p(t) \mu(dt) \leq b(x).$$

Let us introduce $L_k(P, Q) = \sum_{i=1}^k z(P, Q, x_i)$.

We perform the following estimator $\tilde{\theta}$. We stop observations at the first moment M such that

$$\max_i \inf_{Q \in A(i)} L_M(P_{\theta_i^0}, Q) > -\log \beta \quad (2)$$

and accept as an estimation $\tilde{\theta} = \theta_r^0$ if (2) holds and r is the value of argmax_i .

Let

$$k(P) = \inf_{Q \in \bigcup_{j \in A(i)} \mathcal{O}_\delta(P_{\theta_j})} I(P, Q), e = \max_i \sup_{Q \in \mathcal{O}_\delta(P_{\theta_i^0})} I(Q, P_{\theta_i^0}),$$

where i such that $P \in \mathcal{O}_\delta(P_{\theta_i})$. If there are several i such that $P \in \mathcal{O}_\delta(P_{\theta_i})$ then we take i such that the respective value $k(P)$ is maximal.

Based on results of [5, 6] we get the following results

Theorem 1. *If $P \in \mathcal{P}_\delta$ is such that $k(P) > e$ then under the conditions C1–C4*

$$\mathbf{E}_P M \leq \frac{|\log \beta|}{k(P) - e} + K \sqrt{|\log \beta|}$$

with the same constant K for all $\beta > 0$ and $P \in \mathcal{P}_\delta$.

Theorem 2. *Under the condition C1*

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \mathbf{P}_{\mathbf{P}}(|\theta_i - \tilde{\theta}| > \Delta) \leq m_0 \beta.$$

From this result follows that the risk function (1) can be estimating.

4. Numerical results

For numerical illustration of the general theory we propose the simplest example of estimating the mean of the normal distribution, i.e. $f(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$, $\Theta = [\theta_l, \theta_r]$, $\theta_l < 0 < \theta_r$. This distribution is mixed with another distribution with a density $g(x)$ with respect to the Lebesgue measure, $X = \mathbb{R}$, by the formula $h(x) = (1 - \varepsilon)f(\theta, x) + \varepsilon g(x)$, where ε , $0 \leq \varepsilon < 1$, is a parameter of this mixture, and is denoted as \mathbf{H}_ε .

Let θ_c be the estimation when the estimator \bar{x} is based on censored data, θ_w be the estimation when the estimator \bar{x} is based on winsored data when appropriate levels are A_l (downer) and A_r (upper). This means that we reduce $X = \mathbb{R}$ to the segment $[A_l; A_r]$, the distribution \mathbf{P}_θ has the density $f(\theta, x)$ for $x \in (A_l; A_r)$ and atoms $\Phi(A_l - \theta)$ and $1 - \Phi(A_r - \theta)$ at the points A_l and A_r respectively, the the distribution with the density $g(x)$ has the atoms $G_l = \int_{-\infty}^{A_l} g(x) dx$ and $G_r = \int_{A_r}^{\infty} g(x) dx$. The neighborhood $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{P}_\theta)$ is

$$\mathcal{O}_\delta(\mathbf{P}_\theta) = \left\{ h(x) \mid \forall x \in (A_l; A_r), \quad |h(x) - f(\theta, x)| \leq \delta f(\theta, x) \right\}.$$

We outline one example of numerical investigations with the following parameters $A_l = -2$, $A_r = 2$, $\theta_l = -1$, $\theta_r = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, $\Delta = 0.2$, true value of the parameter θ is 0.

Results of estimating when $g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$

Table 1

L	$R(\tilde{\theta})$	$R(\theta_w)$	$R(\theta_c)$	\bar{M}
2	0.1065	0.2652	0.1886	23.93
4	0.0223	0.1248	0.0625	46.73
6	0.0045	0.0607	0.0246	70.11
8	0.0007	0.0307	0.0091	93.88
10	0.0002	0.0152	0.0042	118.46

If $\varepsilon = 0$ and we test the hypothesis $\theta = 0$ under the alternative $\theta = \Delta$ then $k(\mathbf{H}_0) = \frac{\Delta^2}{2}$. It is natural to use as a measure of effectiveness of an estimator $\hat{\theta}$

$$\mathcal{E}(\hat{\theta}, \mathbf{P}) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{-2 \log(R(\hat{\theta}, \mathbf{P}))}{\Delta^2 M}.$$

Then $\mathcal{E}(\bar{x}, \mathbf{H}_0) = 1$, where \bar{x} is the standard estimation of the mean, and it is followed from Table 1 that $\mathcal{E}(\tilde{\theta}, \mathbf{H}_{0.1}) \approx 0.8$, $\mathcal{E}(\theta_w, \mathbf{H}_{0.1}) \approx 0.39$, $\mathcal{E}(\theta_e, \mathbf{H}_{0.1}) \approx 0.52$.

5. Conclusions

We propose the setting of the problem of sequential robust estimating of an unknown parameters with a guaranteeing decision and the risk function of an estimation.

For this setting we construct the estimator with near to optimal properties for some statistical models.

It is found that, in general, the rate of the risk function decreasing is an exponential under the mean number of observations.

For constructing an effective estimator, it is necessary to find a cover of the parametric space in such a way that optimizing the information distance to the alternative set of parameters for a given level of an estimating accuracy Δ .

References

1. *Huber P. J.* Robust Statistics. — Wiley, 2004.
2. *Tsitovich F. I.* Properties of suboptimal sequential decisions for testing nonparametric hypotheses on distributions with exponential decreasing tails // Information Processes. — 2010. — Vol. 10, no 2. — P. 181–196. (in Russian)
3. *Tsitovich F.* Supoptimal Multistage Nonparametric Hypotheses Test // Pliska. Studia mathematica Bulgaria. — 2009. — Vol. 19. — P. 269–282.
4. *Tsitovich F., Tsitovich I.* Sample space reducing for statistical decision effectiveness increasing // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE, 2014. — ISBN: 978-1-4799-5291-5. — P. 501–506.
5. *Malyutov, M.B., Tsitovich, I.I.* Second order optimal sequential tests // Proc. Internat. Workshop Optimum Design 2000, Cardiff, UK, April 2000. — Kluwer, Netherlands, 2000. — P. 67–78.
6. *Malyutov M. B., Tsitovich I. I.* Second Order Optimal Sequential Model Choice and Change-point Detection // Information Processes. — 2010. — Vol. 10, no 3. — P. 275–291. (in Russian)

Необходимые условия существования стационарного распределения в системе адаптивного управления конфликтными потоками

М. А. Федоткин*, Е. В. Кудрявцев*

** Кафедра программной инженерии,
Центр прикладной теории вероятностей,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина, д. 23, Нижний Новгород, Россия, 603950*

Аннотация. В работе рассматривается система нециклического управления конфликтными потоками неоднородных требований. Построена и изучена математическая модель управляющей системы обслуживания с переменной структурой. Найдены рекуррентные соотношения для состояний обслуживающего устройства и длин очередей по потокам. Также получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений векторной марковской последовательности состояний системы через один шаг и через число шагов, равное количеству основных состояний обслуживающего устройства. Предлагается итеративно-мажорантный метод, который позволяет найти легко проверяемые необходимые условия существования стационарного распределения.

Ключевые слова: конфликтные потоки, нециклическое управление, стационарное распределение, производящие функции.

1. Введение

Данная работа связана с важной проблемой эффективного управления транспортным перекрестком. Предлагается адаптивный нециклический алгоритм, учитывающий не только длины очередей, но и очередность прихода заявок.

В работе рассматривается транспортный перекресток как система массового обслуживания. Обслуживаются 2 конфликтных неординарных пуассоновских потока Π_1, Π_2 . В каждый вызывающий момент по потоку j приходит k заявок с вероятностями $P_j(k)$, $k \geq 1$, $j = 1, 2$, определенными в [1, 2].

Обслуживание производится с помощью адаптивного нециклического алгоритма, подробное описание которого приведено в работе [3].

2. Постановка задачи

В системе обслуживающим устройством является светофор, а требованиями — автомобили, подъезжающие к светофору. Множество состояний светофора $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}, \Gamma^{(5)}, \Gamma^{(6)}, \Gamma^{(7)}, \Gamma^{(8)}\}$. Описание каждого состояния приведено в [3].

Будем рассматривать систему в моменты τ_i , $i \geq 0$, или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Здесь τ_0 — начальный момент времени, а величины τ_i , $i \geq 0$ — моменты смены состояний обслуживающего устройства. Пусть $y_0 = (0, 0)$, $y_1 = (1, 0)$, $y_2 = (0, 1)$ и X — целочисленная одномерная неотрицательная решетка. Для нелокального описания системы при $i = 0, 1, \dots$ введем следующие случайные величины и элементы:

1) $\Gamma_i \in \Gamma$ — состояние обслуживающего устройства на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$;

2) $\eta_{j,i} \in X$ — число заявок j -го потока, поступивших в систему за промежутков $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i})$;

3) $\eta'_{j,i}$ — случайный вектор, принимающий значение y_0 , если на i -ом такте $[\tau_i, \tau_{i+1})$ в систему не поступило ни одной заявки, или y_j , если на i -ом такте первыми поступили заявки j -го потока;

4) $\kappa_{j,i} \in X$ — число заявок j -го потока, которые находятся в системе в момент τ_i , $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i})$;

5) $\xi_{j,i}$ — максимально возможное число заявок j -го потока, которые система может обслужить на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\xi_i = (\xi_{1,j}, \xi_{2,j})$.

Примем следующие соотношения для длительностей T_i , $i = \overline{1, 6}$,

$$T_{3j-2} = \mu_{j,1}^{-1} + l_{3j-2}\alpha_j\mu_{j,1}^{-1}, \quad T_{3j-1} = l_{3j-1}\alpha_j\mu_{j,2}^{-1}, \quad T_{3j} = l_{3j}\alpha_j\mu_{j,2}^{-1},$$

где $l_{3j-2} \in X$, $l_{3j-1}, l_{3j} \in N$, параметры $\mu_{j,1}^{-1}$ и $\mu_{j,2}^{-1}$ — длительности обслуживания одной заявки на первом и втором этапе соответственно. Величина $0 < \alpha_j \leq 1$ обозначает часть обслуживания, которую необходимо пройти требованию, чтобы можно было начать обслуживать следующую заявку. В случае $\alpha_j < 1$ одновременно может обслуживаться несколько требований.

Адаптивный алгоритм смены состояний обслуживающего устройства из множества Γ задается с помощью рекуррентного соотношения:

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma^{(3j-2)}, & \{[\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}] \& [(\kappa_{j,i} > 0) \vee (\kappa_{s,i} \geq K_s) \vee (\eta'_i = y_j)]\} \vee \\ & \vee \{[\Gamma_i = \Gamma^{(3j)}] \& [\kappa_{s,i} = 0] \& [\kappa_{j,i} \leq K_s] \& [\eta'_i = y_j]\}, \\ \Gamma^{(3j-1)}, & \{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}\} \vee \{[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}] \& [\eta'_i = y_j]\}, \\ \Gamma^{(3j)}, & \{\Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}\} \vee \{[\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}] \& [\eta'_i \neq y_j]\}, \\ \Gamma^{(6+j)}, & [\Gamma_i = \Gamma^{(3s)}] \& [\kappa_{j,i} = 0] \& [\kappa_{s,i} < K_s] \& [\eta'_i = y_0]. \end{cases}$$

Как видно из приведенного соотношения состояние обслуживающего устройства на следующем шаге зависит от состояния на предыдущем шаге, длины очереди и очередности прихода заявок. При этом

динамика длины очереди задается следующими рекуррентными соотношениями

$$\kappa_{j,i+1} = \begin{cases} \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}; \\ \eta_{j,i} + \max\{0, \kappa_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \end{cases}$$

3. Свойства марковской последовательности

Состояние системы на i -м такте времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ описывается случайным элементом $(\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega))$, $i = 0, 1, \dots$. Для векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \dots\}$ доказана марковость и проведена классификация ее состояний.

Теорема 1. *Случайная векторная последовательность состояний системы вида $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \dots\}$ с заданным начальным распределением вектора (Γ_0, κ_0) является марковской.*

Теорема 2. *Пусть $j, s = 1, 2$, $j \neq s$, $x = (x_1, x_2) \in X^2$ и*

$$\begin{aligned} G &= \{(\Gamma^{(h)}, x) : \Gamma^{(h)} \in \Gamma, x \in X^2\}, \\ G^{(3j-2)} &= \{(\Gamma^{(3j-2)}, x_s y_s) : x_s < K_s - l_{3s}\}, \\ G^{(3j-1)} &= \{(\Gamma^{(3j-1)}, x_s y_s) : x_s < K_s - l_{3s}\}, \\ G^{(6+j)} &= \{(\Gamma^{(6+j)}, x) : x_j > 0\} \cup \{(\Gamma^{(6+j)}, x) : x_s \geq K_s - l_{3s}\}, \\ G_j &= \begin{cases} G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)}, & l_{3j-2} > 0; \\ G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)} \cup G^{(3j-1)}, & l_{3j-2} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда состояния из G_j являются несущественными и множество вида $G_0 = G \setminus (G_1 \cup G_2)$ является неразложимым аperiodическим классом существенных состояний.

Для любого $i \geq 0$, $r = \overline{1, 8}$, $x \in X^2$ введем обозначение:

$$Q_i^{(r)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x).$$

В работе [3] были найдены рекуррентные соотношения для одномерных распределений $\{Q_i^{(r)}(x) : r = \overline{1, 8}, x \in X^2\}$, $i \geq 0$, марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \dots\}$.

Пусть $z = (z_1, z_2)$, где z_1, z_2 действительные или комплексные переменные и $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$. Положим $z^x = z_1^{x_1} z_2^{x_2}$, где $x = (x_1, x_2) \in X^2$. Рассмотрим теперь производящие функции

$$W_i^{(r)}(z) = \sum_{x \in X^2} Q_i^{(r)}(x) z^x, \quad r = \overline{1, 8}; \quad W_i(z) = \sum_{r=1}^8 W_i^{(r)}(z).$$

Используя рекуррентные соотношения для одномерных распределений $\{Q_i^{(r)}(x): r = \overline{1, 8}, x \in X^2\}$, $i \geq 0$, векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \dots\}$, стандартным образом были получены рекуррентные соотношения для производящих функций $W_i^{(r)}(z)$, $r = \overline{1, 8}$, $i > 0$.

4. Необходимые условия существования стационарного распределения

Предложенный в работе итеративно-мажорантный метод позволил получить следующие утверждения. Условия этих утверждений легко проверяются.

Теорема 3. *Если существует предельное распределение марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$, то*

$$\frac{\alpha_1 \lambda_1 M_1}{\mu_{1,2}} + \frac{\alpha_2 \lambda_2 M_2}{\mu_{2,2}} < 1,$$

где λ_1 и λ_2 — интенсивности потоков вызывающих моментов, M_1 и M_2 — математические ожидания числа требований в вызывающих моментах для потоков Π_1 и Π_2 .

Из условия теоремы 3 легко вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Предельное распределение $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ существует только тогда, когда выполняется $\alpha_j \lambda_j M_j < \mu_{j,2}$, $j = 1, 2$.*

Введем следующие обозначения $T = T_1 + T_3 + T_4 + T_6 + n_1 T_2 + n_2 T_5$, $L_j = l_{3j-2} + n_j l_{3j-1} + l_{3j}$, $j = 1, 2$, где n_1 и n_2 — максимальное число продлений состояний $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(5)}$.

Теорема 4. *Для существования предельного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ необходимо выполнение неравенства*

$$\lambda_1 M_1 T - L_1 + \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} (\lambda_2 M_2 T - L_2) < 0.$$

Теорема 5. *Для существования предельного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ необходимо выполнение неравенства*

$$\lambda_1 M_1 T - L_1 + \frac{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}{\lambda_2 M_2 T_2} (\lambda_2 M_2 T - L_2) < 0.$$

Следствие 2. *Для существования предельного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ необходимо, чтобы хотя бы для одного $j = 1, 2$ выполнялось неравенство $\lambda_j M_j T - L_j < 0$.*

5. Заключение

В изучаемой системе были найдены легко проверяемые необходимые условия существования предельного распределения векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$.

Литература

1. *Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V.* Construction and Analysis of a Mathematical Model of Spatial and Temporal Characteristics of Traffic Flows // Automatic Control and Computer Sciences — 2014. — Vol. 48, no. 6. — P. 358–367.
2. *Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V.* Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations // Automatic Control and Computer Sciences. — 2015. — Vol. 49, no. 1. — P. 29–36.
3. *Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В.* Построение математической модели адаптивного управления неординарными потоками // Материалы Международной научной конференции “Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения”, Минск, БГУ, 2015. — С. 106–111.

UDC 519.218.31

Necessary conditions for stationary distribution existence in the adaptive control system of conflict flows

M. A. Fedotkin*, E. V. Kudryavtsev*

** Department of Probability Theory,
Nizhny Novgorod State University,
Gagarin Avenue 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

There is considered the process of control conflict flows of nonhomogeneous arrivals. A mathematical model of a control system with variable structure is constructed and studied. Recurrence relations are found for the states of the serving device and the lengths of the flows queues. Recurrence relations are also obtained for one-dimensional distributions of the vector Markov sequence of states of the system in one step and through the number of steps equal to the number of basic states of the serving device. We propose an iterative-majorant method that allows us to find easily verifiable necessary conditions for stationary distribution existence.

Keywords: conflict flows, non-cyclic control, stationary distribution, generating functions.

UDC 519.218.23

Diffusion Approximation of Branching Processes

N. Limnios*

* Sorbonne University, Université de technologie de Compiègne
 LMAC Laboratory of Applied Mathematics of Compiègne -
 CS 60319 - 60203 Compiègne cedex, France (E-mail: nlimnios@utc.fr)

Abstract. We consider Bienaymé-Galton-Watson (BGW) and continuous-time Markov branching processes and prove diffusion approximation results in the near critical case. In particular, we give new proofs and derive necessary and sufficient conditions for diffusion approximation to hold of Feller-Jiřina and Jagers theorems. The proofs are new and are not based on generating function theory.

Keywords: Branching process, diffusion approximation, near critical case.

1. Introduction

In the present work we study diffusion approximation of near critical Markov branching processes in discrete-time (BGW), and continuous-time Markov age-dependent branching processes, (see, e.g., [2, 5, 6, 9]). Especially, Feller-Jiřina theorem ([1, 4, 10]) and Jagers theorem ([9]) are revisited. We present a different method to obtain diffusion approximation based on Markov generators convergence [3, 11] and semimartingale relative compactness [12], (see also [8, 13]). Moreover, we prove that the near critical condition is a necessary and sufficient condition for diffusion approximation of a Markov branching process to hold.

The main results are presented in Section 2; the main step of proofs in Section 3, and finally a short conclusion is also given in the last section.

2. Diffusion approximation results

Consider a Bienaymé-Galton-Watson branching process in discrete-time

$$Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n-1,j}, \quad n \geq 1, \quad Z_0 = 1.$$

Denote by $\mu := \mathbf{E}\xi_{n-1,j}$ and $\sigma^2 := \text{Var}(\xi_{n-1,j})$, the common mean and variance of offspring, $\xi_{n-1,j}$, which are i.i.d. random variables. We denote also ξ_j instead of $\xi_{n,j}$ in some places.

Define now the family of processes in series scheme, indexed by the series parameter $\varepsilon > 0$, say Z_n^ε , and define the processes $Y_t^\varepsilon := \varepsilon Z_{\lfloor t/\varepsilon \rfloor}^\varepsilon$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$. We denote by ξ_j^ε , $\varepsilon > 0$ the number of offspring.

The following assumptions are needed in the sequel.

C1: Offspring mean assumption: $\mu_\varepsilon = 1 + \varepsilon\alpha + o(\varepsilon)$, as $\varepsilon \downarrow 0$, and $\alpha \in \mathbb{R}$ a constant;

C2: Offspring variance assumption: $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 + o_\varepsilon(1)$, with $0 < \sigma^2 < \infty$.

C3: Initial value assumption: Y_0^ε converge to a point $x \in \mathbf{R}$, as $\varepsilon \downarrow 0$.

What we mean by the *near critical* hypothesis can be expressed by assumptions C1. The near critical case is a necessary and sufficient condition for a BGW process to give a diffusion approximation. Let $C_0^2(\mathbf{R})$ be the space of real-valued functions defined on \mathbb{R} twice continuously differentiable vanishing at infinity. Let \Longrightarrow mean the weak convergence in the Skorohod space $D_{\mathbb{R}}[0, \infty)$.

Theorem 1 *Conditions C1-C3 are necessary and sufficient that the following weak convergence holds*

$$Y_t^\varepsilon \Longrightarrow W_t, \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0,$$

where W_t is a diffusion process defined by the generator $L\varphi(x) = \alpha x\varphi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x\varphi''(x)$, with initial value $W_0 = x$, and $\varphi \in C_0^2(\mathbf{R})$. Here φ' and φ'' are the first and second derivative of the function φ .

The "if" part of the above theorem is the well known Feller-Jiřina theorem ([10]). We will give here another proof, without generating function.

Let us now consider Markov branching processes in continuous time, $Z_t, t \in \mathbb{R}_+$, for $t, s \geq 0$,

$$Z_{t+s} = \sum_{i=1}^{Z_t} \xi_i^{(s)}$$

where $\xi_i^{(s)}$ is the number of offspring of the i -th particle living in time t . The particle lifetime follows an exponential distribution with mean $1/\lambda$, $\lambda > 0$. Let us consider the family of processes $Y_t^\varepsilon := \varepsilon Z_{t/\varepsilon}^\varepsilon$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Then we have the following result.

Theorem 2 *Conditions C1-C3 are necessary and sufficient that the following weak convergence holds*

$$Y_t^\varepsilon \Longrightarrow W_t, \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0,$$

where W_t is a diffusion process defined by the generator $L\varphi(x) = \alpha\lambda x\varphi'(x) + \frac{1}{2}\lambda\sigma^2 x\varphi''(x)$, with initial value $W_0 = x$, and $\varphi \in C_0^2(\mathbf{R})$.

The "if" part of the above theorem is the well known Jagers theorem ([9]). We will give here another proof, without generating function.

Remark. If we replace condition C2 by $\sigma_\varepsilon^2 = o_\varepsilon(1)$, then we get, for both Theorems, as limit process, W_t , the deterministic function e^{bt} , with $b = \alpha$, for Theorem 1, and $b = \lambda\alpha$, for Theorem 2. This provides an average approximation for the considered branching processes.

3. Proofs

Let us give the main steps of proofs of the above two theorems.
Proof of Theorem 1. For any $\varepsilon > 0$, the process Y_t^ε is a Markov process with state space $E_\varepsilon = \varepsilon\mathbb{N}$, $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ and semigroup operator P_ε , defined by $P_\varepsilon\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(\varepsilon \sum_{j=1}^{x/\varepsilon} \xi_j^\varepsilon)$. Set $S_n := \sum_{j=1}^n (\xi_j^\varepsilon - 1)$.

The discrete generator $\mathbb{L}^\varepsilon := \varepsilon^{-1}(P_\varepsilon - I)$ can be written in asymptotic form, for $x \in E_\varepsilon$ and $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R})$, as

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi(x) = \varepsilon^{-1}x(\mu_\varepsilon - 1)\varphi'(x) + \frac{1}{2}[\sigma_\varepsilon^2x + \varepsilon^{-1}x^2(\mu_\varepsilon - 1)^2]\varphi''(x) + \theta^\varepsilon(x).$$

where

$$|\theta^\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(x\sigma^2 + x^2a^2 + o_\varepsilon(1))\mathbb{E}w(\varphi'', \varepsilon S_{x/\varepsilon}).$$

The function $w(\varphi'', \delta)$ is the modulus of continuity of the continuous function φ'' , and we have by bounded convergence theorem that

$$\mathbb{E}w(\varphi'', \varepsilon S_{x/\varepsilon}) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Introducing the near critical conditions to the above generator we get the announced limit generator. Now for the relative compactness, we will prove the following two facts ([12]). First the compact containment condition has to be proved

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^\varepsilon| > c\right) = 0, \quad (2)$$

and second the inequality $\mathbf{E}|Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^2 \leq k|t - s|$. The following result holds.

Lemma 1 *The following inequality holds*

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^\varepsilon|^2 \leq K_T,$$

where K_T is a constant depending on T and independent of ε .

Now from Lemma 1 and the Kolmogorov inequality we get the compact containment condition (3). On the other hand we take, for $s < t$,

$$\mathbf{E}\left[\varepsilon^2(Z_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon - Z_{[s/\varepsilon]}^\varepsilon)^2\right] \leq \varepsilon([t/\varepsilon] - [s/\varepsilon])\sigma^2 \sim |t - s|\sigma^2.$$

The conclusion now is clear.

Proof of Theorem 2. The generator $\mathbb{L}^\varepsilon \varphi(x) := \varepsilon^{-1} \lim_{s \rightarrow 0} \{\mathbf{E} \varphi(Y_s^\varepsilon) - \varphi(x)\}/s$ can be written in asymptotic form as follows, for $x \in E_\varepsilon$ and $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{L}^\varepsilon \varphi(x) = \varepsilon^{-1} \lambda x (\mu_\varepsilon - 1) \varphi'(x) + \frac{1}{2} \lambda x [\sigma_\varepsilon^2 + (\mu_\varepsilon - 1)^2] \varphi''(x) + \theta^\varepsilon(x).$$

and introducing the near critical conditions, we get

$$\mathbb{L}^\varepsilon \varphi(x) = \lambda(\alpha + o_\varepsilon(1)) x \varphi'(x) + \frac{1}{2} (\sigma^2 + o_\varepsilon(1)) \lambda x \varphi''(x) + \theta^\varepsilon(x).$$

The relative compactness is proved in the same way as in Theorem 1, and the conclusion follows.

4. Conclusions

In this work we presented diffusion approximation results for Markov branching processes by a new way without generating function support. Moreover, near critical condition are proved to be a necessary and sufficient condition for diffusion approximation for the considered branching processes.

References

1. *Aliiev S. A., Shurenkov V. M.* Transitional phenomena and the convergence of Galton–Watson processes to Jirina processes // *Theory Probab. Appl.* — 1983. — Vol. 27, no. 3. — P. 472–485.
2. *Athreya K. B., Ney P. E.* *Branching processes.* — Springer, Berlin, Heidelberg, 1972.
3. *Ethier S. N., Kurtz T. G.* *Markov Processes: Characterization and convergence.* — J. Wiley, New York, 1986.
4. *Feller W.* (1951). *Diffusion Processes in genetics* // *Proc. Second Berkley Symp. Math. Statist. Prob.* — Univ. of California Press, 1951. — P. 227–246.
5. *Gikhman I. I., Skorokhod A. V.* *Theory of Stochastic Processes.* Vol 2. — Springer-Verlag, Berlin, 1974.
6. *Haccou P., Jagers P., Vatutin V. A.* *Branching Processes. Variation, Growth, and Extinction of Population.* — Cambridge University Press, 2005.
7. *Iosifescu M., Limnios N., Oprisan G.* *Introduction to Stochastic Models.* iSTE. — J. Wiley, London, 2010.
8. *Jacod J., Shiryaev A. N.* *Limit Theorems for Stochastic Processes,* 2nd Ed. — Springer, 2003.
9. *Jagers P.* *Diffusion Approximation of Branching Processes* // *Annals Math. Statist.* — 1971. — Vol. 42, no. 6. — P. 2074–2078.

-
10. *Jiřina M.* On Feller's branching diffusion processes, *Časopis // Pěst. Mat.* — 1969. — Vol. 94. — P. 84–90.
 11. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. — World Scientific, N.Y., 2005.
 12. *Liptser R. S.* The Bogolubov averaging principle for semimartingales // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Moscow.* — 1994. — No. 4.
 13. *Liptser R. S., Shiriyayev A. N.* Theory of Martingales, (translated from Russian, Nauka, 1986, Moscow). — Kluwer, Dordrecht, 1989.

Вероятностные модели распространения загрязнений в крупных водных акваториях. Статистики и стохастические вычислительные алгоритмы

О. С. Сороковикова*^{†‡}, Д. В. Дзама*,
Д. Г. Асфандияров*, Д. В. Благодатских*

* *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,
ул. Большая Тульская, д.52, Москва, Россия, 115191*

† *Обнинский институт атомной энергетики НИЯУ МИФИ,
Студгородок, д.1, Калужская область, г. Обнинск, Россия, 249040*

‡ *Московский физико-технический институт,
Институтский пер., д.9, Московская область, г. Долгопрудный, Россия,
141701*

Аннотация. Представляется версия модели Монте-Карло для расчета распространения загрязнения в крупной водной акватории с детальным учетом береговой линии. На основе многолетней базы данных о течениях, глубинах верхнего квазиоднородного слоя перемешивания предлагается вероятностная модель районирования водных акваторий по уровню загрязнений. Предлагается версия распараллеливания расчетов по модели Монте-Карло с разными вариантами датчиков псевдослучайных величин. Проведено сравнение эффективности нескольких вариантов таких датчиков для параллельных вычислений. Предлагаемая методика расчета разных статистик загрязнения планируется к применению для объектов ядерного наследия в виде крупных природно-техногенных водных комплексов.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, модель переноса примеси в океане, датчики псевдослучайных величин, параллельные вычисления.

1. Введение

Актуальность решения задачи переноса радионуклидов в поверхностных водных объектах, загрязненных радиоактивными веществами, включая приоритетность обоснования и разработки научно-технического инструментария для прогнозирования состояния крупных хранилищ ЖРО, отмечалась не единожды [1–3].

Экспертная оценка, проведенная в ИБРАЭ РАН, показала, что факты превышения предельно-допустимых концентраций радионуклидов могут наблюдаться на расстояниях десятков и сотен километров от места нахождения источника загрязнения [4]. Кроме того, в работе [4] был сделан вывод о важности учета различных особенностей среды, в частности межгодовой изменчивости течений, для расчета переноса примеси на дальние расстояния.

В международной практике существует опыт учета влияния изменчивости атмосферных процессов (3D нестационарной метеорологии) на распространение загрязнения при моделировании с помощью

лагранжевой стохастической модели [5, 6] различных сценариев длительных (порядка нескольких месяцев) выбросов радиоактивных веществ в атмосферу. Изменчивость атмосферных течений учитывалась посредством проведения серии расчетов с одинаковой функцией источника, но с использованием различных временных рядов метеопараметров [6]. На основе проведенных расчетов в каждой точке расчетной области была произведена оценка максимального уровня загрязнения, если начало выброса приходится на любой момент времени за последние пять лет.

В отличие от баз данных по атмосферным течениям многолетние базы данных по морским течениям стали появляться в открытом доступе относительно недавно. Эти базы данных основываются как на расчетах, сделанных по совместным динамическим моделям атмосферы и океана, так и с использованием 4D-Var ассимиляции данных. В данной работе представлена вероятностная модель, которая разрабатывается в рамках создания практической методологии районирования акваторий с наиболее высоким уровнем загрязнения в случае возникновения условий для ускоренного распространения и/или перераспределения радиоактивного загрязнения на объектах ядерного наследия – крупных природно-техногенных водных комплексах.

2. Основная часть

В основе использованной методики лежит использование численной модели на основе метода Монте-Карло для расчетов поверхностного загрязнения, учитывающей процессы адвекции, диффузии, с использованием неточечных частиц специального вида. Предполагается, что смещение центра каждой частицы находится с помощью численного решения уравнения Ито методом Монте-Карло. Таким образом, производится учет как адвективного переноса, так и крупномасштабных турбулентных процессов.

Вертикальный размер этих частиц ограничен глубиной слоя перемешивания, при этом внутри каждой частицы распределение концентрации примеси по вертикали равномерно. Размер частиц по горизонтали меняется за счет процессов мелкомасштабной диффузии. Концентрация примеси в частице может также уменьшаться за счет процессов даунвеллинга.

При проведении расчетов учитываются взаимодействие примеси с береговой линией, которая задается с разрешением в 90 метров [7, 8]. В качестве базы данных по морским течениям берутся расчеты, сделанные по результатам измерений, сделанными в ходе измерительной кампании JCOPE (Japan Coastal Ocean Predictable Experiment) [9] и охватывают временной период с 1993 по 2009 годы.

На рис. 1 показаны результаты расчетов за 1993 и 2007 годы с началом выброса 15 января и длительностью в три месяца с одинаковыми параметрами источника.

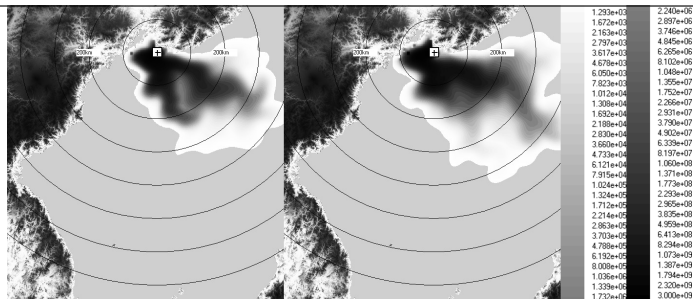


Рис. 1. Пример расчетов для гипотетического выброса за разные годы

В виду того, что проведение ансамблевых расчетов требует задействования значительных вычислительных ресурсов, расчеты по вышеупомянутой численной модели проводились с использованием технологии параллельных вычислений. В основе предложенного способа распараллеливания лежит разбиение исходной задачи на определенное число подзадач для которых расчет проводится в течение всего периода действия источника, но с меньшим числом частиц обратно пропорциональным количеству решаемых подзадач.

Предложенный способ обеспечивает практически равномерную загрузку процессоров. Однако при этом необходимо обеспечить независимость рассчитываемых траекторий частиц в разных процессах, чтобы гарантировать хорошую статистическую обеспеченность получаемых результатов.

Для достижения высокой степени независимости хаотических смещений частиц в разных процессах необходимо использовать генераторы псевдослучайных чисел (ГПСЧ) большой цикличности. В качестве эффективных генераторов рассматривался РПСЧ разработанный в ИБРАЭ РАН, и 128-битный генератор Дядькина-Хэмилтона [10].

В ходе проведения корреляционного анализа генератор Дядькина-Хэмилтона продемонстрировал, согласно нескольким статистическим критериям, большую статистическую независимость генерируемых им подпоследовательностей псевдослучайных чисел и был выбран в качестве основного ГПСЧ, применяемого в расчетах.

В основе вероятностной модели, используемой в данной работе, лежит проведение серии расчетов с фиксированным временем действия источника, но с произвольным временем начала выброса. На основе проведенных таким образом расчетов, в каждой точке рассматриваемой акватории строится вариационный ряд для величин, характеризующих уровня загрязнения. На основе данного вариационного ряда

строится функция распределения искомых величин. Для анализа полученных результатов разработана программная процедура, отфильтровывающая редкие события с высокими значениями концентрации загрязнения с заданным пользователем уровнем доверия.

3. Заключение

На примере расчетов гипотетического выброса показано, что закономерности распространения загрязнения в акватории могут носить устойчивый характер. Таким образом, практическая ценность полученных результатов заключается в том, что анализ выявленных с помощью разрабатываемой вероятностной модели закономерностей может быть в дальнейшем использован для организации оптимальной стратегии взятия проб для береговых объектов ядерного наследия с учетом межсезонной изменчивости океанических течений.

Литература

1. *Под общей редакцией Большова Л. А., Лаверова Н. П., Линге И. И.* ГЛАВА 4. Реализация программных мероприятий по решению проблемы накопленных РАО // Проблемы ядерного наследия и пути их решения. Развитие системы обращения с радиоактивными отходами в России. — Т. 2. — М.: Энергопроманалитика, 2013.
2. *Саржисов А. А., Сивинцев Ю. В., Высоцкий В. Л., Никитин В. С.* Атомное наследие холодной войны на дне Арктики. Радиоэкологические и технико-экономические проблемы радиационной реабилитации морей — Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. Москва, 2015. — 699 с.
3. *Уткин С. С.* Обоснование решений по долговременной безопасности крупных хранилищ жидких радиоактивных отходов: дис. докт. техн. наук: 05.14.03: защищена 12.10.2016. — М., 2016. — 233 с.
4. *Семенов В. Н., Сороковиков А. В., Сороковикова О. С.* Консервативные модельные оценки загрязнения поверхностных вод при возникновении экстремальных гипотетических аварий при утилизации подводных лодок на Камчатском полуострове // Труды ИБ-РАЭ РАН. — 2008. — Вып. 9. — С. 202–229.
5. *Sofiev A., Siljamoja P.* A dispersion modelling system SILAM and its evaluation against ETEX data // *Atm. Env.* — 2006. — Vol. 40. — P. 674–685.
6. Environmental Impact Assessment Report. New Nuclear Power Plant in Lithuania // Lithuanian Energy Institute (Lithuania), Poyry Energy Oy (Finland), August 27th, 2008.
7. Сайт NASA [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://asterweb.jpl.nasa.gov/gdem.asp> — свободный.
8. Сайт NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) [Электронный ресурс] Режим доступа:

<https://www.ngdc.noaa.gov/docucomp/page?xml=NOAA/NESDIS/NGDC/MGG/DEM/iso/xml/316.xml&view=getDataView&header=none> — свободный.

9. Сайт APDRC (Asia-Pacific Data-Research center) [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://apdrc.soest.hawaii.edu/datadoc/frajcore2.php> — свободный.
10. *Marchenko M. A., Mikhailov G. A.* Parallel realization of statistical simulation and random number generators // Russ. J. Number. Anal. Math. Modelling. — 2002. — Vol. 17, no. 1. — P. 113–124.

UDC 519.248:53

Probabilistic models of contamination in large water areas. Statistics and stochastic algorithms

O. S. Sorokovikova^{*†‡}, D. V. Dzama^{*}, D. G. Asfandiyarov^{*},
D. V. Blagodatskikh^{*}

** The Nuclear Safety Institute,
The Russian Academy of Sciences,
Bolshaya Tuskaya str. 52, Moscow, 115191, Russia*

*† The Moscow Engineering Physics Institute,
Studgorodok 1, Obninsk, Moscow region, 249040, Russia*

*‡ The Moscow Institute of Physics and Technology,
Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia*

A version of Monte-Carlo model for simulation of contamination in a large water area taking into account the detailed shape of the coastline is presented. Utilizing a multi-year database of sea currents, the depth of the mixed layer a probabilistic model of contamination level zoning of water areas has been proposed. A version of parallelization of calculations by Monte-Carlo model using various pseudorandom number generators has been proposed. The comparative efficiency of a few variants of such generators with regard to parallel calculations has been considered. The proposed methodology for calculation of various statistics of contamination is intended to be applied for objects of nuclear heritage categorized as large natural and technogenic water areas.

Keywords: Monte-Carlo method, ocean dispersion model, pseudorandom number generators, parallel calculations.

UDC 51(091)

Goryachkin and His Idea in the Agricultural mechanics: Human - Machine - Environment

V. Chinenova*

** Mathematics and Mechanics Department,
Moscow State University
Leninskiye Gory, 1, Moskva, 119991*

Abstract. The famous scientist, academician V.P. Gorjachkin (1868–1935), the founder of agricultural machinery industry in Russia, posed and developed a global problem “Human - Machine - Environment” in his works. In Russia of scientific and technological revolution, this problem is developed on the basis of four general scientific directions: biomechanics of working processes, mechanics of machines, theory of machine control, and theory of technological processes.

Keywords: applied mechanics, agricultural machines, theory of mechanisms, living movers.

1. Introduction

A specific property of most agricultural machines, including modern ones, is the fact that a human operator is needed to control these machines. Starting from his very early works in agricultural mechanics and theory of agricultural machinery, Goryachkin explored working movements of a human operator in search for optimal forms of these movements, which would minimize the burden on arms and legs of an operator. When solving these issues, it was necessary to find appropriate relationships between operator’s movements and the physiology of the human being. Application of the methods of classical mechanics in agricultural engineering and biology. He developed the theory, scientific basis for the design of all types of agricultural machinery. He explained the General principles of their test. Goryachkin was a talented mathematician and mechanic. He saw in each machine its mechanical nature.

2. Base section

When trying to formulate the ideas posed and developed by V.P.Goryachkin in his works in terms of modern concepts, the set of these ideas can be determined as a global problem: Human - Machine - Environment.

A specific property of most agricultural machines, including modern ones, is the fact that a human operator is needed to control these machines. Many manual tools are applied up to present, especially in gardening, horticulture, vineyard processing, and cultivation of speciality crops. Starting from his very early works in agricultural mechanics and theory

of agricultural machinery, Goryachkin explored working movements of a human operator in search for optimal forms of these movements, which would minimize the burden on arms and legs of an operator. He examined also some aspects of comfortability, convenience in the machine control, and questions connected with service zones, as these are called nowadays.

While solving these questions, a problem arose how to determine inter-relationships between required operator movements and human physiology. And Goryachkin introduced the course called Theory of Live Engines into the curriculum on agricultural mechanics. The course was given by academician A.V. Leontovich, the outstanding physiologist. He considered some questions of human physiology, which are developed now as biomechanics of working movements of humans and animals. Leontovich set forth also the physiology of humans and animals paying special attention on the role of muscles of the nervous system and brain in generating and controlling working movements. Further, energy characteristics and adaptive properties of live engines were considered to determine their ability to adjust to different working conditions, in particular, to find out an effect of the position of an operator relative to the machine (upstanding or sitting positions, moving nearby the machine, etc.).

Goryachkin not only created a new branch of the applied mechanics but also formulated an original Human - Machine - Environment concept. The second item of the problem, Machine, was considered by Goryachkin in different aspects; however, studying the issues of mechanics of machines was the main aspect.

In the 1930s, V.P. Goryachkin was eagerly engaged in studying the theory of manual tools. He carried out his explorations together with the Central Institute of Labor, involving his apprentices in the work. For example, I.I. Artobolevski determined mechanical parameters of hammers, mattocks, spades, scythes: their masses, barycenters, moments of inertia, centers of oscillation, etc. Simultaneously, more complicated tasks were solved, for example, how the position of a barycenter of a human operator affected operator's movements. These tasks were solved using the simplest, although unique at that time, experimental installations. All these works were based on remarkable results obtained by Goryachkin in the kinematics and dynamics of manual tools, the theory of impact processes produced by these tools, etc.

The organization of works on standardization of tractor plows was carried out at that period of time too. Vasili Prokhorovich requested his friend, professor N.I. Mertsalov, who was reading courses of the theory of mechanisms and machines and the kinematics of spatial mechanisms at the Moscow Agricultural Institute (since 1921) to carry out the study of kinematics and kinetostatics of elevating mechanisms in tractor plows. N.D. Luchinskii, who became an Academician of VASKhNIL (All-Union Academy of agricultural Sciences) afterwards, and I.I. Artobolevski, a future Academician of the Academy of Sciences of the USSR, were also involved in these works. N.D. Luchinskii defended his graduation project called American Thresher, in which the problem how an operator could control a

machine using handles was considered. The same problem of the relations between a human operator and a machine arose when designing new reaping machines (these questions were examined by professor P.I. Borodin and I.I. Artobolevski under the guidance of V.P. Goryachkin).

A specific property of most agricultural machines, including modern ones, is the fact that a human operator is needed to control these machines. Many manual tools are applied up to present, especially in gardening, horticulture, vineyard processing, and cultivation of speciality crops. Starting from his very early works in agricultural mechanics and theory of agricultural machinery, Goryachkin explored working movements of a human operator in search for optimal forms of these movements, which would minimize the burden on arms and legs of an operator. He examined also some aspects of comfortability, convenience in the machine control, and questions connected with service zones, as these are called nowadays.

While solving these questions, a problem arose how to determine interrelationships between required operator movements and human physiology. And Goryachkin introduced the course called Theory of Live Engines into the curriculum on agricultural mechanics. The course was given by academician A.V. Leontovich, the outstanding physiologist. He considered some questions of human physiology, which are developed now as biomechanics of working movements of humans and animals. Leontovich set forth also the physiology of humans and animals paying special attention on the role of muscles of the nervous system and brain in generating and controlling working movements. Further, energy characteristics and adaptive properties of live engines were considered to determine their ability to adjust to different working conditions, in particular, to find out an effect of the position of an operator relative to the machine (upstanding or sitting positions, moving nearby the machine, etc.).

Goryachkin not only created a new branch of the applied mechanics but also formulated an original Human - Machine - Environment concept. The second item of the problem, Machine, was considered by Goryachkin in different aspects; however, studying the issues of mechanics of machines was the main aspect.

In the 1930s, V.P. Goryachkin was eagerly engaged in studying the theory of manual tools. He carried out his explorations together with the Central Institute of Labor, involving his apprentices in the work. For example, I.I. Artobolevski determined mechanical parameters of hammers, mattocks, spades, scythes: their masses, barycenters, moments of inertia, centers of oscillation, etc. Simultaneously, more complicated tasks were solved, for example, how the position of a barycenter of a human operator affected operator's movements. These tasks were solved using the simplest, although unique at that time, experimental installations. All these works were based on remarkable results obtained by Goryachkin in the kinematics and dynamics of manual tools, the theory of impact processes produced by these tools, etc.

The organization of works on standardization of tractor plows was carried out at that period of time too. Vasilii Prokhorovich requested his

friend, professor N.I. Mertsalov, who was reading courses of the theory of mechanisms and machines and the kinematics of spatial mechanisms at the Moscow Agricultural Institute (since 1921) to carry out the study of kinematics and kinetostatics of elevating mechanisms in tractor plows. N.D. Luchinskii, who became an Academician of VASKhNIL afterwards, and I.I. Artobolevski, a future Academician of the Academy of Sciences of the USSR, were also involved in these works. N.D. Luchinskii defended his graduation project called American Thresher, in which the problem how an operator could control a machine using handles was considered. The same problem of the relations between a human operator and a machine arose when designing new reaping machines (these questions were examined by professor P.I. Borodin and I.I. Artobolevski).

The common thread running through all his works was an idea that mechanics of agricultural machinery could not be considered without taking into account the technological process. In this context, there appeared his papers devoted to cutting and reversing furrow-slices, works on the theory of cutting herbs and grasses, crushing agri-products, etc., connected with specific technological processes involving the environment that was processed using a tool or a machine.

3. Conclusions

The necessity of considering the theory of agricultural machinery in terms of the Human - Machine - Environment system, an extremely profound conception of Goryachkin, has become widely recognized today in the current theory of machinery. Indeed, all the three factors are taken into account when designing separate automatic machines and systems of automatic machines (automated sequence machine systems), machine tools, and other programme-controlled machines, as well as industrial robots and walking machines.

Academician Goryachkin's heritage, although connected with the past doctrines on mechanisms and machines, gave birth to sprouts, which resulted in an unprecedented, wide-scale development of the theory and practice of the agricultural mechanics. New, highly-productive and effective machines and systems of machines were designed as a result of his teaching, those machines that are aimed at the solution of problems of the development of the national economy.

Acknowledgments

The author is grateful to the members of Goryachkin's family and to the staff of Goryachkin's Memorial Museum for kindly providing all the necessary information, photos and documents. This work is financially supported by the Russian Foundation for Humanities, No. 16-03-50081.

References

1. *Goryachkin V.P.* Collected Works (7 vol.). — Moscow: Selkhozgiz, 1937-1949 (in Russian)
2. *Goryachkin V.P.* Collected Works (3 vol.). — Moscow: Kolos, 1968 (in Russian)
3. Collected works in three volumes (Sobranie sochinenii v trekh tomakh) by V.P.Goryachkin. Translated from Russian. — Jerusalem, Published for the U.S. Dept. of Agriculture and the national Science Foundation, Wash., D.C. by the Israel Program for Scientific Translations. Edition: 2d. 1973.

Limit theorems for infinite-channel queueing systems with heavy-tailed service times

E.E. Bashtova*, E.A. Chernavskaya*

** Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. We consider an infinite-channel queueing system with a regenerative input flow. The service times are heavy-tailed, so that mathematical expectation of service time is infinite. Therefore the number of customers in the system increases with time. We investigate asymptotic behavior of the number of servers busy at time t . We present a functional limit theorem that characterizes growth of this characteristic of the system.

Keywords: analytical methods in probability theory, queueing theory, limit theorems, point processes, random sums.

1. Introduction

We consider an infinite-channel queueing system with a regenerative input flow $X(t)$. We investigate asymptotic behavior of the process $q(t)$ that is the number of servers busy at time t , $t \geq 0$.

This model appears in many contexts other than queueing theory. One example (for recurrent flow) is the number of colonies still in existence at time t in a branching process with immigration. More generally, one can consider a point process, where each point undergoes an independent translation forward in time.

The service times are heavy-tailed, so that mathematical expectation of service time is infinite. Because of this, the number of customers in the system increases with time. Such model with recurrent flow was considered in [2]. And one-dimensional analogue of central limit theorem for number of customers in a system $GI|G|\infty$ was proved there. We consider regenerative input flow and prove analogue of functional central limit theorem. Regenerative flow includes many types of flows considering in queueing theory. For example, recurrent, Markov-modulated, Markov Arrival flows are regenerative [1]

2. Main result

To begin with we give the definition of the regenerative flow.

Definition 1. The stochastic flow $X(t)$ is called regenerative if

- There exists filtration $\{\mathcal{F}_{\leq t}^X\}_{t \geq 0}$ such that $X(t)$ is measurable with respect $\{\mathcal{F}_{\leq t}^X\}_{t \geq 0}$.
- There is an increasing sequence of Markov moments $\{\theta_j, j \geq 0\} (\theta_0 = 0)$ with respect to $\{\mathcal{F}_{\leq t}^X, t \geq 0\}$ such that the sequence

$$\{\varkappa_j\}_{j=1}^\infty = \{X(\theta_{j-1} + t) - X(\theta_{j-1}), \theta_j - \theta_{j-1}, t \in (0, \theta_j - \theta_{j-1}]\}_{j=1}^\infty$$

consists of independent identically distributed (iid) random elements.

Then $\{\theta_j\}_{j=1}^\infty$ are called regeneration points of $X(t)$ and $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $(\theta_0 = 0)$ regeneration periods.

Service times $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ form the sequence of independent identically distributed random variables with distribution function $B(x)$. We assume that the following condition is fulfilled

$$1 - B(t) = \overline{B}(t) \sim \frac{\mathcal{L}(t)}{t^\Delta}, \quad 0 < \Delta < 1$$

as $t \rightarrow \infty$, where $\mathcal{L}(t)$ is slowly varying function as $t \rightarrow \infty$.

It means that $\overline{B}(t)$ is regularly varying function. Note that condition (2) implies that

$$\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(y) dy \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty$$

and so, the mathematical expectation of of service times is *infinite*.

We investigate the growth of $q(t)$ that equals number of customers in the system at time t . Then

$$q(t) = \sum_{i=1}^{X(t)} \mathbb{I}(\eta_i > t - t_i)$$

Denote

$$\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1}), \quad \tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i \geq 1,$$

$$\lambda = \frac{E\xi_1}{E\tau_1},$$

$$\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(x) dx \sim \mathcal{L}(t)t^{1-\Delta}$$

Theorem 1. Let $E\tau_1^3 < \infty, E\xi_1^4 < \infty$. Then the sequence of processes

$$q_T^*(t) = \frac{q(tT) - \lambda\beta(tT)}{\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}}, \quad t \in [0, h]$$

C -converges as $T \rightarrow \infty$ to a gaussian process with zero mean and correlation function

$$R(t, t+u) = \frac{\lambda}{1-\Delta} ((t+u)^{1-\Delta} - u^{1-\Delta}), \quad u \geq 0, t, t+u \in [0, h]$$

Theorem 1 is a functional limit theorem for sums of random variables with a random summation index. The proof of the theorem is greatly complicated by the fact that the process $q(t)$ is the sum of a random number of dependent summands. And the summation index also depends on the terms.

We first prove the theorem on the convergence of finite-dimensional distributions, and then we verify the condition of the density of measures.

Proofs of both parts consist of several stages, such as majorization, various estimates, and the application of the demi-martingale theory [3].

References

1. *Afanasyeva L.G., Bashtova E.E.* Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server // Queueing systems. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 125–147.
2. *Kaplan N.*(1975) Limit Theorems for a $GI/G/\infty$ Queue // The Annals of Probability. — 1975. — Vol.3, no. 5. — P. 780–789.
3. *Rao B.L.S.P.* Associated sequences, demimartingales, and nonparametric inference. — Springer Science Business Media, 2012.

УДК 519.214.8

Точная асимптотика вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде

А. В. Шкляев*

** Лаборатория математической статистики при кафедре
математической статистики и случайных процессов,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. В работе рассматривается надкритический ветвящийся процесс в случайной среде, представляющей собой независимые одинаково распределенные случайные величины. Предполагается, что для сопровождающего блуждания выполнено правостороннее условие Крамера, а на количество потомков одной частицы накладываются ограничения на уровне моментов. Для логарифма процесса доказана интегро-локальная теорема, то есть получена точная асимптотика вероятностей попадания в отрезки малой длины. Полученный результат описывает как большие, так и умеренные уклонения процесса. Методика исследования процесса основана на представлении процесса как решения рекуррентного уравнения.

Ключевые слова: Большие уклонения, интегро-локальные теоремы, ветвящиеся процессы, случайные среды, рекуррентные последовательности.

1. Введение

Пусть $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин, которые мы будем называть случайной средой, а f_y — семейство производящих функций. Ветвящимся процессом Z_n называют марковскую цепь с $Z_0 = 1$ и условной переходной производящей функцией

$$f_{Z_{n+1}|Z_n, \eta}(s) = f_{\eta_n}(s)^{Z_n}.$$

При изучении ветвящихся процессов важную роль играет так называемое сопровождающее блуждание

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

где $\xi_i = f'_{\eta_i}(1)$. Мы будем предполагать, что математическое ожидание $\mathbf{E}\xi_1 = \mu$ конечно и процесс надкритический, $\mu > 0$. Кроме того, будем считать, что шаги сопровождающего блуждания удовлетворяют правостороннему условию Крамера $\mathbf{E}e^{h\xi_1} < \infty$ при $h \in [0, h^+)$ при некотором h^+ .

Ветвящиеся процессы в случайной среде были введены в работах [1], [2], [3]. Первоначально основные результаты были связаны со

случаем дробно-линейных производящих функций f_y , в котором удается получить явное выражение для вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = k|\eta)$, в настоящее время хорошо изучен общий случай (например, [4], [5]).

В данной работе рассматривается асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n)), \quad n \rightarrow \infty$$

при $\Delta_n \rightarrow 0$, $x \in [\mu n, \theta n]$, где $\theta \in [\mu, m^+)$, m^+ — некоторая константа, определенная ниже. При $x - \mu n = O(\sqrt{n})$ это вероятности попадания в "типичные множества", при $x - \mu n$ порядка n это вероятности так называемых больших уклонений, в остальных случаях это вероятности умеренных уклонений.

Асимптотика вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде рассматривалась рядом авторов, в частности, точная асимптотика исследовалась М.В.Козловым в работах [6], [7] в случае геометрического распределения числа потомков. В этом случае было показано, что при выполнении условия Крамера

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n) \sim \tilde{I}(\theta)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\theta \in [\mu, \theta^+)$, $\tilde{I}(\theta)$ — некоторая функция, для которой найдено явное выражение. Использованные в работе методы напрямую опирались на явное представление изучаемых вероятностей, вытекающее из того, что распределение числа потомков геометрическое. Другой подход был использован С.Boeinghoff, G.Kersting, V.Bansaye, J.Beresticky в работах [8], [9]. Они рассматривали случаи как легких (геометрических), так и тяжелых (степенных с достаточно малым показателем) хвостов распределения величин X_i , представляющих число непосредственных потомков одной частицы. В этих работах получена грубая (логарифмическая) асимптотика. В вышедшей в этом году работе [10] исследована асимптотика умеренных уклонений для надкритических ветвящихся процессов, но рассмотрена только зона, в которой работает нормальное приближение для рассматриваемых вероятностей.

В данной работе получена точная асимптотика

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n I(\theta)}{\sqrt{n}} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad n \rightarrow \infty,$$

для надкритических ветвящихся процессов, чье сопровождающее блуждание удовлетворяет условию Крамера, а число $X \stackrel{d}{=} Z_1$ непосредственных потомков одной частицы удовлетворяет условию $\mathbf{E}X^h < \infty$, где $h \in [0, \max(h^+, 1 + \varepsilon))$ при некотором $\varepsilon > 0$. Для $I(\theta)$ получено явное выражение и доказано, что эквивалентность при этом равномерна по $x \in [\mu n, \theta n]$ при любом $\theta \leq m^+$.

2. Основная часть

Пусть Z_n — ветвящийся процесс в случайной среде, X — число непосредственных потомков одной частицы, ξ — шаг сопровождающего блуждания. Будем предполагать выполнение следующих условий:

- (А) ξ нерешетчата, $\mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$, $h \in [0, h^+)$,
- (В) $\mathbf{E}X^h < \infty$ при $h \in [0, \max(h^+, 1 + \varepsilon))$ при некотором $\varepsilon > 0$,
- (С) $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$.

Положим $m(h) = (\ln R(h))'$, $\sigma^2(h) = m'(h)$, $m^+ = \lim_{h \rightarrow h^+} m(h)$. Функция $m(h)$ строго возрастает, поэтому при любом $\theta \in [\mu, m^+)$ найдется единственное $h \in [0, h^+)$, для которого $m(h) = \theta$, обозначать которое будем h_θ . Положим

$$\Lambda(\theta) = \sup_h (\theta h - \ln R(h)) = h_\theta \theta - \ln R(h_\theta), \quad \theta \in [\mu, m^+).$$

Сопряженной к ξ величиной будем называть $\xi^{(h)}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi^{(h)} \in A) = \frac{1}{R(h)} \int_A e^{hx} \mathbf{P}(\xi \in dx).$$

Тогда $m(h) = \mathbf{E}\xi^{(h)}$, $\sigma^2(h) = \mathbf{D}\xi^{(h)}$.

Теорема. Пусть выполнены условия (А), (В), (С). Тогда соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n]) \sim \hat{I}(x/n) \mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n]) \sim I(x/n) \frac{\Delta_n}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(x/n)}$$

при $n \rightarrow \infty$ и всех Δ_n , достаточно медленно стремящихся к нулю, выполнено равномерно по $x \in [\mu n, \theta n]$ при любом $\theta \in [\mu, m^+)$. Здесь

$$\hat{I}(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}Z_m^{h_y} R(h_y)^{-m}, \quad I(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(h_y)}} \hat{I}(y).$$

Равномерность полученных результатов по x позволяет получать интегральные результаты вида $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq x)$, однако, интегро-локальная форма более универсальна и позволяет одним выражением описывать как большие (порядка n) так и умеренные (любого меньшего порядка) отклонения от среднего μn .

Метод получения указанного результата основан на исследовании рекуррентной последовательности Y_n , где

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n.$$

Здесь A_i , $i \leq n$ — н.о.р. случайные величины, такие что $R(h) = \mathbf{E}A_i^h < \infty$, $h \in [0, h^+)$, B_i , $i \leq n$ — величины, такие что B_i не зависит от

A_{i+1}, \dots, A_n при любом $i < n$. Рекуррентные последовательности такого вида хорошо изучены, в частности в крамеровском случае большие отклонения для них описаны в [11], однако, принято рассматривать именно случай н.о.р. (A_i, B_i) . В рассматриваемом же нами случае B_i , во-первых, зависят от предыдущих A_i , а вот вторых могут быть не одинаково распределенными при определенных ограничениях на моменты $\mathbf{E}B_i^h$. При $\mathbf{E} \ln A_1 > 0$ для таких последовательностей даже в случае растущих B_i удается получить теорему об асимптотике вероятностей $\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x + \Delta_n])$.

Ветвящийся процесс представляет последовательность такого вида, если рассматривать $A_i = e^{\xi_i}$, $B_i = Z_i - Z_{i-1}e^{\xi_i}$. Удастся показать, что в нашем случае последовательности A_i, B_i удовлетворяют требуемым условиям, оценив моменты $\mathbf{E}B_i^h$ при различных h .

3. Заключение

В работе получена асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(Z_n \in [x, x + \Delta_n])$$

равномерно по $x \in [\mu n, \theta n]$, где $\theta \in [\mu, m^+)$. В отличие от работ [5], [8] полученная асимптотика точная, а не логарифмическая, по сравнению с [10] изучен более широкий диапазон x , а в сравнении с [6] результат не использует явного представления вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = k | \eta)$. Техника интегро-локальных теорем, представленная Shepp ([12]), Stone ([13]) и активно разработанная впоследствии А.А. Боровковым, Могульским и рядом других математиков, позволяет получить универсальный результат, сочетающий в себе теорему об умеренных и больших отклонениях. Подход, основанный на рассмотрении представления процесса в виде рекуррентно заданной последовательности, позволяет изучать асимптотику не только непосредственно для ветвящегося процесса, но и для других представимых в таком виде моделей, в частности, ветвящихся процессов в случайной среде с иммиграцией.

Литература

1. *Smith, W., and Wilkinson, W.* On branching processes in random environments // The Annals of Mathematical Statistics. — 1969. — Vol. 40, no. 3. — P. 814–827.
2. *Athreya, K., Karlin S.* On branching processes with random environments: I: Extinction probabilities // The Annals of Mathematical Statistics. — 1971. — Vol. 42, no. 5. — P. 1499–1520.
3. *Athreya, K., Karlin S.* Branching processes with random environments, II: Limit theorems // The Annals of Mathematical Statistics. — 1971. — Vol. 42, no. 6. — P. 1843–1858.

4. *Afanasyev, V. I., Geiger, J., Kersting, G., Vatutin, V. A.* Criticality for branching processes in random environment // *Annals of probability.* — 2005. — Vol. 33, no. 2. — P. 645–673.
5. *Afanasyev, V. I., Boinghoff, C., Kersting, G., Vatutin, V. A.* Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment // *Journal of Theoretical Probability.* — 2012. — Vol. 25, no. 3. — P. 703–732.
6. *Kozlov, M. V.* On large deviations of branching processes in a random environment: geometric distribution of descendants // *Discrete Mathematics and Applications.* — 2006. — Vol. 16, no. 2. — P. 155–174.
7. *Kozlov, M. V.* On large deviations of strictly subcritical branching processes in a random environment with geometric distribution of progeny // *Theory of Probability and Its Applications.* — 2010. — Vol. 54, no. 3 — P. 424–446.
8. *Boinghoff, C., Kersting G.* Upper large deviations of branching processes in a random environment—Offspring distributions with geometrically bounded tails // *Stochastic Processes and their Applications.* — 2010. — Vol. 120, no. 10. — P. 2064–2077.
9. *Bansaye V., Berestycki J.* Large deviations for branching processes in random environment // *ArXiv:0810.4991* — 2008.
10. *Grama, I, Liu Q., Miqueu E.* Berry–Esseen’s bound and Cramer’s large deviation expansion for a supercritical branching process in a random environment // *Stochastic Processes and their Applications.* — 2017. — Vol. 127, no. 4. — P. 1255–1281.
11. *Shklyayev, A. V.* Large Deviations for Solution of Random Recurrence Equation // *Markov Processes and Related Fields* — 2016. — Vol. 22, no.1. — P. 139–164.
12. *Shepp L. A.* A local limit theorem // *Annals of Math. Statistics.* — 1964. — Vol. 35, no. 1. — P. 419–423.
13. *Stone C.J.* Local limit theorems for asymptotically stable distributions // *Notices Amer. Math. Soc.* — 1964 — Vol. 11. — P. 465.

Large Deviation Probabilities for the Branching Process in Random Environment'

A. V. Shklyaev*

** Department of Mathematical Statistics and Stochastic Processes,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

We consider a branching process in random environment of i.i.d. random variables. Suppose that the associated random walk for the process satisfies Cramer's condition and the number of direct descendants of one particle have enough bounded moments. Under these conditions we prove an integro-local theorem for logarithm of the process. This result concerns large and moderate deviation probabilities. Our method is based on representation of branching process as a solution of the random equation.

Keywords: large deviations, integro-local theorem, branching processes, random environment, random equations.

УДК 519.2

Предельные теоремы для систем массового обслуживания с различными дисциплинами обслуживания

С. А. Гришунина*†

* Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992

† Департамент прикладной математики, Московский Институт
Электроники и Математики Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»,
Таллинская улица, д.34, Москва, Россия, 123458

Аннотация. В данной работе изучаются системы массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком и независимыми временами обслуживания требований с конечным математическим ожиданием. Рассматриваются системы с различными дисциплинами обслуживания: системы с общей очередью и системы с отдельными очередями перед каждым прибором. В последнем случае клиент, пришедший в систему, выбирает один из приборов в соответствии с заданным правилом и остается в выбранной очереди до момента выхода из системы. Определяются некоторые классы дисциплин и изучается асимптотическое поведение многоканальной системы обслуживания в случае высокой загрузки (коэффициент загрузки $\rho \geq 1$). Основным результатом данной работы являются предельные теоремы о слабой сходимости нормированных процессов остаточного времени ожидания и длины очереди к Винеровскому процессу в случае $\rho > 1$ и его абсолютному значению при $\rho = 1$.

Ключевые слова: система массового обслуживания, высокая загрузка, предельные теоремы, дисциплина обслуживания.

1. Описание модели

Рассматривается система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком $A(t)$ интенсивности λ . Пусть θ_j - j -ая точка регенерации, $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ - j -ый период регенерации, $\xi_j = A(\theta_j) - A(\theta_{j-1})$ и $\mu = \mathbf{E}\tau_1 < \infty$, $a = \mathbf{E}\xi_1 < \infty$.

Времена обслуживания $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$ и конечным математическим ожиданием $b = \int_0^{\infty} x dB(x)$. Кроме того, последовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ не зависит от $A(t)$. Рассматриваются системы с различными дисциплинами обслуживания. Во-первых, системы с общей очередью. Во-вторых, системы с отдельной очередью перед каждым прибором, где пришедшее требование выбирает прибор в соответствии с некоторым правилом и остается в выбранной очереди до момента выхода из системы. Таким образом система разделяется на r

одноканальных систем. Для дисциплин с прерываниями предполагается, что обслуживание требования после прерывания продолжается с того момента, на котором оно было прервано.

Примерами являются следующие дисциплины:

- (i) Системы с общей очередью. Рассматривается класс консервативных дисциплин, таких что число занятых приборов в момент t равно $\min(r, Q(t))$, где $Q(t)$ - общее число требований в системе в момент t .
Обозначим D_0 дисциплину FIFO (first in - first out) и введем две дисциплины с прерываниями: D_1 и D_2 . Для D_1 (D_2) в любой момент t остаточное время обслуживания требования на приборе не более (менее), чем остаточное время обслуживания любого требования, находящегося в очереди (если такие есть).
- (ii) Пришедшее требование обслуживается j -ым прибором с вероятностью $\frac{1}{r}$ независимо от остальных (дисциплина D_3).
- (iii) Требование с номером n обслуживается j -ым прибором, если $n = rm + j$, где $m = 0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, r}$ (циклическая дисциплина D_4).
- (iv) Перед каждым прибором есть своя очередь и пришедшее требование выбирает прибор с минимальной очередью (дисциплина D_5). Если таких приборов несколько, то требование с одинаковыми вероятностями случайным образом выбирает один из них.

Для прибора с номером i введем процесс $q_i(t)$, представляющий собой число требований, которые должны быть обслужены в момент t в соответствии с выбранной дисциплиной и $\eta_{ji}(t)$ - остаточное время обслуживания j -го требования ($j = \overline{1, r}, i = \overline{1, r}$). Положим $\eta_{ji}(t) = 0$, если $q_i(t) = 0$.

Обозначим

$$\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_r(t)),$$

$$\vec{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_r(t)), \text{ где } W_i(t) = \sum_{j=1}^{q_i(t)} \eta_{ji}(t);$$

$$\vec{Q}_n = \vec{q}(\theta_n - 0) = (q_{n1}, \dots, q_{nr}), \vec{W}_n = \vec{W}(\theta_n - 0) = (W_{n1}, \dots, W_{nr}),$$

$$W(t) = \sum_{j=1}^r W_j(t), W_n = W(\theta_n - 0), \quad Q(t) = \sum_{j=1}^r q_j(t), Q_n = Q(\theta_n - 0).$$

Предположение 1 Для любого $i = \overline{1, r}$

$$P\{\xi_1 = 0, \tau_1 > 0\} + P\{\xi_1 = 1, t_1 + \eta_{i1} < \tau_1\} > 0.$$

Здесь t_1 - время прихода первого требования.

Данное предположение означает, что вероятность перехода системы в нулевое состояние из любого другого положительна.

Выделим классы дисциплин.

Определение 1 Дисциплина D принадлежит классу K_0 , если из сходимости $Q_n = \sum_{i=1}^r q_{ni} \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$ следует сходимость $q_{ni} \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $i = 1, \dots, r$. (Свойство 1а)

Определение 2 Дисциплина D принадлежит классу K_1 , если выполнено свойство 1а и из сходимости $Q_n \rightarrow \infty$ (п.н.) (почти наверное) при $n \rightarrow \infty$ следует сходимость $q_{ni} \rightarrow \infty$ (п.н.) при $n \rightarrow \infty$ для любого $i = \overline{1, r}$. (Свойство 2а)

2. Предельная теорема для случая $\rho > 1$

Условие стабильности для процессов W_n и Q_n для дисциплин класса K_0 имеет вид $\rho = \lambda br^{-1} < 1$ и доказано в работе [3].

Целью данной работы является изучение асимптотического поведения системы в случае высокой загрузки, т.е. при $\rho \geq 1$. Сначала рассмотрим случай $\rho > 1$.

Теорема 1 Пусть

$$E\tau_1^{2+\delta} < \infty, \quad E\xi_1^{2+\delta} < \infty, \quad E\eta_1^{2+\delta} < \infty \quad (1)$$

для некоторого $\delta > 0$. Если $\rho > 1$, то для любой дисциплины из класса K_1 процессы

$$\tilde{W}_T(t) = \frac{W(tT) - (\lambda b - r)tT}{\sigma_W \sqrt{T}}, \quad \tilde{Q}_T(t) = \frac{Q(tT) - (\lambda - \frac{r}{b})tT}{\sigma_Q \sqrt{T}}$$

слабо сходятся к Винеровскому процессу при $T \rightarrow \infty$ на любом конечном интервале $[\alpha, \beta]$. Здесь

$$\sigma_W^2 = b^2 \sigma_Q^2, \quad \sigma_Q^2 = \sigma_A^2 + r \sigma_\eta^2 b^{-3}, \quad \sigma_A^2 = \sigma_\xi^2 / \mu + a^2 \sigma_\tau^2 / \mu^3 - 2a \text{cov}(\xi, \tau) / \mu^2 \quad (2)$$

и σ_ξ^2 и σ_τ^2 - дисперсии ξ и τ соответственно.

Доказательство опирается на результаты, полученные в [2] (гл. 4.25), о связи между процессами $W(t)$ и $Q(t)$ и [1] (пар. 1.2 теорема 1) о необходимом и достаточном условии слабой сходимости заданного процесса к винеровскому.

Следствие 1 Пусть (1) выполнено и $\rho > 1$. Тогда для многоканальной системы с одной очередью для любой консервативной дисциплины выполнена Теорема 1.

Поскольку дисциплины D_1 и D_2 принадлежат классу K_1 , для них выполнена Теорема 1. Пусть $W^D(t)$ - процесс $W(t)$ для системы с общей

очередью и консервативной дисциплиной D . Для простоты предполагается $W^D(0) = 0$. Тогда выполнено стохастическое неравенство

$$W^{D_2}(t) \leq W^D(t) \leq W^{D_1}(t), \quad t \geq 0,$$

откуда следует требуемое утверждение.

Следствие 2 Пусть (1) выполнено и $\rho > 1$. Тогда теорема 1 верна для дисциплин D_3, D_4, D_5 .

Для D_3 и D_4 утверждение следует из сходимости $q_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ (п.н.), $i = \overline{1, r}$. Для D_5 утверждение было доказано в [3].

3. Предельная теорема в случае $\rho = 1$

Теорема 2 Пусть (1) выполнено и $\rho = 1$. Тогда для системы с общей очередью и дисциплиной FIFO нормированный процесс

$$\hat{Q}_T(t) = \frac{Q(tT)}{\sigma_Q \sqrt{T}}$$

слабо сходится к абсолютному значению Винеровского процесса при $T \rightarrow \infty$ на любом конечном интервале $[\alpha, \beta]$. Здесь σ_Q определено соотношением (1).

Следствие 3 Пусть (1) выполнено и $\rho = 1$. Тогда для любой дисциплины $D \in K_2$ нормированное число требований на j -ом приборе

$$\hat{q}_{jD}^T(t) = \frac{q_{jD}(tT)}{\sigma_{qD} \sqrt{T}}$$

слабо сходится к абсолютному значению $v_j(t)$ Винеровского процесса при $T \rightarrow \infty$ на любом конечном интервале $[\alpha, \beta]$. Здесь

$$\sigma_{qD}^2 = \sigma_{A_D}^2 + \frac{\sigma_\eta^2}{b^3}.$$

4. Заключение

В данной работе была рассмотрена система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком и различными дисциплинами обслуживания в случае высокой загрузки ($\rho \geq 1$). Была доказана сходимость нормированных процессов длины очереди и остаточного времени обслуживания к Винеровскому процессу и даны некоторые примеры. Существует множество направлений для будущих исследований.

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 17-01-00468.

Литература

1. *Borovkov A.* Asymptotic methods in Queueing Theory. — Chichester: Wiley, 1984.
2. *Borovkov A.* Stochastic processes in Queueing Theory. — Springer-Verlag, 1976.
3. *Grishunina S. A.* Queueing systems with different service disciplines // International Conference “Supercomputer Simulations in Science and Engineering”, Moscow, 2016.

UDC 519.2

Limit theorems for queueing systems with different service disciplines

S. A. Grishunina^{*†}

** Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia;
Department of applied mathematics*

*† Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research
University Higher School of Economics,
34 Tallinskaya Street, 123458, Moscow, Russia*

In this paper a multi-server queueing system with regenerative input flow and independent service times with finite means is studied. We consider queueing systems with various disciplines of the service performance: systems with a common queue and systems with individual queues in front of the servers. In the second case an arrived customer chooses one of the servers in accordance to a certain rule and stays in the chosen queue up to the moment of its departure from the system. We define some classes of disciplines and analyze the asymptotical behaviour of a multi-server queueing system in a heavy-traffic situation (traffic rate $\rho \geq 1$). The main result of this work is limit theorems concerning the weak convergence of scaled processes of waiting time and queue length to the process of the Brownian motion for the case $\rho > 1$ and its absolute value for the case $\rho = 1$.

Keywords: Queueing System, Heavy-traffic, Limit Theorems, Service Disciplines.

О предельных теоремах А. Д. Соловьева для регенерирующих процессов

В. В. Козлов*

** Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. Обсуждаются два наиболее важных направления в исследованиях А.Д.Соловьёва.

Ключевые слова: асимптотическое поведение момента наступления редкого события, регенерирующий процесс, скорость сходимости, дисциплины обслуживания, ТМО.

В настоящей работе предлагается обсудить два направления исследований А. Д. Соловьева и наметить возможные пути их продолжения.

Первое направление связано с предложенным им методом изучения асимптотического поведения момента наступления редкого события в регенерирующем процессе [1, 2]. Приводим формулировку А. Д. Соловьева.

Пусть $\varkappa(t)$ — регенерирующий процесс и $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ — последовательные моменты регенерации $\varkappa(t)$, $\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$. На каждом периоде регенерации $[t_{n-1}, t_n]$ в некоторый момент $t_{n-1} + \eta_n$ может появиться событие A_n , причем событие A_n и η_n определены на классе траекторий $\{\varkappa(t); t_{n-1} \leq t \leq t_n\}$ и не зависят от номера n . Задача состоит в том, чтобы исследовать асимптотическое поведение момента первого наступления события A_n — случайной величины τ , когда вероятность наступления этого события на одном периоде регенерации стремится к нулю.

Введем обозначения: χ_n — индикатор события A_n ,

$$\zeta_n = \xi_n(1 - \chi_n) + \eta_n \chi_n, \quad F(x) = P\{\zeta_n < x\},$$

$$\phi_-(z) = M e^{-z\zeta_n} \chi_n,$$

$$\phi_+(z) = M e^{-z\zeta_n} (1 - \chi_n),$$

$$\phi(z) = \phi_-(z) + \phi_+(z) = M e^{-z\zeta_n},$$

$$\phi_-(0) = P\{A_n\} = q,$$

$$\bar{q} = \sup_{z \geq 0} \frac{q - \phi_-(z)}{1 - \phi(z)}, \quad q_0 = \max(q, \bar{q}).$$

Теорема 1 Если распределение величины (ξ, η, χ) меняется так, что

- 1) $q > 0, q_0 \rightarrow 0$;
- 2) для некоторого нормирующего множителя γ величина $\gamma\tau$ сходится к собственной случайной величине, то

$$\lim M e^{-\gamma z \tau} = \frac{1}{1 + \omega(z)}, \tag{1}$$

где

$$\omega(z) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-zx}}{x} dP(x)$$

$P(x)$ возрастает, $P(0) = 0$ и $\int_1^{\infty} \frac{dP(x)}{x} < \infty$.

Для сходимости к распределению (1) необходимо и достаточно

$$\lim \int_0^x \frac{t}{q} dF\left(\frac{t}{\gamma}\right) = P(x).$$

К классу (1) принадлежит, естественно, и экспоненциальное распределение. Достаточные условия сходимости к этому распределению дает

Теорема 2

$$\lim_{\alpha_p \rightarrow 0} P \left\{ \frac{q\tau}{T} > x \right\} = e^{-x},$$

где

$$T = M\xi, \quad \bar{\alpha}_p = \left[\frac{M\xi^p}{(M\xi)^p} \right]^{\frac{1}{p-1}} \cdot q, \quad 1 < p \leq 2.$$

А. Д. Соловьевым оценивается, также, скорость сходимости величины $\tau/M\tau$ к экспоненциальному распределению.

Теорема 3 Если при некотором $p: 2 < p \leq 3$ существует $M\zeta^p = m_p$, то

$$\left| P \left\{ \frac{\tau}{M\tau} < t \right\} - 1 + e^{-t} \right| < \frac{c}{p-2} \cdot \beta_p,$$

где $c < 24$ – абсолютная постоянная,

$$\beta_p = \max \left[m_p^{1/(p-1)} \cdot \frac{q_2}{m_2}, \alpha_p \right]$$

$$\alpha_p = \left[\frac{M\zeta^p}{(M\zeta)^p} \right]^{\frac{1}{p-1}} \cdot q, \quad q_2 = M\zeta^2 \cdot \chi, \quad m_2 = M\zeta^2.$$

К этим результатам А. Д. Соловьева примыкает, опираясь на них, работа [4].

Пусть на последовательности вероятностных пространств $(\Omega(\nu), \mathcal{B}(\nu), \mathcal{P}(\nu))$, $\nu = 1, 2, \dots$ заданы:

- 1) однородная цепь Маркова $\{X_n(\nu), n = 0, 1, 2, \dots\}$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}(\nu), \mathcal{F}(\nu))$,
- 2) последовательность неотрицательных сл. в. $\{U_n(\nu)\}$,
- 3) последовательность сл. в. $\{\delta_n(\nu)\}$, принимающих значения 0 или 1.

Допустим, что выполнены следующие условия (I) — (V) (будем опускать в обозначениях зависимость от ν — индекса схемы серий).

(I) При некотором фиксированном $r \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_{n+r+i} \in A_i, U_{n+r+i} \in B_i, \delta_{n+r+i} = e_i, 1 \leq i \leq j | X_k, U_k, \delta_k, k \leq n) = \\ = \mathcal{P}(X_{n+r+i} \in A_i, U_{n+r+i} \in B_i, \delta_{n+r+i} = e_i, 1 \leq i \leq j | X_n), \end{aligned}$$

n, j — любые, $A_i \in \mathcal{F}$, B_i — борелевские, $e_i = 0 \vee 1$ также любые, и

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_{n+r+i} \in A_i, U_{n+r+i} \in B_i, \delta_{n+r+i} = e_i, 1 \leq i \leq j | X_n = x), \\ x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (2)$$

не зависит от n .

(II) Цепь $\{X_n\}$ эргодична и для некоторого $0 < \rho < 1$ справедлива равномерная оценка скорости сходимости к стационарному распределению $\pi(\cdot)$:

$$|P^{(k)}(x, A) - \pi(A)| \leq \rho^{k-1}, \quad x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{F}, k \geq 1,$$

$P^{(k)}(x, A)$ — переходная функция цепи за k шагов.

Будем условную вероятность (1) при $n = 0$ обозначать через $\mathcal{P}_x(\cdot)$, а соответствующее условное математическое ожидание через $M_x(\cdot)$. Для стационарного значения X_0 соответствующие обозначения — $\mathcal{P}^*(\cdot)$ и $M^*(\cdot)$.

(III) Для некоторой бесконечно малой последовательности $\{\alpha\} = \{\alpha(\nu)\}$

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{P}_x(\delta_{r+1} = 1) \leq \alpha \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

и при любых x и ν

$$\mathcal{P}_x \left(\sum_{i=1}^k \delta_{r+i} \geq 1 \right) \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

- (IV) Для некоторого $\gamma > 1$ конечен момент $\mu_\gamma = M^*U_{r+1}^\gamma$ при всех ν .
 (V) Конечна величина $\mathfrak{M} = \sup_{x \in \mathcal{X}} M_x(U_{r+1})$.

Будем изучать асимптотическое поведение при $\nu \rightarrow \infty$ величин

$$N = \min\{n > r \mid \delta_n = 1\} \quad \text{и} \quad T = \sum_{i=r+1}^N U_i.$$

Теорема 4 Пусть выполнены условия (I) – (V), постоянная γ в условии (IV) лежит в пределах $1 < \gamma \leq 2$ и

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \rho < 1 \tag{3}$$

$$\left(\frac{\mu_\gamma}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \alpha |\ln \alpha|^4 \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right) \cdot \alpha |\ln \alpha|^{3/2} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty$$

Тогда равномерно по распределению начального отрезка процесса (X_n, U_n, δ_n) , $n \leq r$ имеют место соотношения

$$\mathcal{P}\left(\frac{T}{MT} > t\right) \rightarrow e^{-t}, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

и

$$MT \sim M^*T.$$

Теорема 5 Пусть выполнены условия (I) – (V), $\gamma = 3$, (4) и

$$\left(\frac{\mu_3}{\mu_1}\right)^{1/2} \cdot \alpha^{1-4/7} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right) \cdot \alpha^{1-4\theta/7} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad \theta = 2 \ln |\ln \alpha| / |\ln \alpha|$$

Тогда

$$\sup_{t \geq 0} \left| \mathcal{P}\left(\frac{T}{MT} > t\right) - e^{-t} \right| \leq^* 26 \frac{(\mu_6)^{7/12}}{\mu_1^{7/2}} \cdot \alpha^{2/7} |\ln \alpha|^{4/7} + 2 \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right)^{1/2} |\ln \alpha|^{4/7}.$$

(неравенство $a(\nu) \leq^* b(\nu)$ означает: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a(\nu)}{b(\nu)} \leq 1$)

Второе направление работ А. Д. Соловьева хорошо отражено в его обзорной статье [3], и связано с изучением основных характеристик процесса обслуживания С. М. О. при различных дисциплинах обслуживания. Он ввел понятие скорости обслуживания, охватывающее большой круг известных дисциплин. С этим понятием А. Д. Соловьев открыл огромное поле научно-исследовательской деятельности оптимизации, включая асимптотической, показателей надежности систем в определенных классах изменения их параметров. Одна из таких дисциплин — обслуживание наикратчайшего требования — привлекает к нахождению стационарных характеристик различных систем.

Литература

1. *Соловьев А. Д.* Системы массового обслуживания с быстрым восстановлением. — Дисс. д. физ.-мат. наук, Москва, 1971.
2. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1971. — No. 6. — С. 79–89.
3. *Соловьев А. Д.* Анализ системы $M|G|1|\infty$ для различных дисциплин обслуживания // Сборник “Теория массового обслуживания”. — М.: ВНИИСИ, 1981. — С. 172–178.
4. *Козлов В. В.* Некоторые асимптотические задачи теории массового обслуживания. — Дисс. к. физ.-мат. наук, Москва, 1979.

UDC 519.214

On limit theorems of A. D. Soloviev for regenerative processes

V. V. Kozlov*

** Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

The two most important directions in research of A. D. Soloviev are discussed.

Keywords: asymptotic behavior of occurrence of rare events, regenerating process, convergence rate, discipline of service, Queuing theory.

УДК 530.01, 51(091), 001.5

Два формализма классической механики

С. Н. Колесников*

** Механико-математический факультет,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119991*

Аннотация. Одним из важнейших результатов научной революции 16-17 веков было создание классической механики. С тех пор ее привычно называют «Классическая механика Ньютона». Однако верно ли это? Оказывается – нет! То, что мы сейчас обычно понимаем под классической механикой – это механика – Эйлера! И эти два формализма – Ньютона и Эйлера, принципиально отличны.

Ключевые слова: классическая механика, формализм, Эйлер, Ньютон, аналитическая механика, мгновенная скорость.

Одним из важнейших результатов научной революции XVI–XVII вв. было создание классической механики. С тех пор ее привычно называют «классическая механика Ньютона». Однако верно ли это? Оказывается – нет! То, что мы сейчас обычно понимаем под классической механикой – это механика – Эйлера! И эти два формализма – Ньютона и Эйлера – принципиально отличны. Очень легко и выпукло это проверяется при попытках осмыслить современную и довольно распространенную критику классической механики со стороны квантовой или статистической физики. Эта критика, полностью относясь к формализму Эйлера, во многих случаях неприменима к механике Ньютона.

Рассмотрим сначала понимание Ньютоном основных понятий механики. Ниже приведен блок цитат из «Математических начал натуральной философии» [1], включая цитату из примечаний академика А.Н. Крылова к книге.

«Ускорительная величина центростремительной силы есть мера, пропорциональная той скорости, которую она производит в течение данного времени.

Так, действие того же магнита более сильно на близком расстоянии, слабее – на дальнем, или сила тяжести больше в долинах, слабее на вершинах высоких гор и еще меньше (как впоследствии будет показано) на еще больших расстояниях от земного шара; в равных же расстояниях она везде одна и та же, ибо, при отсутствии сопротивления воздуха, все падающие тела (большие или малые, тяжелые или легкие) ускорятся ею одинаково [1, стр. 28]»

«Если две величины, разность которых задана, будут обе увеличиваться до бесконечности, то между ними существует предельное отношение, которое равно единице, однако нет предельных значений для

самих величин, то есть таких наибольших их значений, отношение которых как раз было бы равно единице. Поэтому, если в последующем для простоты речи я буду говорить о величинах весьма малых, или исчезающих, или зарождающихся, то не следует под этими словами разуметь количества определенной величины, но надо их рассматривать как уменьшающиеся бесконечно». [1, стр. 70]

«Во введении к трактату «О квадратуре кривых», изданному в 1704 г., Ньютон излагает сущность метода флюксий. «Я рассматриваю здесь математические количества не как состоящие из очень малых постоянных частей, а как производимые непрерывным движением. Линии описываются, и по мере описания образуются не приложением частей, а непрерывным движением точек, поверхности – движением линий, объемы – движением поверхностей, углы – вращением сторон, времена – непрерывным течением и т.п...Такое происхождение имеет место и на самом деле и в самой природе вещей, и наблюдается ежедневно при движении тел. Подобным образом древние объясняли происхождение прямоугольников, ведя подвижные прямые линии по неподвижным.

Замечая, что нарастающие количества, образующиеся по мере нарастания в равные времена, сообразно большей или меньшей скорости их нарастания, оказываются большими или меньшими, я изыскивал способы определения самих количеств по той скорости движения или нарастания, с которою они образуются...» [1, стр. 70, примечание А.Н. Крылова]

Таким образом, Ньютон считает, что:

1) Силы действуют не мгновенно, силы действуют непрерывно и скорость меняется по мере действия силы. По сути – скорость, полученная в результате действия некоторой силы у Ньютона представляет собой некоторую статистически распределенную величину, однако прямо это у Ньютона это не указано, возможно, ввиду отсутствия в то время адекватного математического аппарата.

2) Движение под действием непрерывной силы происходит по непрерывным кривым. Развивая идею «дискретного» наблюдателя применительно к аппроксимации непрерывной кривой многоугольниками у Ньютона, можно получить несколько упрощенную, но вполне конструктивную идею квантово-волнового дуализма.

3) Для определения скорости (или силы) нужно не менее двух точек, скорости в точке по природе нет, мгновенная скорость – это математическая абстракция. Таким образом можно считать, что принцип неопределенности Гейзенберга имеет место и в механике Ньютона.

А теперь дадим слово Эйлеру:

«23. Скорость, которую имеет движущееся неравномерно тело в какой-либо точке проходимогo пути, должна измеряться тем расстоянием, которое могло бы пройти в Данное время тело, движущееся равномерно с этой же скоростью». [2, стр. 50]

«33. При каком угодно неравномерном движении можно допустить, что самые маленькие элементы пути проходятся равномерным движением». [2, стр. 54]

«34. Значит, можно считать, что всякое изменение скорости при неравномерном движении происходит в начале каждого отдельного элемента, так как мы полагаем, что весь элемент пути проходится равномерным движением». [2, стр. 55]

«149. Приведенное выше доказательство основывается на том, что силы предполагаются действующими лишь в течение бесконечно малого промежутка времени, так что тельце имеет лишь столь бесконечно малое движение, что его можно принять равным нулю. Хотя и может случиться, что тот же самый толчок, который при покоящемся тельце указывает на силу, равную p , в случае движущегося тельца укажет на Другую силу, но это исключение к нашей теореме не имеет отношения». [2, стр. 379]

То есть Эйлер, в отличие от Ньютона, полагает:

1) Силы действуют мгновенно. Движение по кривой – это, по логике Эйлера, набор «импульсов», что позволяет Эйлеру и его последователям вполне успешно сводить достаточно общие динамические проблемы к статике.

2) Движение описывается, по сути – многоугольником, а не гладкой кривой. Таким образом практически можно считать, что рассматривается только движение частиц, но не волны.

3) Скорости нарастают и действуют мгновенно, и существует скорость в точке, скорость в течении некоторого промежутка времени после действия силы остается постоянной.

Получается, что в некотором смысле представления Ньютона и Эйлера прямо противоположны, и они представляют два направления в механике, давая два разных описания формализма, ныне называемого классической механикой. Неудивительно, что Эйлер (как и его последователи до настоящего времени) пытался доказать законы Ньютона, что априори невозможно.

Эйлер в определении своего формализма, по-видимому, следовал пониманию дифференциального и интегрального исчисления, данному Лейбницем. Любопытно, что различие походов к основам математического анализа у Ньютона и Лейбница весьма хорошо описано в истории математики, но на далеко идущие последствия этих различий в механике, похоже никто не обратил внимания.

Приведем пример описания этих различий из комментария Д.Д. Мордухай-Болтовского к книге «Исаак Ньютон. Математические работы»: «48. Ньютоновская флюэнта и лейбницеvское «*omne*». [3, стр. 290] У Ньютона нет интеграла как суммы бесконечного числа бесконечно малых элементов. Его флюэнта – это первообразная функция, производная которой равна заданной функции. Не мысля площадь криволинейной трапеции как сумму бесконечно малых элементов, он доказывает, что ее флюксия равна ординате. И здесь Лейбниц гораздо дальше отстоит от Ньютона, чем это может показаться на первый

взгляд. В технике формальных операций оба математика находятся друг к другу гораздо ближе, чем в отношении идей. В противоположность Ньютону у Лейбница вполне определенно выступает уже очень рано примитив интеграла как бесконечная сумма общего вида. Именно у него получает развитие точка зрения анализа бесконечно малых на конечную величину как сумму бесконечно большого числа бесконечно малых. Под лейбницеvское *omne* подводятся все суммы, рассматриваемые Кавальери, причем суммы эти рассматриваются не только в их отношениях, как у Кавальери, но и сами по себе в отдельности. *Omne* сперва остается еще суммой линий, как у Кавальери, *l* здесь еще *lineae* Кавальери 2, а не бесконечно малые входящие или выходящие прямоульники.

В противоположность Ньютону у Лейбница криволинейная трапеция не описывается во времени движением, а состоит из отрезков, которые мыслятся как бесконечно малые элементы, на которые она разлагается.

Данный фрагмент показывает, что различия формализмов у Ньютона и Эйлера не являются, например, случайными искажениями понятийного аппарата, или «трудностями перевода», а определяются принципиально разным подходом к фундаментальным математическим понятиям, тесно связанным с основными концепциями механики. Но, возможно, и наоборот, различные подходы к описанию движения привели к развитию отличных концепций в его математических моделях.

С различиями формализмов связано и различие в представлениях о состоянии покоя у Ньютона и Эйлера. Если Ньютон рассматривает революционную для своего времени дихотомию движения: «равномерное – неравномерное движение», при этом покой – это движение с нулевой скоростью, то Эйлер выделяет покой как особую форму движения, в некотором смысле откатываясь в своем понимании в докоперниканскую эпоху.

В настоящее время в учебниках и литературе наиболее распространены определения Эйлера, которые как раз и порождают парадоксы при сопоставлении классической механики и теории относительности. Но при следовании формализму Ньютона, по видимому большинство этих «парадоксов» исчезают.

Литература

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. и прим. А.Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 688 с.
2. *Эйлер Л.* Основы динамики точки. — М.–Л.: ОНТИ, 1938. — 499 с.
3. *Ньютон И.* Математические работы. — М.–Л.: ОНТИ, 1937. — 452 с.

UDC 530.01, 51(091), 001.5

Different formalism of classical mechanics

S. N. Kolesnikov*

** Faculty of Mechanics and Mathematics,
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: wiseacre@inbox.ru*

One of the most important results of the scientific revolution was the creation of classical mechanics in 16-17 centuries. Since then, it is usually called "classical mechanics of Newton". However, is this true? It turns out - no! What we are now usually mean by classical mechanics - it is mechanics of Euler! And these two formalisms - Newton and Euler, are fundamentally different.

Keywords: classical mechanics, formalism, Euler, Newton, analytical mechanics, instantaneous velocity.

UDC 51(091)

Kirik the Novgorodian – a mathematician of the Early Renaissance

R. A. Simonov*

** Research center of book culture RAS,
90 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia*

Abstract. The contribution of Kirik the Novgorodian (XII century) to the development of mathematical chronology is considered.

Keywords: Renaissance, Ancient Rus, Novgorod, history of mathematics.

1. Main section

The French scientist Jean Delumeau recently wrote that the Early Renaissance was due to the emergence of powerful creative energy among the Italians at the turn of the 10th and 11th centuries, with its subsequent spread throughout Europe. He singled out as a feature of the Renaissance that “mathematics creates the fabric of the universe” [1], that is, it acts as a kind of organizing-constructive basis. As a result of the beneficial influence of the Renaissance, an educational system was developed with two levels – the initial trivium and the final quadrivium. Trivium contained three educational subjects of a humanitarian nature: grammar, rhetoric and dialectics. Quadrivium had subjects of mathematical content: arithmetic, geometry and astronomy (or astrology). The fourth subject was music, which was understood not only as an art object, but also mathematics - in accordance with ancient ideas: “Democritus, watching the playing of musical instruments, found that the pitch of the sounding string varies depending on its length. Based on this, he determined that the intervals of the musical scale can be expressed by the ratios of the simplest integers” [2]. Hence, a person who received higher education in the Renaissance had to know mathematics at the level of his time.

Modern university training divides specialists into two parts - the humanities, who practically remain outside the higher mathematical knowledge, and “technicians”, whose preparation is to some extent based on mathematics. On the need to return to the mathematization of secondary and higher education, modern administrative structures can be treated, at best, as an inappropriate joke. Meanwhile, it can happen. Recently there has been activity of scholars in the humanities in the study of the calendar-mathematical knowledge of Rus, especially the work of Kirik the Novgorodian (1110 - after 1156/1158), the monk of the Novgorod Antoniev monastery [3]. It shows that the educational system and science in Rus was developing in the way of mathematization. This activity of scholars of the humanities is consistent with the astrological forecast that by 2020 the world expects “triumph of intellect” [4], and, hence, the growing role of mathematics in teaching and science.

Ancient Russian scientist and religious figure Kirik the Novgorodian in 2010 was 900 years old. Apparently, there is not a single medieval scientist, who can be considered with great justification the forerunner of the scientific approach to chronology. Absolutely undeservedly his name is almost unknown to the general public. In the treatise "Uchenie im zhe vedati cheloveku chisla vsekh let" (1136), Kirik mathematically studied the cyclicity of time [5]. Originally, historians could not only fairly assess, but mathematically express and correctly interpret Kirik's calculations [5] et al. In the mid of the 19th century the correct estimation of Kirik's creative works was given by a prominent mathematician and academician V.Ya. Bunyakovsky. He noted uniqueness and accuracy of calculations by Kirik [6]. However, historians of science have not yet found an adequate evaluation of the mathematical component of Kirik's creative work, which was transferred to the state of Old Russian mathematics as a whole, as insufficiently developed [6] et al. The situation changed when the sufficient accuracy of the numerical calculations of Kirik was again established - after the prototypical publication of the "Teaching" by Kirik in the Pogodinsky list of the 16th century [7] et al.

For the correct understanding of the role of Kirik in the scientific knowledge of the nature of time, the value of the research context, this characterizes him as an outstanding mathematician [9]. In this connection, the special role is played by the fact that Kirik applied his outstanding mathematical abilities and knowledge in the "Teaching" to the complex task of scientific generalization of data on time as a phenomenon of chronology. (Kirik also belongs to the theological "Questioning" (mid-12th century), more widely known in historiography, which is not considered in this article).

The content of Kirik's "Teaching", which is associated with the terms of the Christian Julian calendar. In the first five paragraphs of it tells about the unit of account time – year, month, week, day, and hour. They interpreted the settlement and chronologically: computational and didactic display of how to know their number "since then (i.e. since the Creation of the Universe, by Kirik "since Adam" – the author's note) to date 6644 of the year", which corresponds to 1136 BC. The concept odds with modern, equal to 60 minutes. In the "Teaching" Kirik uses a variable hour is equal to $1/12$ of daylight (day) and a separate $1/12$ night of the same day.

The following 15 sections of the "Teaching" deal with the calendar concepts: the indicator (the 15-year cycle), the solar circle (the 28-year cycle), the lunar circle (the 19-year cycle), the "centuries of the world" (millennial cycle) (80-year cycle), the "renewal of the earth" (40-year cycle), the "renewal of the sea" (60-year cycle), "the renewal of the waters" (70-year cycle), leap years, "about the great circle" (a cycle of 532 years), a year consisting of 12 "calendar" months (i.e., a solar year), and a year that counts 12 "celestial lunar months" and 11 days (i.e., a year of lunisolar calendar).

Kirik's "Teaching" is a scientific treatise on the mathematical study of the cycles of the Christian Julian calendar, used in the state and church practice of Russia in the 12th century. (The beginning of its use, apparently, dates back to the 10th century, especially after the adoption of Christianity in 988). Kirik's "Teaching" also contains fragmentary information about the cycles of the lunisolar calendar, which can be a reflection of the parallel use of the lunar month and lunar year in Old Russian life, as well as calculations of the natural cycles of "renewal" of heaven, earth, sea and water. The original section is "About fractional divisions of the hour" - about small and the smallest time units, built according to the fivefold division of the hour and successively obtained "particles", up to the seventh fractional "hour" inclusive. (On the last two plots also look further). Repeatedly in the "Teaching" by Kirik there are the motives of komputistiki (pashalistics). Thus, he gives the dates of the Jewish Pesach and the Christian Easter in 1136, pre-specifying the calendar concepts that he used for their calculations.

There is reason to believe that in the mathematical creativity of Kirik the Novgorodian, there was a manifestation of the Renaissance exact science. In this case, for a correct understanding of the role of Kirik in this process, one should rely on the tasks set by the Renaissance mathematician. The main task was the development of komputistiki: "Komputistika, or the art of calculating the table will give Easters for a whole hundred years ahead, is the collective creation of the best mathematical minds of late antiquity. It was, according to the figurative expression of A. Pannekuk, a delicate stream of science that flowed through the night of European civilization - the early middle ages. The theory of the calendar received a new impetus for its development in the 11th-12th centuries, when Europe got acquainted with the achievements of Arab mathematics and astronomy. Almost simultaneously in a number of countries of the Latin West appeared works on komputistika. Kirik's treatise "Uchenie im zhe vedati cheloveku chisla vsekh let", we deem it necessary to be attributed to this ensemble, in spite of the fact that until now it was usually considered either as an isolated phenomenon or as a purely Russian phenomenon, or considered based on the data of Byzantine science" [10].

According to M.F. Murianov, Kirik's "Teaching" is to be considered not only in the narrow context of the regional science of Rus, but also in a broad - pan-European one. Let us dwell on some examples of Western motifs in the Teaching. So, it contains a unique five-fold system of consecutive division of the hour into smaller and smaller "particles". A well-known historian of science V.P. Zubov devoted a special study to this question and came to the conclusion that this account is not found anywhere else. He concluded that «apparently, this is an original Russian "division"» [11]. One of the western predecessors of Kirik in the fivefold division of the hour M.F. Murianov considered the famous Irish komputist Bede the Venerable or his followers [12] (about the Irish origins see [13]). Kirik could take the initial principle of trouble about the division of the hour into five parts, which he probably learned from those monks of the Antoniev monastery

who came from Western Europe [14], and developed it further - on the principle of a consistent fivefold division.

The second example: in the “Teaching” there is a mysterious text about the so-called “renewals”: the sky for 80 years, the sea for 60 years and the waters for 70 years. V.P. Zubov argued that “we do not know any analogies to these periods in the ancient and medieval literature”. M.F. Murianov did not rule out that Kirik’s information went back to the Pythagoreans through the Gnostics. A.A. Simonova suggested that information about the “renewal” could go to Kirik from the Irish monks.

The third example: at the very end of the “Teaching”, Kirik indicates his age in all time units used in Russia: years, months, weeks, days and hours [14]. The method used by Kirik to record the age before him was met in Latin epitaphs, which reported that a certain deceased had lived for so many years, months, days, hours and scruples [15].

The most probable path by which the ideas of Western European komputists got into the “Teaching”, and, most likely, the idea of writing this treatise on the theory of the calendar Kirik could assimilate in Antoniev monastery, having received the relevant information from his colleagues - monks, natives of the West or from travelers, western pilgrims who temporarily lived in the monastery or visited it. In the year of writing the “Teaching” (1136), Kirik served as domestics (head of the church choir or senior chorister). Consequently, he was a professional musician. Apparently, this is confirmed in his future destiny, connected with the transition to the retinue of the Novgorod Archbishop Nyfont. According to the latest research, Kirik was surrounded by Nyfont because of his professional musical activity [16].

It turns out that Kirik the Novgorodian, being a professional humanist (musician, theologian, religious philosopher), also became known as an outstanding mathematician. Syncretism of humanitarian and exact knowledge is a feature of the Renaissance. (As appropriate typical representatives of the Renaissance period, one can name Leonardo da Vinci and Durer, who, being professional painters knew mathematics and left a mark on its history). Where and how could Kirik learn mathematical knowledge of a high level? The mathematics of Kirik’s “Teaching” corresponds to the quadrivium of medieval university studies, and this knowledge he could obtain in the Novgorod Antoniev monastery.

References

1. *Delumeau, J.* La Civilisation de la Renaissance. — Paris, Éditions Civilisations, 1967.
2. Slovar antichnosti. — M.: Progress, 1989. P. 335. Statya “Matemata”
3. *Simonov R.A.* Vklad uchenyih-gumanitariyev v izuchenie kalendarnomatematicheskogo znaniya srednevekovoy Rusi // Kniga i knizhnoe delo Rossii: traditsii i sovremennost. — M.: Mosk. politehnicheskii un-t, 2016. — P. 55–72.

4. *Simonov R.A.* Drevnerusskaya knizhnost (V svete noveyshih istochnikov kalendaro-arifmeticheskogo haraktera). — M.: Mosk. politehnicheskii un-t, 1993. — P. 132–159.
5. *Evgenyi.* Svedenie o Kirike, predlagavshem voprosy Nifontu, episkopu Novgorodskomu // Trudy i letopisi Obschestva istorii i drevnostey rossiyskih. — M., 1828. Ch. 4, kn. 1.
6. *Bobyinin V.V.* Sostoyanie matematicheskikh znaniy v Rossii do XVI veka // Zhurnal Ministerstva narodnogo prosvescheniya. — 1884. — Ch. 232, Aprel. — P. 187–194.
7. *Yushkevich A.P.* Istoriya matematiki v Rossii do 1917 g. — M.: Nauka, 1968. — P. 20.
8. *Zverkina G.A.* Kirik Novgorodets (Kirik the Novgorodian): a Russian mathematician of the twelfth century // 24th International Congress of History of Science, Technology and Medicine. — Manchester, 2013. — P. 336–337
9. *Muryanov M.F.* Istoriya knizhnoy kulturyi Rossii. Ocherki. — SPb.: Izd. dom “Mir”, 2007. Chast 1.
10. *Zubov V.P.* Kirik Novgorodets i drevnerusskoe delenie chasa // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. — M.: Gostehteorizdat, 1953. — Vol 6. — P. 196–212.
11. *Milkov V.V.* Istochniki uchenosti Kirika Novgorodtsa // *Simonov R.A.* Kirik Novgorodets – russkiy ucheniy XII veka v otechestvennoy knizhnoy kulture. — M.: Nauka, 2013. — P. 222–232.
12. *Simonova A.A.* Drevnerusskoe religioznoe mirovozzrenie i irlandskaya hristianskaya traditsiya. — M.: Prometey, 2017. — P. 94–95.
13. *Milkov V.V., Simonov R.A.* Kirik Novgorodets: ucheniy i myslitel. — M.: Krug, 2011. — P. 71–77.
14. *Kirik Novgorodets* Uchenie im zhe vedati cheloveku chisla vseh let // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. — M.: Gostehteorizdat, 1953. — Vol. 6. — P. 190–191.
15. Dictionnaire d’archéologie chretienne et de liturgie. Vol. 6. — Paris, Letouzey et Ane, 1925. — Col. 2370.
16. *Gaydenko P.I., Fomina T.Yu.* O tserkovnom statuse Kirika Novgorodtsa i inyh sostaviteley “Voproshaniya” // Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Istoriya. — 2012. — Vol. 51, no. 16 (270). — P. 88.

UDC 519.217.6

Chernoff Approximation of transition kernels of Markov processes

Ya. A. Butko*

* Saarland University
Postfach 151150, D-66041, Saarbrücken, Germany

Abstract. We present a technique to approximate transition kernels of Markov processes, constructed from other, original Markov processes via a random time change. This technique is based on the Chernoff Theorem and leads to the so-called Feynman formulae which can be used for direct calculations and simulation of the considered processes.

Keywords: Approximation of transition kernels, Markov processes, a random time change, Chernoff approximation, Feynman formulae, Feynman-Kac formulae.

1. Introduction

An evolution semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ with a given generator L (on a given Banach space), on the one hand, allows to solve an initial (or initial-boundary) value problem for the corresponding evolution equation $\frac{\partial f}{\partial t} = Lf$ and, on the other hand, defines the transition probability $P(t, x, dy)$ of an underlying Markov process $(\xi_t)_{t \geq 0}$ (if there is any) through $e^{tL}f(x) = \mathbb{E}^x[f(\xi_t)] = \int f(y)P(t, x, dy)$. We present a technique of approximating evolution semigroups $(e^{tL})_{t \geq 0}$ or, respectively, transition kernels $P(t, x, dy)$ by means of the Chernoff Theorem. This theorem provides conditions¹ for a family of bounded linear operators $(F(t))_{t \geq 0}$ to approximate the considered semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ via the formula $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(t/n)]^n$. This formula is called *Chernoff approximation of the semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ by the family $(F(t))_{t \geq 0}$* . And the family $(F(t))_{t \geq 0}$ itself is called *Chernoff equivalent* to this semigroup. If families $(F(t))_{t \geq 0}$ are given explicitly, the expressions $[F(t/n)]^n$ can be directly used for calculations and hence for simulations of underlying stochastic processes. Moreover, if all operators $F(t)$ of a given family $(F(t))_{t \geq 0}$ are integral operators with elementary kernels (or pseudo-differential operators with elementary symbols) the identity $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(t/n)]^n$ leads to a representation of the semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ by limits of n -fold iterated integrals of elementary functions when n tends to infinity. Such representations are called *Feynman formulae*; the limits

¹These conditions are: $F(0) = \text{Id}$, $\|F(t)\| \leq e^{wt}$ for some $w \geq 0$ and all $t \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(F(t)\varphi - \varphi) = L\varphi$ for all $\varphi \in D$, where D is a core for the generator L .

in Feynman formulae usually coincide with functional (path) integrals with respect to probability measures (Feynman–Kac formulae) or with respect to Feynman pseudomeasures (Feynman path integrals). Therefore, the method of Chernoff approximation allows also to establish new Feynman–Kac formulae; different Chernoff approximations (in the form of Feynman formulae) for the same semigroup allow to establish relations between different path integrals. Recently, some Chernoff approximations have been constructed for transition kernels of Markov processes, obtained from some original processes by such procedures as: a random time change, subordination, killing upon leaving a given domain (see [1, 2, 4, 5]). In these constructions, it is supposed that transition kernels of original processes are known or already Chernoff approximated. This assumption holds true, e.g. for Feller processes in \mathbb{R}^n and some Feller diffusions on star graphs and compact Riemannian manifolds (cf. [3, 4, 6]). Below we present a few results, generalizing some constructions in [4] and [5].

2. Chernoff approximation for transition kernels of Markov processes obtained by a random time change

Let Q be a metric space. Let $C_b(Q)$ be the space of bounded continuous functions on Q with supremum-norm $\|f\|_\infty = \sup_{q \in Q} |f(q)|$. Let $C_\infty(Q) := \{\varphi \in C_b(Q) : \lim_{\rho(q, q_0) \rightarrow \infty} \varphi(q) = 0\}$, where q_0 is an arbitrary fixed point of Q and the metric space Q is unbounded with respect to its metric ρ . Let $C_0(Q) := \{\varphi \in C_b(Q) : \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ a compact } K_\varphi^\varepsilon \subset Q \text{ such that } |\varphi(q)| < \varepsilon \text{ for all } q \notin K_\varphi^\varepsilon\}$, where the metric space Q is assumed to be locally compact. Let the Banach space X be any of the spaces $C_b(Q)$, $C_\infty(Q)$, $C_0(Q)$. Let $(T_t)_{t \geq 0}$ be a strongly continuous semigroup on X with generator $(L, \text{Dom}(L))$. Consider a function $a \in C_b(Q)$ such that $a(q) > 0$ for all $q \in Q$. Then the space X is invariant under the multiplication operator a , i.e. $a(X) \subset X$. Consider the operator \widehat{L} , defined for all $\varphi \in \text{Dom}(\widehat{L})$ and all $q \in Q$ by

$$\widehat{L}\varphi(q) := a(q)(L\varphi)(q), \quad \text{where} \quad \text{Dom}(\widehat{L}) := \text{Dom}(L).$$

We assume that $(\widehat{L}, \text{Dom}(\widehat{L}))$ generates a strongly continuous semigroup (which is denoted by $(\widehat{T}_t)_{t \geq 0}$) on the Banach space X . The operator \widehat{L} is called a *multiplicative perturbation* of the generator L and the semigroup $(\widehat{T}_t)_{t \geq 0}$, generated by \widehat{L} , is called a *semigroup with the multiplicatively perturbed* with the function a *generator*. Some conditions assuring the existence and strong continuity of the semigroup $(\widehat{T}_t)_{t \geq 0}$ are discussed in [7, 8].

Theorem 2.1. *Let $(\widehat{L}, \text{Dom}(\widehat{L}))$ be the generator of the strongly continuous semigroup $(\widehat{T}_t)_{t \geq 0}$ on X . Let $(F(t))_{t \geq 0}$ be a strongly continuous*

family of bounded linear operators on the Banach space X , which is Chernoff equivalent to the semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$. Consider the family of operators $(\widehat{F}(t))_{t \geq 0}$ defined on X by

$$\widehat{F}(t)\varphi(q) := (F(a(q)t)\varphi)(q) \quad \text{for all } q \in Q.$$

The operators $\widehat{F}(t)$ act on the space X and the family $(\widehat{F}(t))_{t \geq 0}$ is strongly continuous and Chernoff equivalent to the semigroup $(\widehat{T}_t)_{t \geq 0}$ with multiplicatively perturbed with the function a generator, i.e. the Chernoff approximation

$$\widehat{T}_t\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} [\widehat{F}(t/n)]^n \varphi$$

is valid for all $\varphi \in X$ locally uniformly with respect to $t \geq 0$.

Example 2.2. Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a Markov process with the state space Q and transition probability $P(t, q, dy)$. Let the corresponding semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$,

$$T_t\varphi(q) = \mathbb{E}^q [\varphi(X_t)] \equiv \int_Q \varphi(y)P(t, q, dy),$$

be strongly continuous on the Banach space X , where $X = C_b(Q)$, $X = C_\infty(Q)$ or $X = C_0(Q)$. Then by Theorem 2.1 the family $(\widehat{F}(t))_{t \geq 0}$ defined by

$$\widehat{F}_t\varphi(q) := \int_Q \varphi(y)P(a(q)t, q, dy),$$

is strongly continuous and is Chernoff equivalent to the semigroup $(\widehat{T}_t)_{t \geq 0}$ with multiplicatively perturbed (with the function a) generator. Therefore, the following Feynman formula is true:

$$\begin{aligned} \widehat{T}_t\varphi(q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \cdots \int_Q \varphi(q_n)P(a(q_0)t/n, q_0, dq_1)P(a(q_1)t/n, q_1, dq_2) \times \cdots \\ \times P(a(q_{n-1})t/n, q_{n-1}, dq_n). \end{aligned}$$

And the convergence is uniform with respect to $q_0 \in Q$ and locally uniform with respect to $t \in [0, \infty)$.

Remark 2.3. The multiplicative perturbation of the generator L of the Markov process $(X_t)_{t \geq 0}$ with the function a is equivalent to the random time change $X_t \rightsquigarrow X_{\xi_t}$, where $\xi_t := \inf \{s > 0 : \int_0^s a^{-1}(X_\tau)d\tau > t\}$. Note that $\widehat{P}(t, q, dy) := P(a(q)t, q, dy)$ is not a transition probability any more. Nevertheless, if the transition probability $P(t, q, dy)$ of the original process is known, formula 2.2 allows to approximate the unknown transition probability of the modified process.

Let now $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ be a uniformly continuous mapping such that the operator $A(x)$ is symmetric for all $x \in \mathbb{R}^d$, and let there exist $a_0, A_0 \in \mathbb{R}$ such that $0 < a_0 \leq A_0 < \infty$ and for all $x, z \in \mathbb{R}^d$ holds $a_0|z|^2 \leq z \cdot A(x)z \leq A_0|z|^2$. Consider the second order elliptic operator Δ_A defined for each $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ by

$$\Delta_A \varphi(x) := \text{tr}(A(x) \text{Hess } \varphi(x))$$

Due to results of [5], the following family $(F^A(t))_{t \geq 0}$ is Chernoff equivalent to the semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$ on the space $C_\infty(\mathbb{R}^d) \equiv C_0(\mathbb{R}^d)$, generated by the closure of the operator $(L, C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d))$: $F^A(0) := \text{Id}$ and for all $t > 0$ with $\varphi \in X$ and $x \in \mathbb{R}^d$

$$F^A(t)\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^d \det A(x)}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{A^{-1}(x)(x-y) \cdot (x-y)}{4t}\right) \varphi(y) dy.$$

Combining this result with Theorem 2.1, one succeeds to weaken the assumption $a_0|z|^2 \leq z \cdot A(x)z$ for all $x, z \in \mathbb{R}^d$ and some $a_0 > 0$:

Proposition 2.4. *Let A be as before. Let $a \in C_b(\mathbb{R}^d)$ be a scalar function with $a(x) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}^d$. Consider $\widehat{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ such that $\widehat{A}(x) = a(x)A(x)$. Consider also the operator $\Delta_{\widehat{A}}$ defined for each $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ by*

$$\Delta_{\widehat{A}} \varphi(x) := \text{tr}(\widehat{A}(x) \text{Hess } \varphi(x)) = a(x) \Delta_A \varphi(x) \equiv \widehat{\Delta}_A \varphi(x).$$

Assume the existence and strong continuity of the semigroup $(T_t^{\Delta_{\widehat{A}}})_{t \geq 0}$ generated by the closure of $(\Delta_{\widehat{A}}, C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d))$ on $X = C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Consider the family $(\widehat{F}^A(t))_{t \geq 0}$ of linear operators on X defined by $\widehat{F}^A(0) := \text{Id}$ and

$$\widehat{F}^A(t)\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^d \det \widehat{A}(x)}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{\widehat{A}^{-1}(x)(x-y) \cdot (x-y)}{4t}\right) \varphi(y) dy$$

for all $t > 0$, $\varphi \in X$ and $x \in \mathbb{R}^d$. Then the family $(\widehat{F}^A(t))_{t \geq 0}$ is strongly continuous and Chernoff equivalent to the semigroup $(T_t^{\Delta_{\widehat{A}}})_{t \geq 0}$ on $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ generated by the closure of $(\Delta_{\widehat{A}}, C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d))$. Therefore, the following Feynman Formula holds for all $\varphi \in X$, all $t > 0$ and all $x_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} T_t^{\Delta_{\widehat{A}}} \varphi(x_0) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x_n) p_{\widehat{A}}(t/n, x_0, x_1) \cdots p_{\widehat{A}}(t/n, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

where

$$p_{\bar{A}}(t, x, y) := \frac{1}{\sqrt{(4\pi ta(x))^d \det A(x)}} \exp\left(-\frac{A^{-1}(x)(x-y) \cdot (x-y)}{4ta(x)}\right).$$

And the convergence is uniform with respect to $q_0 \in Q$ and with respect to $t \in (0, t^*]$ for all $t^* > 0$.

3. Conclusions

The method of Chernoff approximation can be applied to a wide class of Markov processes. In particular, it can be applied to processes obtained via a random time change from some original processes, whose transition kernels are known or already Chernoff-approximated. The constructed Chernoff approximations can be used for simulation of the considered time-changed processes.

References

1. *Butko Ya.A.* Chernoff approximation for semigroups generated by killed Feller processes and Feynman formulae for time-fractional Fokker–Planck–Kolmogorov equations // ArXiv 1708.02503. — 2017.
2. *Butko Ya.A.* Chernoff approximation of subordinate semigroups // Stoch. Dyn. — 2017. — Article ID 1850021. — 19 p.
3. *Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G.* Feynman formulae and phase space Feynman path integrals for tau-quantization of some Lévy-Khintchine type Hamilton functions. // J. Math. Phys. — 2016. — Vol. 57. — Article ID 023508. — 22 p.
4. *Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G.* Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. — 2012. — Vol. 15, no. 3. — Article ID 1250015. — 26 p.
5. *Butko Ya.A., Grothaus M., and Smolyanov O.G.* Lagrangian Feynman formulae for second order parabolic equations in bounded and unbounded domains // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. — 2010. — Vol. 13, no. 3. — P. 377–392.
6. *Butko Ya.A.* Feynman formulas and functional integrals for diffusion with drift in a domain on a manifold // Math. Notes. — 2008. — Vol. 83, no. 3. — P. 301–316.
7. *Dorroh J.R.* Contraction semi-groups in a function space // Pacific J. Math. — 1996. — Vol. 19. — P. 35–38.
8. *Lumer G.* Perturbation de générateurs infinitésimaux, du type “changement de temps” // Ann. Inst. Fourier. — 1973. — Vol. 23, no. 4. — P. 271–279.

The Particles Population Propagation in Catalytic Branching Random Walk

E. VI. Bulinskaya*

* *Faculty of Mathematics and Mechanics,
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. For a supercritical catalytic branching random walk on \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, with an arbitrary finite catalysts set we study the spread of particles population as time grows to infinity. Namely, we divide by t the position coordinates of each particle existing at time t and then let t tend to infinity. It is shown that in the limit there are a.s. no particles outside the closed convex surface in \mathbb{R}^d which we call the propagation front and, under condition of infinite number of visits of the catalysts set, a.s. there exist particles on the propagation front. Recent strong limit theorems for total and local particles numbers established by the author play an essential role. The results obtained develop ones by Ph.Carmona and Y.Hu (2014) devoted to the spread of catalytic branching random walk on \mathbb{Z} .

Keywords: branching random walk, supercritical regime, spread of population, propagation front, many-to-one lemma.

1. Main section

We consider a catalytic branching random walk (CBRW) on \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, with catalysts located at an arbitrary finite set $W \subset \mathbb{Z}^d$. Outside the set W a particle performs an ordinary random walk (in continuous time) generated by matrix $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$. Being at a catalyst particles may either leave it or produce offspring according to a probability law depending on the catalyst. We have shown (see [1]) that combination of different characteristics of the random walk and branching at the catalysts set may lead to supercritical, critical or subcritical behavior of particles population. In particular, only in the supercritical regime with positive probability the total and local particles numbers jointly grow exponentially with some rate $\nu > 0$ (called the Malthusian parameter) as time tends to infinity. Thus in this case it is interesting to study the asymptotic shape of particles population propagation.

To establish almost sure results we assume that conditions in [2] describing the homogeneous in space and time CBRW hold (with $a(x, y) = a(0, y - x)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$) and also the Cramér condition is satisfied, i.e.

$$H(u) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{\langle u, x \rangle} a(0, x) < \infty, \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stands for the inner product in \mathbb{R}^d . Introduce the sets $R := \{u \in \mathbb{R}^d : H(u) = \nu\}$,

$$O_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, r \rangle > \nu + \varepsilon \text{ for at least one } r \in R\}, \quad \varepsilon \geq 0,$$

$$Q_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, r \rangle < \nu - \varepsilon \text{ for any } r \in R\}, \quad \varepsilon \in [0, \nu).$$

Let $B := \partial Q_0 (= \partial O_0)$ and $N(t) \subset \mathbb{Z}^d$ be the (random) set of particles existing in CBRW at time $t \geq 0$. For a particle $v \in N(t)$, denote by $X_v(t)$ its position in \mathbb{Z}^d at time t . Introduce also the random set $I = \{\omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} \{v \in N(t) : X_v(t) \in W\} \neq \emptyset\}$. The supercritical regime of CBRW guarantees that $P_x(I) > 0$ where index $x \in \mathbb{Z}^d$ denotes the starting point of CBRW.

The following new result of [2] extends the corresponding one from [3].

Theorem 1 *Let a supercritical CBRW with Malthusian parameter $\nu > 0$ satisfy the above mentioned conditions. Then, for any $x \in \mathbb{Z}^d$ and $t \rightarrow \infty$, one has*

$$P_x(\omega : \forall \varepsilon > 0 \exists t_0 = t_0(\omega, \varepsilon) \text{ s.t. } \forall t \geq t_0 \text{ and } \forall v \in N(t), X_v(t)/t \notin O_\varepsilon) = 1,$$

$$P_x(\omega : \forall \varepsilon \in (0, \nu) \exists t_1 = t_1(\omega, \varepsilon) \text{ s.t. } \forall t \geq t_1 \exists v \in N(t), X_v(t)/t \notin Q_\varepsilon | I) = 1.$$

This Theorem means that if we divide the position coordinates of each particle existing in CBRW at time t by t and then let t tend to infinity, then in the limit there are a.s. no particles outside the set $B \cup Q_0$ and under condition of infinite number of visits of catalyts there are a.s. particles on B . In this sense it is natural to call the border B the *propagation front* of the particles population. Various examples are considered as well.

Mention in passing that related models and characteristics are also studied in [4] and [5]. However, in contrast to our results, the authors of those papers do not deal with the a.s. convergence.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 17-01-00468.

References

1. *Bulinskaya E. Vl.* Complete classification of catalytic branching processes // Theory Probability and its Applications. — 2015. — Vol. 59, no. 4. — P. 545–566.
2. *Bulinskaya E. Vl.* Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice // arXiv:1606.01285v1 [math.PR]. — 2016.
3. *Carmona Ph., Hu Y.* The spread of a catalytic branching random walk // Annales de l'Institut Henri Poincaré. — 2014. — Vol. 50, no. 2. — P. 327–351.

4. *Molchanov S. A., Yarovaya E. B.* Branching processes with lattice spatial dynamics and a finite set of particle generation centers // *Doklady Mathematics*. — 2012. — Vol. 446, no. 3. — P. 259–262.
5. *Topchii V. A., Vatutin V. A.* Catalytic branching random walks in \mathbb{Z}^d with branching at the origin only // *Siberian Advances in Mathematics*. — 2013. — Vol. 23, no. 2. — P. 123–153.

UDC 519.218, 519.873, 621.391

Non-standard randomized multiple access transmission protocols: stability and optimization

Sergey Foss^{*†‡}

^{*} *School of Mathematical and Computer Sciences, Heriot-Watt University, Riccarton Campus, Edinburgh, EH14 4AS, United Kingdom*

[†] *Department of Mechanics and Mathematics, Novosibirsk State University, Pirogova 1, Novosibirsk, 630090, Russia*

[‡] *Sobolev Institute of Mathematics, Koptiyug prospect 4, Novosibirsk, 630090, Russia*

Abstract. I plan to introduce two new multiple access systems:

- systems with energy harvesting and
- systems with multiple departure.

In the systems of the first type, each transmission attempt (successful or not) needs a unit of energy that comes from a constrained source. We show that energy restrictions may increase the stability region of randomized transmission protocols.

In the systems of the second type, there is a geographic spread of users, and neighbouring users provide similar information, so given a successful transmission of a user message, not only this user, but also all its neighbours leave the system. We consider three types of transmission protocols: centralized protocols, decentralized protocols with ternary feedback (empty slot/success/collision) and decentralized protocols with unusual binary feedback (success/non-success). We analyze stability conditions and optimize protocol parameters.

The talk is based on joint papers [1] and [2] with Andrey Turlikov and Maxim Grankin (St.-Petersburg) and with Dmitriy Kim (Almaty).

Keywords: random multiple access, stability, energy harvesting, multiple departure.

Acknowledgments

The work is partially supported by RNF grant No 17-11-01173.

References

1. *Foss S., Kim D., Turlikov A.* Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — Vol. 13, no. 1. — P. 16–25.
2. *Foss S., Grankin M., Turlikov A.* Spatial random multiple access with multiple departure // Proceedings of 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). — P. 2728–2731. — arxiv.org/abs/1704.07155.

Branching processes in random environment

V. A. Vatutin*

* *Department of Discrete Mathematics,
Steklov Mathematical Institute
Gubkin street 8, Moscow, Russia*

Abstract. The talk presents the known results on the asymptotics of the survival probability and limit theorems conditioned on survival of critical and subcritical branching processes in independent and identically distributed random environments.

Keywords: branching processes in random environment, survival probability, limit theorems.

Branching processes in random environment (BPRES) are difficult probabilistic objects the investigation of which requires essential efforts. For the first time the model of a BPRES was considered by Smith and Wilkinson [3] in 1969. Then Athreya and Karlin [1], [2] in 1971 have studied BPRES. Since then a great number of articles have been published investigating the behavior of branching processes in random environment. In short words, a BPRES is a stochastic population model where individuals constituting a generation reproduce independently according to a common offspring distribution. The random environment feature of the model means that the reproduction laws randomly change from one generation to the other. In our talk we summarize some recent findings on critical and subcritical discrete time BPRES under a key assumption that the reproduction laws of particles of different generations are independent and identically distributed. The results we plan to mention are mainly due to the joined efforts of the Russian-German team of researchers consisting of V. Afanasyev, C. Boinghoff, V. Vatutin, E. Dyakonova, J. Geiger, G. Kersting, K. Fleischmann, V. Wachtel. The talk is based on two recent surveys and attracts some earlier results included in an earlier survey [6].

References

1. *Athreya K.B., Karlin S.* On branching processes with random environments, I: Extinction probability // *Ann. Math. Statist.* — 1971. — Vol. 42. — P. 1499-1520.
2. *Athreya K.B., Karlin S.* On branching processes with random environments, II: Limit theorems // *Ann. Mat. Statist.* — 1971. — Vol. 42. — P. 1843-1858.
3. *Smith W.L., Wilkinson W.E.* On branching processes in random environments // *Ann. Math. Stat.* — 1969. — Vol. 40. — P. 814-827.

-
4. *Vatutin V.* Subcritical Branching Processes in a Random Environment // I.M. del Puerto et al. (eds.) Branching Processes and Their Applications, Lecture Notes in Statistics. — Springer, 2016. — Vol. 219. — P. 97–115.
 5. *Vatutin V.A., Dyakonova E.E, Sagitov S.* Evolution of Branching Processes in a Random Environment // Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — Vol. 282. — P. 220–242.
 6. *Vatutin V.A., Zubkov A.M.* Branching processes, II // J. Sov. Math. — 1993. — Vol. 67. — P. 3407–3485.

О надежности по постепенным отказам: функционально-параметрический подход

О. В. Абрамов*

** Лаборатория управления надежностью сложных систем,
Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного
отделения РАН,
ул. Радио 5, Владивосток, Россия, 690041*

Аннотация. В работе обсуждаются основные положения функционально-параметрического подхода теории надежности, а также возможности и перспективы использования этого подхода в задачах обеспечения надежности аналоговых технических устройств и систем. Показано, что для решения задач анализа и обеспечения надежности целесообразно использовать вычислительную технологию параллельных и распределенных вычислений. Обсуждается идея построения эффективных параллельных алгоритмов многовариантного анализа, необходимого для вычисления статистических оценок вероятности безотказной работы при различных номинальных значениях внутренних параметров. Предложен и исследован параллельный аналог метода статистических испытаний и алгоритм дискретного поиска номинальных значений параметров, доставляющих максимум вероятности безотказной работы.

Ключевые слова: надежность, постепенный отказ, случайный процесс, параметрический синтез, вычислительные методы, параллельные методы, компьютерное моделирование.

1. Введение

В современной теории надежности можно выделить несколько методологических направлений, доминирующее положение среди которых занимает вероятностно-статистическое направление. Методология вероятностно-статистического подхода базируется на эмпирически установленном факте статистической устойчивости частоты отказов, позволяющем активно использовать методы теории вероятностей и теории массового обслуживания. Расчет надежности в рамках этого направления основан на построении структурной схемы надежности исследуемой системы (модели надежности), при этом для каждого элемента и системы в целом допускаются обычно лишь два возможных состояния – работоспособности или отказа. Таким образом, любая реальная система при расчетах ее надежности заменяется некоторой логической (булевой) моделью. Методы вероятностно-статистического подхода достаточно просты и удобны для инженерных расчетов, но их использование не дает положительных результатов при решении задачи обеспечения надежности уникальных объектов и систем ответственного назначения, для которых отказы не являются массовым и статистически устойчивым явлением.

Наиболее общим и перспективным представляется исследование вопросов надежности технических систем с позиций теории блуждания точки в фазовом пространстве. Модель надежности этого типа была предложена Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляевым и А.Д. Соловьевым в работе [1]. Она позволила обнаружить глубокую связь теории надежности с общей теорией случайных функций и сформулировать методологию подхода, который будем называть функционально-параметрическим подходом.

2. Основные положения и методы функционально-параметрического подхода

Функционально-параметрический (ФП) подход естественным образом следует из общепринятого определения надежности как свойства объекта сохранять в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих его способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения. В соответствии с этим определением модель для определения надежности должна отражать связь показателей надежности с выполняемыми объектом функциями, условиями эксплуатации и временем.

В основу ФП-подхода положены следующие основные принципы [2,3].

1. Процесс функционирования объекта и его техническое состояние в любой момент времени определяются конечным набором некоторых переменных – параметров объекта.

2. Любая техническая система, выполняя определенные функции, находится во взаимодействии с окружающей средой, человеком, подсистемой управления, компонентами технологического процесса (обрабатываемые материалы, сырье, энергия, реагенты и т.д.). При этом возникают разнообразные причинно-следственные связи как формы проявления универсальной связи явлений в природе.

3. Накопление различных воздействий на систему приводит к эволюции ее показателей (изменениям параметров) и вследствие этого к возможности перехода в иное качественное состояние.

4. Технический объект невозможно изолировать от влияния внешней среды, в которой он работает, нельзя остановить процессы, протекающие в нем при осуществлении рабочих функций, исключить последствия технологических процессов, применявшихся при его изготовлении. Все виды энергии – механическая, тепловая, химическая, электромагнитная – воздействуют на объект и вызывают в нем обратимые и необратимые процессы, изменяющие (ухудшающие) его начальные характеристики.

5. Отказы являются следствием отклонений параметров от их исходных (номинальных, расчетных) значений. Формой проявления отказа является выход параметров за пределы области допустимых значений (области работоспособности).

6. Если процессы изменения параметров наблюдаемы, прогнозируемы и управляемы, то существует принципиальная возможность предотвращения отказов.

В рамках ФП-подхода задачи расчета и обеспечения надежности, возникающие на этапах проектирования, производства и эксплуатации, взаимосвязаны: все они могут быть представлены как разновидности задачи управления случайными процессами. Их решение должно основываться на результатах прогнозирования процессов изменения параметров (технического состояния) и надежности исследуемых объектов. При разработке методов прогнозирования и управления необходимо учитывать как специфику случайных процессов дрейфа параметров (они относятся к классу нестационарных и локально управляемых), так и особенности самого управления, которое имеет вид импульсной коррекции.

Таким образом, при решении задачи обеспечения надежности технических объектов на основе ФП-подхода необходимо учесть возможные отклонения параметров от расчетных значений, предсказать последствия этих отклонений и разработать комплекс мероприятий, обеспечивающих требуемые характеристики объекта в условиях этих отклонений. Нетрудно заметить, что в рамках концептуальной модели ФП-подхода расчет (обеспечение) надежности является естественным продолжением обычных инженерных расчетов на этапе проектирования.

Обеспечение надежности в рамках ФП-подхода основано на создании и оптимальном использовании запасов (резервов) допустимых вариаций параметров системы, контроле определяющих параметров, прогнозировании изменений параметров с целью предотвращения их выхода за допустимые пределы и коррекции параметров, осуществляемой в виде настроек или замен элементов, выработавших свой ресурс. Задачи обеспечения надежности удастся при этом представить в несколько расширенной форме задач оптимального параметрического синтеза (ОПС). Суть ОПС состоит в поиске таких начальных (номинальных) значений параметров элементов системы (внутренних параметров), при которых обеспечивается максимальная вероятность выполнения условий работоспособности в течение заданного времени эксплуатации [4].

Математическая и вычислительная сложность методов расчета и обеспечения надежности технических систем с учетом закономерностей случайных процессов вариаций их параметров, трудность получения необходимой исходной информации о параметрических возмущениях породили определенный пессимизм в отношении практической полезности (конструктивности) методов ФП направления. Вместе с

тем в последние годы стал активно развиваться достаточно радикальный путь сокращения трудоемкости решения сложных вычислительных задач, в основе которого лежит идея распараллеливания процессов поиска конечного результата. В настоящее время накоплен определенный опыт создания алгоритмических и программных средств расчета и оптимизации параметрической надежности проектируемых технических устройств и систем, основанных на использовании технологии параллельных и распределенных вычислений. Для преодоления сложностей, связанных с дефицитом или отсутствием информации о закономерностях случайных процессов изменения параметров исследуемых систем, возможны решения, основанные на привлечении идей робастности и минимакса. Другими словами, необходимый уровень надежности обеспечивается либо созданием систем, нечувствительных к вариациям из параметров (робастных), либо в результате придания им необходимого запаса работоспособности, который учитывает наиболее неблагоприятные вариации параметров исследуемой системы.

Обсуждается идея построения эффективных параллельных алгоритмов многовариантного анализа, необходимого для вычисления статистических оценок вероятности безотказной работы при различных номинальных значениях внутренних параметров.

Предложен и исследован параллельный аналог метода статистических испытаний (Монте-Карло) и алгоритмы дискретного поиска номинальных значений параметров, доставляющих максимум вероятности безотказной работы [5].

При программной реализации параллельных алгоритмов представляется целесообразным использование возможностей как современных многопроцессорных вычислительных систем, так и распределенных многомашинных комплексов, связанных локальной сетью. Реализация подобных алгоритмов на многопроцессорных машинах, работающих под управлением операционных систем, поддерживающих многопоточность, не вызывает принципиальных затруднений. В то же время, в распределенных гетерогенных средах, необходимо самостоятельно реализовать механизмы загрузки данных, синхронизации процессов и балансировки вычислительной нагрузки между компонентами комплекса. Главным критерием качества распараллеливания вычислений является сокращение общего времени решения задачи. Возможности для распараллеливания вычислений ограничиваются не только числом имеющихся процессоров, но и особенностями вычислительного алгоритма, который может оказаться принципиально последовательным. В задачах анализа и оптимизации параметрической надежности используется модель передачи сообщений и, так называемая, master-slave парадигма параллельного программирования. Один из процессоров назначается главным (master), он производит динамическую балансировку загрузки, рассылает задания остальным подчиненным процессорам (slave), формирует результаты. Распараллеливание базируется

на декомпозиции последовательного алгоритма вычислений, в качестве единицы параллелизма выступает задача однократного расчета модели системы (моделирования системы).

Реализация предлагаемых параллельных алгоритмов анализа и оптимизации параметрической надежности осуществлена на вычислительном кластере IRUS17.

3. Заключение

В данной работе мы постарались сформулировать основы подхода, который бы объединил традиционные для теории и практики схемотехнического проектирования аналоговых технических систем функциональные модели с задачами обеспечения надежности по постепенным (параметрическим) отказам. Такой подход был назван функционально-параметрическим. Обеспечение надежности в рамках ФП-подхода основано на создании и оптимальном использовании запасов (резервов) допустимых вариаций параметров системы, контроле определяющих параметров, прогнозировании изменений параметров с целью предотвращения их выхода за допустимые пределы и коррекции параметров, осуществляемой в виде настроек или замен элементов, выработавших свой ресурс. Задачи обеспечения надежности удалось при этом представить в несколько расширенной форме задач параметрического синтеза.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
2. Абрамов О. В. Функционально-параметрический подход в задачах обеспечения надежности технических систем // Надежность и контроль качества. — 1999. — No. 5. — С. 34–45.
3. Абрамов О. В. Возможности и перспективы функционально-параметрического направления теории надежности // Информатика и системы управления. — 2014. — No. 4. — С. 53–66.
4. Абрамов О. В. Методы и алгоритмы параметрического синтеза стохастических систем // Проблемы управления. — 2006. — No. 4. — С. 3–8.
5. Абрамов О. В. Параллельные алгоритмы расчета и оптимизации надежности по постепенным отказам // Автоматика и телемеханика. — 2010. — No. 7. — С. 126–135.

The reliability for gradual failure: functional-parametrical approach

O.V. Abramov*

** Laboratory of management of reliability of complex systems,
Institute of Automation and Control Processes Far Eastern Branch RAS,
Radio St. 5, Vladivostok, 690041, Russia*

The paper discusses the main provisions of the functional-parametrical approach of reliability theory, as well as possibilities and perspectives of using this approach in the task of ensuring the reliability of analog technical devices and systems. It is shown that for solving problems of analysis and ensuring of reliability appropriate to use computing technology parallel and distributed computing. Discusses the idea of constructing efficient parallel algorithms multivariate analysis necessary to calculate statistical estimates of the probability of failure-free operation at different nominal values of internal parameters. Proposed and investigated a parallel analogue of the method of statistical tests and discrete search algorithm, the nominal values of the parameters, delivering the maximum reliability.

Keywords: reliability, gradual failure, random process, parametric synthesis, computational methods, parallel methods, computer simulation.

Вероятностные модели метаданных

А. А. Грушо*, Е. Е. Тимонина*, С. Я. Шоргин*

** Институт проблем информатики,
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук,
ул. Вавилова, д.44, стр. 2, Москва, Россия, 119333*

Аннотация. Для обеспечения информационной безопасности сетевых взаимодействий ранее было предложено управлять сетевыми соединениями с помощью метаданных. Метаданные содержат информацию о допустимых взаимодействиях задач и расположениях приложений для их решения в распределенной сети. В работе рассмотрена атака на сеть из захваченного хоста, использующая вероятностную модель функционирования метаданных.

Ключевые слова: вероятностные модели, сетевые метаданные, информационная безопасность.

1. Введение

Возможности математического моделирования вычислительных процессов позволяют проводить глубокое тестирование этих процессов, и тем самым гарантировать их правильность в решении задач [1]. Однако пользоваться такими моделями для контроля вычислительных процессов в распределенных информационно-вычислительных системах (РИВС) практически невозможно, т.к. такой контроль является трудоемким процессом. Отсюда возникает идея использования части информации (метаданные), заложенной в математических моделях для быстрого управления соединениями в сети и снижения угроз информационной безопасности. Однако возможны новые угрозы.

В работе рассмотрена атака на сеть из захваченного хоста, использующая вероятностную модель функционирования метаданных.

2. Модель метаданных

Рассмотрим модель РИВС в виде следующей иерархической декомпозиции. Работа, выполняемая РИВС, сводится к решению задач, реализуемых приложениями. Решение задач состоит из трех процессов:

- сбор информации, для решения задачи (исходные данные);
- обработка информации на компьютерах с помощью программного обеспечения (приложений);
- распределение результатов обработки информации.

Информационные технологии можно представить в виде множества задач. Будем объединять информационные технологии и задачи в один верхний уровень иерархической декомпозиции. На нижнем уровне иерархической декомпозиции находятся компьютеры и сеть. В компьютерах находятся информационные ресурсы и решаются задачи.

Компьютер, как узел сети, называется хостом. Различные задачи можно решать на различных хостах сети. Тогда сеть позволяет собирать исходные данные для задач, и распределять результат обработки.

Политика безопасности РИВС требует контроля взаимодействий хостов в сети, который сводится к мониторингу взаимодействий и управлению соединениями. Контроль взаимодействий хостов в сети позволяет снизить угрозы внедрения и распространения вредоносного кода через сетевое оборудование и каналы связи. В работах [2, 3] управление взаимодействиями хостов в сети предлагается реализовать с помощью метаданных.

Предположим, что для РИВС создана математическая модель, определяющая все действия системы для выполнения требуемых вычислений или работ. Например, это может быть диаграмма UML (Unified Modeling Language) [4] коммуникаций, несущая информацию о “линии жизни” [4]. Аналогичная полная информация о выполнении работы может быть представлена диаграммами PERT (Program (Project) Evaluation and Review Technique) [5], а также сетями Петри [6] и структурами со многими связями [7]. От модели требуется, чтобы во всех указанных случаях была возможность вычислить, какой блок O_l , $l = 1, \dots, t$, задач и с какими исходными данными надо решать на очередном этапе вычислительного процесса, а также переходы от блока к блоку. Задачу отслеживания переходов от блока к блоку назовем \mathcal{C} . Она отслеживает старт каждого блока, обеспеченность блока исходными данными, окончание работы блока и формирование исходных данных для следующего блока.

Обозначим множество задач блока O_l , $l = 1, \dots, t$, выполняемой работы через Ω_l , $l = 1, \dots, t$, и рассмотрим на нем множество поименованных подзадач блока, которое можно представить в виде дерева. Корнем дерева является задача всего блока O_l . Введем бинарное отношение порождения (A_i, A_j) , где на первом месте в паре фигурирует задача, которая определяет запуск задачи, стоящей на втором месте. Ясно, что это бинарное отношение однозначно определяется моделями блоков. Полученное дерево можно рассматривать как полурешетку, в которой исходные данные могут передаваться через соответствующие верхние грани.

Многие задачи решаются (обеспечены ПО и информационными ресурсами) на тех же хостах, где расположены задачи, их порождающие. Однако часть задач может быть решена только на других хостах сети.

Определим операцию сжатия дерева следующим образом. Если в порождении (A_i, A_j) задача A_j решается на том же компьютере, что и задача A_i , то эти вершины объединяются под именем A_i , а ребро

ликвидируется. Разумеется, задача A_i имеет в памяти название задачи A_j и последующие задачи, попавшие в нее при сжатии.

Лемма. *В результате последовательного применения сжатия к исходному дереву остается сжатое дерево, смежные вершины которого определяют задачи, решаемые на разных хостах.*

Доказательство. Пусть задача A в сжатом дереве решается на хосте $H(A)$. Если смежная с A вершина, находящаяся ниже в сжатом дереве, решается на хосте $H(A)$, то это ребро подлежит сжатию. Поэтому эта смежная вершина не может находиться в сжатом дереве, или она определяет задачу на другом хосте. Лемма доказана.

Множество задач $\Omega_l, l = 1, \dots, t$, разбивается на непересекающиеся классы таким образом, что задачи одного класса решаются на одном компьютере. Множество ребер в сжатом дереве будем обозначать $\mathcal{B}_l, l = 1, \dots, t$, и называть *метаданными* блока $O_l, l = 1, \dots, t$. Задача из \mathcal{C} определяет переход в управлении сети к очередному множеству метаданных.

Для задач, входящих в отношение \mathcal{B}_l , определим три дополнительные задачи $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}$, которые управляют взаимодействиями в сети на основе метаданных \mathcal{B}_l . Задача \mathcal{M} распределяет приложения для решения задач между хостами, для простоты будем говорить о распределении задач на хостах. Задача \mathcal{M} определяет бинарное отношение $H(A)$, означающее, что на хосте H может вычисляться задача A . Результаты задачи \mathcal{M} используются задачей \mathcal{N} . Задача \mathcal{N} поддерживает связь с каждым хостом, и отвечает за разрешение и предоставление хостам информации по запросу о взаимодействии задач на разных хостах. Разрешение основывается на метаданных \mathcal{B}_l . Задача \mathcal{R} строит основной и резервный маршруты по заданию задачи \mathcal{N} . Например, \mathcal{R} находится в контроллере сети SDN (Software-Defined Network).

Пусть на хосте $H(A)$ легально запущена задача A . Задача A_1 находится в отношении порождения (A, A_1) и расположена на другом хосте. На каждом хосте H есть агент с криптографическими средствами и ключом $k(H)$ для связи с хостом $H(N)$. Причем для каждого H соединение с $H(N)$ поддерживается постоянно.

Для обращения к задаче A_1 задача A через агента хоста $H(A)$ связывается с задачей \mathcal{N} , которая определяет наличие порождения (A, A_1) . Тогда на хост $H(A_1)$ через агента этого хоста направляется информация о необходимости соединения с $H(A)$, ключ $k((A, A_1))$ для защиты этого соединения, идентификатор, порт, время. Аналогичная информация направляется на хост $H(A)$. После выполнения задачи A_1 задача A получает результаты от A_1 , а соединение $H(A)$ с $H(A_1)$ разрывается.

Алгоритм управления сетью с помощью метаданных однозначно определяет порядок решения задач в каждом блоке, т.к. переход на другие хосты однозначно определен решаемыми задачами, которые в свою очередь определяются выполнением задач всего блока.

Рассмотрим вопросы информационной безопасности в данной схеме. Ранее в [2, 3] отмечалось, что с помощью метаданных удастся избежать ряда существенных атак. Однако угроза захвата хоста была рассмотрена не полностью.

Предположим, что противник захватил хост, содержащий задачи из множества Ω_l . Рассмотрим атаку на сеть, управляемую метаданными \mathcal{B}_l . Пусть в дереве задач Ω_l задача A находилась на захваченном хосте $H(A)$, и до сжатия порождала затем поглощенную задачу A_1 . Теперь противник при необходимости перехода от A к A_1 инициирует запрос к задаче \mathcal{N} о сетевом соединении с задачей A_1 . Естественно, в метаданных \mathcal{B}_l нет разрешения на такую связь через сеть. Тогда хост $H(A)$ получает отказ в инициации соединения, и вычислительный процесс останавливается.

Допустим, что возможен повторный запрос, который отклоняется по той же причине. Выход из тупика возможен только при обращении к задаче \mathcal{M} , которая через задачу \mathcal{N} сообщает задаче A о необходимости решать задачу A_1 на хосте $H(A)$. Если задача A опять обращается к задаче \mathcal{N} за разрешением на соединение с хостом $H(A_1)$, то задача \mathcal{M} меняет статус задачи A_1 и ее соединений таким образом, чтобы разместить ее решение на другом хосте. В этом случае метаданные \mathcal{B}_l меняются, и запрос может быть удовлетворен.

Однако это единственное решение выхода из тупика останавливает работу сети на реконфигурацию и построение новых маршрутов. Если для простоты предположить, что все временные затраты на запросы и ответы распределены экспоненциально с параметром λ , а время реконфигурации распределено экспоненциально с параметром $\lambda_1 \ll \lambda$, то среднее время задержки вычислений равно $\frac{8}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}$. Здесь число 8 определяется четырехкратным повторением протокола пересылки данных между захваченным хостом и хостом $H(\mathcal{N})$ (отдельно туда и отдельно обратно).

Атака может быть повторена с другими задачами, и только анализ компьютерного мониторинга на хосте $H(A)$ может определить причину сбоя в этом хосте.

3. Заключение

Управление соединениями хостов с помощью метаданных [2, 3] дает возможность решения многих проблем информационной безопасности. Однако это не исчерпывает множества угроз для РИВС.

В представленной работе рассмотрена возможность захвата хоста противником, и рассмотрена вероятностная модель атаки на сеть в этом случае. Хотя в статье приведен метод противодействия атаке на сеть, управляемую метаданными, вероятность больших временных задержек остается высокой.

Благодарности

Работа поддержана грантом РНФ № 16-11-10227.

Литература

1. Самуйлов К. Е., Чукарин А. В., Яржина Н. В. Бизнес-процессы и информационные технологии в управлении телекоммуникационными компаниями. – М.: Альпина Паблишерз, 2009.
2. Grusho A. A., Timonina E. E., Shorgin S. Ya. Modelling for Ensuring Information Security of the Distributed Information Systems // Proceedings of 31th European Conference on Modelling and Simulation ECMS 2017, May 23rd–29th, 2015, Budapest, Hungary. – Digitaldruck Pirrot GmbH, Germany, 2017. – P. 656–660.
3. Grusho A., Grusho N., Zabezhailo M., Piskovski V., Timonina E. Information Security of SDN on the Basis of Meta Simulation // Proceedings of 7th International Conference on Mathematical Methods, Models, and Architectures for Computer Network Security (MMM-ACNS 2017), Warsaw, Poland, 2017 (to be published).
4. Буч Г., Якобсон А., Рамбо Дж. UML. – Классика CS.– 2-е изд. / Пер. с англ.: Под общей редакцией проф. С. Орлова. – СПб.: Питер, 2006.
5. Танаев В. С., Шкурба В. В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975.
6. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
7. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.1: Основные алгоритмы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1976.

UDC 519.248:004.056

Probabilistic Models of Meta Data

A. A. Grusho*, E. E. Timonina*, S. Ya. Shorgin*

** Institute of Informatics Problems,
Federal Research Center “Computer Science and Control”
of the Russian Academy of Sciences,
Vavilova str. 44, Moscow, 119333, Russia*

For support of information security of network interactions earlier a control of network connections by means of meta data was offered. Meta data contain information on admissible interactions of tasks and positions of applications for their decision in a distributed network. In the paper the attack to a network from a captured host using a probability model of meta data is considered.

Keywords: probability models; network security; control meta data.

UDC 519.216

From the Pseudo-Poisson Processes with the Random Intensity to the Fractional Brownian Motion

O. V. Rusakov*

* *Department of Probability and Mathematical Statistics, Math & Mech,
Saint-Petersburg State University,
Universitetskii Prospect, 28, Saint-Petersburg, Staryi Petergoff, 198504, Russia*

Abstract. We consider a Pseudo-Poisson process, when the leading Poisson process has a random intensity. Under an appropriate distribution for the random intensity the corresponding Pseudo-Poisson process possesses a covariance of the fractional Ornstein-Uhlenbeck process. Applying to the Pseudo-Poisson processes with the considered random intensity the Lamperti transform and then the Central Limit Theorem for vectors we obtain the fractional Brownian motion as a limit in a sense of weak convergence of finite dimensional distributions.

Keywords: Pseudo-Poisson process, Laplace transform, Lamperti transform, fractional Ornstein-Uhlenbeck process, fractional Brownian Motion .

1. Introduction

Pseudo-Poisson processes are introduced in the famous monograph of W.Feller, chapter X [1]. As defined in this monograph Pseudo-Poisson process represents a continuous random change (the Poisson randomization) of the “mathematical” time of a Markov sequence. So, Pseudo-Poisson process is a type of subordinators for random sequences, when the leading process is a Poisson one. We consider a generalization of the leading Poisson processes to the case of random intensity. Thus our subordination is driven by a Double Stochastic Poisson process, and such kind of subordinator for sequences we call as “Double Stochastic Pseudo-Poisson Process” or “Double Stochastic Poisson Stochastic Index process” (DS PSI process).

Key lemma states that in the case when the subordinated sequence consists of i.i.d. random variables with a finite variance the corresponding Double Stochastic Pseudo-Poisson process has a property of stationarity in the both wide and strict senses, and the covariance function is the Laplace transform of the random intensity. For a special type of discrete distribution for the random intensity the corresponding covariance function of the Double Stochastic Pseudo-Poisson process coincides with the covariance function for the Gaussian short-memory fractional Ornstein-Uhlenbeck (fO-U) process (on definition and main properties of fOU we refer to [2]), i.e. for the Gaussian fO-U process with the Hurst parameter $0 < H < 1/2$. The well known fact is that the Lamperti transform [3] for the fO-U process allows us to obtain the fractional Brownian motion (fBm) process of the same Hurst parameter. Taking the driving Double Stochastic Poisson process with the such kind of type of distribution for the random intensity and applying this driving process to the subordination

of the “mathematical” time of the random sequence with the terms having an arbitrary distribution of “the 2nd order” we obtain the stationary in a wide sense process with the same covariance as for the fO-U process with $0 < H < 1/2$. Next, applying the Lamperti transform to the corresponding Double Stochastic Pseudo-Poisson process we obtain a self-similar process with the stationary in a wide sense increments, with coefficient of self-similarity $0 < H < 1/2$, and with the truncations having the appropriate scaling distribution of the term of the subordinated sequence. Finally, under summation of independent copies of the Lamperti transformed DS PSI processes, normalized with $1/\sqrt{N}$, as a result of CLT we obtain as a limit (in a sense of the weak convergence of finite dimensional distributions) the Gaussian fractional Brownian motion process (fBm). Note, that summation of independent copies, normalized with $1/\sqrt{N}$, of the DS PSI processes without Lamperti transformations results in a limit fO-U process in a sense of so called “Upstairs representation” [4].

2. Main section

Let $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ be a probability space, $\omega \in \Omega$. Let $(\xi) = (\xi_j)$, $j = 0, 1, \dots$, be a random sequence, $\Pi_1(s)$, $s \in \mathbf{R}_+$ be the “standardized” Poisson process with the intensity 1, $\lambda(\omega)$ be a strictly positive random variable with the distribution function $F_{\lambda(\omega)}(x)$, $x > 0$. Assume that $\{(\xi), \Pi_1, \lambda(\omega)\}$ are jointly independent. We use the notation $\lambda(\omega)$ to differ the case of a random intensity from the case $\lambda = const$.

Definition 1. We define a Poisson subordinator with a random intensity $\lambda(\omega)$ for the sequence (ξ) , or Double Stochastic Pseudo-Poisson Processes with a random intensity $\lambda(\omega)$ which is drawn at the initial time by the following change of time of (ξ)

$$\psi_{\lambda(\omega)} = \psi_{\lambda(\omega)}(s) = \psi(s; \lambda(\omega)) \triangleq \xi_{\Pi_{\lambda(\omega)}(s)}, \quad s \in \mathbf{R}_+,$$

where

$$\Pi_{\lambda(\omega)}(s) \triangleq \Pi_1(s\lambda(\omega)).$$

In this paper we consider (ξ) consisting of i.i.d. random variables, $\mathbf{E}\xi_0 = 0$, $\mathbf{D}\xi_0 = 1$. The following key lemma states that the process $\psi_{\lambda(\omega)}$ is a strictly stationary one, and its covariance is the Laplace transform of $\lambda(\omega)$.

Lemma 1. The subordinator $\psi_{\lambda(\omega)}(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, is a strictly stationary process;

$$\text{cov}(\psi_{\lambda(\omega)}(v), \psi_{\lambda(\omega)}(s + v)) = \int_0^\infty \exp\{-ys\} dF_{\lambda(\omega)}(y), \quad \forall s, v \in \mathbf{R}_+.$$

For details and accuracy of Lemma 1 proof we refer to [5].

Note that in the case when the random intensity $\lambda(\omega)$ is not drawn at the initial time, but it follows the starting at zero positive Lévy process $\Lambda(t)$, $t \geq 0$,

$$\text{cov}(\psi(s), \psi(t)) = L_{\Lambda(t-s)}(1), \quad t > s,$$

where $L_{\Lambda(t)}(u)$, $u \geq 0$, is a Laplace transform defined on $\mathbf{R}_+ \ni u$ for a truncation of the random process Λ at the point $t > 0$.

According to the Barndorff-Nielsen's representation [2], we define a fractional Ornstein-Uhlenbeck process (fO-U) $U_H(t)$, $t \in \mathbf{R}$, of the Hurst parameter $H \in (0, 1]$, as a Gaussian centered stationary process with the covariance

$$\begin{aligned} r(t) &= r_H(t) = \text{cov}(U_H(0), U_H(t)) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{-Ht} + e^{Ht} - |e^{t/2} - e^{-t/2}|^{2H} \right\}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Remark that $r(t) = r(-t)$.

Due to Lamperti transform [3] the process $w_H(s) \triangleq s^H U_H(\log s)$, $s > 0$, $w_H(0) = 0$ a.s., is a fractional Brownian motion (fBm) process: Gaussian centered self-similar strictly stationary increments process with the Hurst parameter $H \in (0, 1]$,

$$\text{cov}(w_H(s), w_H(t)) = \frac{1}{2} \left(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H} \right), \quad s, t \geq 0.$$

For $t \geq 0$ the following chain of simple equalities allows us to obtain the expression for $r(t)$ in a form of the Laplace transform of a probability distribution,

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2} e^{Ht} \left(1 + e^{-2Ht} - (1 - e^{-t})^{2H} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-Ht} + \frac{1}{2} e^{Ht} \left(1 - (1 - e^{-t})^{2H} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-Ht} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1} \binom{2H}{j} e^{-(j-H)t}, \end{aligned} \tag{1}$$

where

$$\binom{2H}{j} = \frac{\Gamma(2H + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(2H - j + 1)}.$$

It is not difficult to check that in the case $0 < H < 1/2$ the expression (2) defines a fully monotone function equaling 1 at zero, hence it is the Laplace transform of a some probability distribution. The following random variable η_H (for $0 < H < 1/2$) possesses this distribution of a discrete type

$$\mathbf{P}(\eta_H = H) = \frac{1}{2} = p_0, \quad \mathbf{P}(\eta_H = j - H) = \frac{1}{2}p_j, \quad j \in \mathbf{N};$$

$$p_1 = 2H, \quad p_2 = \frac{2H(1 - 2H)}{2!}, \quad p_{k+1} = \left(1 - \frac{1 + 2H}{k + 1}\right)p_k, \quad k \geq 2.$$

The random intensity $\lambda(\omega) \stackrel{d}{=} \eta_H$, substituted in Definition 1 of the DS PSI processes, (thanks to Lemma 1) provides that $\psi_H(s) = \xi_{\Pi_1(s\eta_H)}$, $s \in \mathbf{R}_+$, has the same covariance as for fO-U. Note that a pairwise characteristics function for the DS PSI process is as follows

$$L_{\lambda(\omega)}(s)\phi(\nu + \mu) + (1 - L_{\lambda(\omega)}(s))\phi(\nu)\phi(\mu), \quad \mu, \nu \in \mathbf{R}, \quad s \in \mathbf{R}_+.$$

Theorem 1. Let us extend the stationary $\psi_H(t)$ on $\mathbf{R} \ni t$ and consider independent copies $\psi_H^{[j]}(t)$, $j \in \mathbf{N}$, of $\psi_H(t)$ which subordinate (respectively) independent sequences $(\xi)^{[j]}$ of totally i.i.d random terms $\{\xi_i^{[j]}\}$, $i \in \mathbf{Z}_+$, $j \in \mathbf{N}$, with $\mathbf{E}\xi_0^{[1]} = 0$, $\mathbf{D}\xi_0^{[1]} = 1$.

Then the following convergence in a sense of convergence of finite dimensional distributions takes place as $N \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \psi_H^{[j]}(t) \Rightarrow U_H(t), \quad t \in \mathbf{R};$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N s^H \psi_H^{[j]}(\log s) \Rightarrow w_H(s), \quad s \in \mathbf{R}_+.$$

Proof of Theorem 1 directly follows from the Central Limit Theorem for vectors with the identical covariance.

For analysis of the distribution η_H let us introduce the following random variable η , taking values on $\{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta = 0) &= 2H, \\ \mathbf{P}(\eta = 1) &= \frac{2H(1 - 2H)}{2!}, \\ \dots &= \dots, \\ \mathbf{P}(\eta = k) &= \frac{2H(1 - 2H)(2 - 2H) \dots (k - 2H)}{(k + 1)!}, \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Obviously, the distribution of $\eta + (1 - H)$ equals (in law) to a conditional distribution of η_H provided that $(\eta_H \neq H)$.

After not difficult calculations we obtain a distribution function for η in the following explicit form

$$\mathbf{P}(\eta \leq n) = 1 - \binom{n+1}{n+1-2H}, \quad n \in \mathbf{N},$$

and the asymptotic of its tail

$$\mathbf{P}(\eta \geq n) \sim \frac{n^{-2H}}{\Gamma(1-2H)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Conclusions

Limit expressions for U_H and w_H in Theorem 1 and explicit representation of the distribution of η_H set an algorithm to modelling as well fO-U, as fBm.

References

1. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 2. — John Willey & Sons 1971.
2. *Perez-Abreu V., Barndorff-Nielsen O. E.* Stationary and Self-similar Processes Driven by Lévy Processes // Stochastic Processes and their Applications. — 1999. — Vol. 84, no. 2. — P. 357–369.
3. *Lamperti J. W.* Semi-stable Stochastic Processes // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — Vol. 104. — P. 62–78.
4. *Wolpert R. L., Taqqu M. S.* Fractional Ornstein-Uhlenbeck Lévy Processes and the Telecom Process: Upstairs and Downstairs // Signal Processing. — 2005. — Vol. 85, no. 8. — P. 1523–1545.
5. *Rusakov O. V.* Pseudo-Poisson Processes with Stochastic Intensity and a Class of Processes which Generalize the Ornstein-Uhlenbeck Process // Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy. — 2017. — Vol. 4 (62), no. 2. — P. 247–257.

Markovian Modelling of Arrival Processes

G. P. Basharin*, V. A. Naumov†

* *Department of Applied Probability and Informatics,
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

† *Service Innovation Research Institute,
Annankatu 8 A, Helsinki, 00120, Finland*

Abstract. Markovian arrival process is a popular tool for modeling arrival processes of stochastic systems such as queueing systems, reliability systems and telecommunications networks. In this paper we describe the development of Markovian arrival processes before 1990, the year which is considered by the western research community to be the year of its introduction.

Keywords: MC-stream, Markovian arrival process.

1. Introduction

Markovian arrival process (MAP) is a popular tool for modeling arrival processes of stochastic systems. MAP is generalization of point processes generated by transitions of Markov chains [1, 2]. Its properties can be derived from the theory of two-dimensional Markov processes with homogeneous second component, developed in [3]. Properties of MAP were studied in [4–12] under the name “arrival stream without after-effect driven by a Markov chain” or simply “MC-stream”. In these papers a matrix representation for MC-stream was introduced, which made it easy to use it in stochastic modeling. In parallel, starting from the paper [13] MAP was also studied under the name “versatile Markovian point process”. Finally, its name was settled at Markovian arrival processes in [14], as well as matrix representation used for MC-stream become common. In this paper we show the development of the theory of Markovian Arrival Processes in RUDN University before 1990.

2. General Markovian arrival process

Consider a multi-type arrival process $\mathcal{T} = ((\tau_n, c_n))$, where $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ are arrival times and $\sigma_n \in \{1, 2, \dots, K\}$ is the type of arrival at time τ_n . Let $\delta_{i,j} = 1$ if $i = j$ and $\delta_{i,j} = 0$ otherwise, $N_k(t) = \sum_{\tau_n \leq t} \delta_{k, \sigma_n}$ be the counting process of type k arrivals and $\mathbf{N}(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_K(t))$. We say that a point process \mathcal{T} is the (multi-type) Markovian arrival process if there exists random process $X(t)$ with a finite state space $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, L\}$ such that $Y(t) = (X(t), \mathbf{N}(t))$ is the time-homogeneous Markov process with homogeneous second component [3], i.e. if for all $\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}, i, j \in \mathcal{X}$ and $s, t \geq 0$ we have

$$P\{X(s+t) = j, \mathbf{N}(s+t) = \mathbf{n} | X(s) = i, \mathbf{N}(s) = \mathbf{k}\} = p_{i,j}(\mathbf{n} - \mathbf{k}, t).$$

The following properties of MAP follow from general results in [3].

The phase process $X(t)$ is the time-homogeneous Markov chain with the matrix of transition probabilities

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \mathbf{P}(\mathbf{n}, t),$$

where $\mathbf{P}(\mathbf{n}, t) = [p_{i,j}(\mathbf{n}, t)]$. Consider matrices of transition rates $\mathbf{A}(\mathbf{n}) = [a_{i,j}(\mathbf{n})]$ of the process $Y(t)$,

$$a_{i,i}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\delta} \lim_{\delta \rightarrow 0} (p_{i,i}(\mathbf{0}, \delta) - 1), a_{i,j}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\delta} \lim_{\delta \rightarrow 0} p_{i,j}(\mathbf{n}, \delta), i \neq j, \mathbf{n} \geq \mathbf{0}.$$

Matrices $\mathbf{A}(\mathbf{n}), \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, are nonnegative, $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ has nonnegative off-diagonal elements, and the matrix $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ given by

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \mathbf{A}(\mathbf{n})$$

is the generator matrix of the phase process $X(t)$. We assume that the generator \mathbf{A} is irreducible and denote $\mathbf{p} = (p_i)$ the stationary probability vector of $X(t)$.

The counting process $\mathbf{N}(t)$ of Markovian arrival processes is the process with independent increments driven by a Markov chain [3]. In [15] arrival processes having counting process with independent increments were called "arrival streams without after-effect". For this reason in some papers Markovian arrival process was called "arrival stream without after-effect driven by a Markov chain" until in 1978 during seminar in Moscow State University G.P. Klimov proposed to call it shortly as "MC-stream".

3. Simple Markovian arrival process

Simple Markovian arrival process is a single-type MAP characterized by two nonzero rate matrices $\mathbf{S} = \mathbf{A}(0)$ and $\mathbf{R} = \mathbf{A}(1)$, while $\mathbf{A}(k) = \mathbf{0}$, for $k \geq 2$. One can find properties of the simple MAPs in [7]. Simple MAP can be interpreted as follows [8]. Let arrivals occur with probability φ_{ij} at each transition of the phase process $X(t)$ from i to j and while $X(t)$ is in the state i arrival process is the Poisson with the rate λ_i . Such an arrival process is a simple MAP with matrices $\mathbf{S} = [s_{i,j}]$ and $\mathbf{R} = [r_{i,j}]$ given by

$$s_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}(1 - \varphi_{i,j}), & i \neq j, \\ a_{i,i} - \lambda_i, & i = j, \end{cases} \quad r_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}\varphi_{i,j}, & i \neq j, \\ \lambda_i, & i = j. \end{cases}$$

Simple Markovian arrival processes have been used for the first time in the study a finite queueing system that can be described by a Markov chain $(X(t), Y(t))$, where $X(t)$ is the phase process of a simple MAP and the process $Y(t)$ describes internal system state [11].

Counting process $N(t)$ of the stationary MAP is asymptotically Normal with mean $M(t) = \lambda t$ and variance

$$D(t) = (2\mathbf{q}_1\mathbf{R}\mathbf{u} - \lambda)t + 2(\mathbf{q}_2\mathbf{R}\mathbf{u} - \lambda) + o(1),$$

where $\lambda = \mathbf{p}\mathbf{R}\mathbf{u}$, \mathbf{u} is the column vector of all ones, and row vectors \mathbf{q}_1 and \mathbf{q}_2 are unique solutions of the linear systems (3)

$$\mathbf{q}_1\mathbf{A} = \mathbf{p}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{R}), \quad \mathbf{q}_1\mathbf{u} = 1, \quad \mathbf{q}_2\mathbf{A} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}, \quad \mathbf{q}_2\mathbf{u} = 1. \quad (1)$$

In [10] multi-server queueing systems with MAP arrivals and exponentially distributed service times with parameter μ were considered. Binomial moments of the stationary probability distribution of the number of busy servers in the infinite-server MAP|M| ∞ system is given by

$$b_n = \mathbf{p}\mathbf{G}(\mu)\mathbf{G}(2\mu) \cdots \mathbf{G}(n\mu)\mathbf{u},$$

where $\mathbf{G}(s) = \mathbf{R}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. For the MAP with diagonal matrix \mathbf{R} formula (3) was derived in [4]. Stationary loss probability for finite-server MAP|M| c |0 loss system is given by

$$B = \frac{1}{\lambda}\mathbf{g}\mathbf{R}\mathbf{u},$$

where the row vector \mathbf{g} is the unique solution of the linear system

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \left(\mathbf{I} + \sum_{k=1}^c \binom{n}{k-1} \mathbf{G}(k\mu)\mathbf{G}((k+1)\mu) \cdots \mathbf{G}(c\mu) \right) = \\ = \mathbf{p}\mathbf{G}(\mu)\mathbf{G}(2\mu) \cdots \mathbf{G}(c\mu). \end{aligned}$$

If the matrix \mathbf{R} has the rank one then the MAP is the renewal process of PH-type. If the vector \mathbf{p} is the left or the vector \mathbf{u} is the right eigenvector of \mathbf{R} then the MAP is the Poisson process [10].

4. Multi-type Markovian arrival process

Simple multi-type Markovian arrival process is a generalization of simple single-type MAP . This version of MAP is characterized by $K + 1$ nonzero matrices $\mathbf{S} = \mathbf{A}(0)$ and $\mathbf{R}_k = \mathbf{A}(\mathbf{e}_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, where vector \mathbf{e}_k has its k th component equal to 1 and all other components equal to zero. Properties of the simple multi-type MAPs were studied in [11].

Recursive method for calculation loss probability for the system MAP|M|c|0 with multi-type arrival process was given in [12]. Matrices Ψ_k defined by the recursion

$$\Psi_0 = \mathbf{0}, \Psi_k = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{k}(\mathbf{S} + \Psi_{k-1}\mathbf{R}) \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

are nonnegative and satisfies the following inequalities

$$\Psi_k \mathbf{R} \mathbf{u} \leq k \mathbf{u}, \mathbf{p} \Psi_k \leq \mathbf{p}.$$

Stationary time blocking probability E and type k call blocking probability B_k

$$E = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \Psi_c \mathbf{u}), B_k = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{p}(\mathbf{I} - \Psi_c) \mathbf{R}_k \mathbf{u},$$

where $\lambda_k = \mathbf{p} \mathbf{R}_k \mathbf{u}$ is the arrival rate of type k calls.

5. Conclusions

In this paper we show that the theory of Markovian Arrival Processes was developed in RUDN University long before 1990, the year when the paper [14] was published, and which is considered by the western research community to be the year of the MAP introduction.

Acknowledgments

We greatly appreciate assistance provided by the members of the Department of Applied Probability and Informatics of RUDN University Yu. Gaidamaka, I. Gudkova and E. Sopin.

References

1. *Basharin G. P.* O vychislenii momentov obsluzhennojj i izbytochnojj nagruzok slozhnoj systemy [On the calculation of the moments of the serviced and lost traffic of a complex system] // *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Tekhnicheskaja Kibernetika.* — 1972. — P. 42-51.
2. *Rudemo M.* Point processes generated by transitions of Markov chains // *Advances in Applied Probability.* — 1973. — Vol. 5, no. 2. — P. 262-286.
3. *Ezhov I. I., Skorokhod A. V.* Markov processes with homogeneous second component // *Theory of Probability and its Applications.* — 1969. — Part I: Vol. 14, no.1. — P. 1-13. — Part II: Vol. 14, no.4. — P. 652-667.
4. *Kokotushkin V. A.* Nekotorye zadachi matematicheskojj teorii teletrafika [Some mathematical problems of teletraffic theory]. PhD thesis. — Peoples Friendship University, Moscow, 1974.

5. *Naumov V.* O nezavisimosti rabote podsystem slozhnojj sistemy [On the independent behaviour of subsystems of complicated system] // Queuing Theory. Proc. 3d Seminar on Queuing Theory, Puschtschino, 1974 / B. V. Gnedenko, Yu. I. Gromak, E. V. Chepurin. — Moscow State University, 1976. — P. 169-177.
6. *Bocharov P. P., Naumov V. A.* Analiz giperehksponencial'noj dvukhfaznoj sistemy s ogranichenym promezhutochnym nakopitelem [Analysis of hyperexponential tandem queue with finite intermediate room] // Informacionnye seti i ikh struktura. — M.: Nauka, 1976. — P. 168-181.
7. *Naumov V. A.* Issledovanie nekotorykh mnogofaznykh sistem massovogo obsluzhivanija [Analysis of some queues in series]. PhD thesis. — Peoples Friendship University, Moscow, 1978.
8. *Naumov V. A.* Ob obsluzhennoj i izbytochnoj nagruzkakh polnodostupnogo puchka s ogranichennoj ochered'ju [On the calculation of the moments of the serviced and overflow traffic of a full-available loss system with finite waiting room] // Chislennye metody reshenija zadach matematicheskoi fiziki i teorii sistem. — Peoples Friendship University, 1977. — P. 51-55.
9. *Basharin G. P., Kokotushkin V. A., Naumov V. A.* The method of equivalent substitution for calculating fragments of communication networks for a digital computer, Part I // Engineering Cybernetics. — 1979. — Vol. 17, no. 6. — P. 66-79. Translated from: // Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaja Kibernetika. — 1979. — No. 6. — P. 92-99.
10. *Basharin G. P., Naumov V. A.* Simple matrix description of peaked and smooth traffic and its applications // Fundamentals of Teletraffic Theory, Proc. 3d Int. Seminar on Teletraffic Theory — VINITI, 1984. — P. 38-44.
11. *Naumov V. A.* Markovskie modeli potokov trebovanij [Markovian modeling of arrival processes] // Sistemy massovogo obsluzhivanija i informatika — Peoples Friendship University, 1987. — P. 67-73.
12. *Naumov V. A.* Matrichnyjj analog formulju Erlanga [Matrix analogy of Erlang formula] // Sb. trudov 10 Vsesojuznoj shkoly-seminara po teorii telegrafiki "Modeli raspredelenija informacii i metody ikh analiza". — VINITI, Moscow, 1988. — P. 39-43.
13. *Neuts M. F.* A versatile Markovian point process // J. of Applied Probability. — 1979. — Vol. 16. — P. 764-779.
14. *Lucantoni D. M., Meier-Hellstern K., Neuts M. F.* A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes // Adv. in Applied Probability. — 1990. — Vol. 22. — P. 676-705.
15. *Khinchin A. Ya.* Sequences of Chance Events without After-Effects // Theory of Probability and its Applications. — 1956. — Vol. 1, no. 1. — P. 1-15.

UDC 519.872

One server queue with bulk arrivals

A. D. Soloviev*, V. N. Sobolev†

* *Department of Probability Theory,
Moscow State University,*

Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

† *Laboratory of Probability and its Applications, Moscow*

Abstract. This paper deals with a queueing system $GI^\nu|M|1|\infty$, *i.e.*, single server queue with general renewal arrivals, exponentially distributed service times and infinite number of waiting positions. The purpose is to find the steady-state results in terms of the probability-generating functions for the number of customers in the queue.

Keywords: queueing system, batch arrivals, probability generating functions, embedded Markov chain.

1. Introduction

Consider a queueing system $GI^\nu|M|1|\infty$. This means that customer arrival moments $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ constitute a renewal process [1] with the distribution function $P\{t_n - t_{n-1} < t\} = F(t)$.

At every moment t_n a group of ν_n customers arrives, with ν_n being independent and equally distributed. Additionally suppose that ν_n are bounded

$$\alpha(z) = Mz^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_m z^m, \quad \alpha_m \neq 0.$$

The system has single service channel and service time is exponentially distributed with parameter μ . Waiting queue size is unlimited and customers are serviced in the order of their arrival.

Let $\xi(t)$ be the number of customers in the queueing system at any given moment t . Our aim is to find stationary distribution of the process

$$P(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Mz^{\xi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n.$$

2. Analysis of the embedded queue

Consider process $\xi(t)$ at customer arrival moments and denote

$$\xi_n = \xi(t_n - 0), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \xi_1 = 0.$$

Then it's obvious that the sequence of ξ_n constitutes a homogenous Markov chain. Let η_n be the number of points of a Poisson process with parameter μ falling in the interval (t_n, t_{n+1}) . Random variables η_n are independent and their distribution is

$$\begin{aligned}
 Mz^{\eta_n} &= \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s z^s = \sum_{s=0}^{\infty} z^s \int_0^{\infty} \frac{(\mu x)^s}{s!} e^{-\mu x} dF(x) = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\mu x(1-z)} dF(x) = \varphi(\mu - \mu z),
 \end{aligned}$$

where $\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x)$, and $\omega_s = \int_0^{\infty} \frac{(\mu x)^s}{s!} e^{-\mu x} dF(x)$, $s \geq 0$, is the probability of having exactly s customers serviced in the interval between two consequent arrivals under the condition that after first of those arrivals total amount of customers in the system is greater than s , that is $P\{\eta_n = s\} = \omega_s$.

It is easy to see that the following equations holds between random variables

$$\xi_{n+1} = (\xi_n + \nu_n - \eta_n)_+, \quad n \geq 1, \quad x_+ = \frac{x + |x|}{2}. \quad (1)$$

It is known [1] that Markov chain defined by equation (1) has a stationary distribution if and only if $M(\nu_n - \eta_n) < 0$, or

$$\nu = \sum_{k=0}^m k\alpha_k = \alpha'(1) < \mu T, \quad (2)$$

where $T = \int_0^{\infty} x dF(x)$ is the average time between customer arrivals.

Supposing this inequality holds, let's find stationary distribution of the chain ξ_n . Let $\pi(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Mz^{\xi_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$. From the recurrent equation (2) the following representation for function $\pi(z)$ could be obtained:

$$\pi(z) = \frac{Q\left(\frac{1}{z}\right)}{1 - \alpha(z)\varphi\left(\mu - \frac{\mu}{z}\right)}, \quad (3)$$

where $Q(z) = \sum_{k+l < s} \pi_k \alpha_l \omega_s (1 - z^{m-k-l})$. This could be shown, for example, as follows.

For variables satisfying (1) the following equations hold:

$$\pi_0 = \sum_{k+l-s \leq 0} \pi_k \alpha_l \omega_s \quad \text{and} \quad \pi_n = \sum_{k+l-s=n} \pi_k \alpha_l \omega_s, \quad n > 0.$$

If we multiply left and right side of each of these equations by appropriate power of z and add, we obtain:

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n z^n = \sum_{n > 0} \sum_{k+l-s=n} \pi_k \alpha_l \omega_s z^n + \sum_{k+l-s \leq 0} \pi_k \alpha_l \omega_s.$$

then with some more easy and obvious transformations we get

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n z^n = \sum_{n > 0} \sum_{k+l-s=n} \pi_k \alpha_l \omega_s z^{k+l-s} + \sum_{k+l-s \leq 0} \pi_k \alpha_l \omega_s (1 - z^{k+l-s} + z^{k+l-s})$$

and finally

$$\pi(z) = \sum_{k+l-s > 0} \pi_k \alpha_l \omega_s z^{k+l-s} + \sum_{k+l-s \leq 0} \pi_k \alpha_l \omega_s z^{k+l-s} + \sum_{k+l-s \leq 0} \pi_k \alpha_l \omega_s (1 - z^{k+l-s}) .$$

If we now notice, that in the right side of the last equation first two sums are equal to $\pi(z)\alpha(z)\varphi(\mu - \frac{\mu}{z})$, and in the third sum the expression $1 - z^{k+l-s}$ equals zero for $k + l - s = 0$, the validity of (2) becomes obvious. Let's now prove one auxiliary statement.

Lemma. Equation $\alpha(z)\varphi(\mu - \frac{\mu}{z}) = 1$ has, counted with multiplicity, exactly m roots for $|z| > 1$.

Proof. It is sufficient to prove that the equation $\alpha(\frac{1}{z})\varphi(\mu - \mu z) = 1$ has exactly m roots inside the unit disk. Multiply both parts of the last equation by z^m . This won't add any new roots because of $\alpha_m \neq 0$. Now consider the equation $z^m - z^m \alpha(\frac{1}{z})\varphi(\mu - \mu z) = 0$. Function $f(x) = x^m \alpha(\frac{1}{x})\varphi(\mu - \mu x)$ defined on $[0, 1]$ has derivative $f'(x) = m - \nu + mT > m$ according to (2). On the other hand, $(z^m)'_{z=1} = m$. Thus, for $r \in (0, 1)$ and sufficiently close to 1, $f(r) < r^m$. Taking $z = re^{it}$ we get $|z^m \alpha(\frac{1}{z})\varphi(\mu - \mu z)| \leq r^m \alpha(\frac{1}{r})\varphi(\mu - \mu r) < r^m = |z|^m$ and then the statement of the lemma follows from Rouché's theorem [2]. □

Denote as $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ roots of the equation $\alpha(\frac{1}{z})\varphi(\mu - \mu z) = 1$. Then roots of the original equation are $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_m}$.

Theorem 1. Under the condition (2) stationary distribution of the embedded chain exists and is defined by the generating function

$$\pi(z) = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_m)}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) \dots (1 - \lambda_m z)} . \tag{4}$$

Proof. Multiplying both parts of (2) by $(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_m z)$, we get

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &:= (1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_m z) \pi(z) = \\ &= \frac{Q(\frac{1}{z})(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_m z)}{1 - \alpha(z)\varphi(\mu - \frac{\mu}{z})} =: \Phi_2(z) . \end{aligned}$$

Function $\Phi_1(z)$ is continuous for $|z| \leq 1$ ($z = 1$ is a removable discontinuity) and analytic for $|z| < 1$. Function $\Phi_2(z)$ is continuous for $|z| \geq 1$ ($z = 1$ is a removable discontinuity) and analytic for $|z| > 1$. Because $\lambda_k \neq 0$ and $\lambda_m \neq 0$, $\Phi_2(\infty) = C$.

Thus [2] function $\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z), & |z| \leq 1 \\ \Phi_2(z), & |z| > 1 \end{cases}$ is analytic and bounded

on the whole plane. Then by Liouville's theorem [2] it is constant, *i.e.*, $(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_m z) \pi(z) = C$. Using normalization condition $\pi(1) = 1$, we get the expression (2). \square

3. Stationary distribution of the process $\xi(t)$

Consider embedded in process $\xi(t)$ semi-Markov process [3] $\zeta(t)$, defined by conditions $\zeta(t) = \xi(t_n - 0)$ for $t \in [t_n, t_{n+1})$. From the theory of semi-Markov processes [3] it follows that the stationary transition intensity of process $\zeta(t)$ to state k equals $h_k = \frac{\pi_k}{T}$. It also follows from the same theory that stationary distribution of $\xi(t)$ exists. Stationary probabilities of the process $\xi(t)$ are expressed as follows: for $n > 0$

$$p_n = \sum_{k+l \geq n} \frac{\pi_k}{T} \alpha_l \int_0^\infty \frac{(\mu x)^{k+l-n}}{(k+l-n)!} e^{-\mu x} \bar{F}(x) dx = \frac{1}{T} \sum_{k+l \geq n} \pi_k \alpha_l \omega_{k+l-n},$$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x), \quad \omega_s = \int_0^\infty \frac{(\mu x)^s}{(s)!} e^{-\mu x} \bar{F}(x) dx.$$

Verbally this expression could be derived this way: for the process in stationary mode at a given moment of time to be in a state n it is necessary, that at some earlier moment at a distance x semi-Markov process $\zeta(t)$ gets to some state k with probability $h_k dx$, at that moment a new group of l customers arrives, and then through the time x no new groups arrive, probability of this being $\bar{F}(x)$, and during the time x exactly $k + l - n$ customers were served, probability of this being $\frac{(\mu x)^{k+l-n}}{(k+l-n)!} e^{-\mu x}$. Adding this up by k and l and integrating over x , we obtain the expression above. In a similar way we get probability $p_0 = \frac{1}{T} \sum_{k+l \leq s} \pi_k \alpha_l \omega_s$.

With transformations similar to those used above to obtain (2) we get this equation for the generating function of the stationary probabilities:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{T} \sum_{k,l,s} \pi_k \alpha_l \omega_s z^{k+l-s} + \frac{1}{T} \sum_{k+l-s < 0} \pi_k \alpha_l \omega_s (1 - z^{k+l-s}),$$

where

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s z^{-s} &= \int_0^{\infty} e^{-\mu x (1 - \frac{1}{z})} \bar{F}(x) dx = \frac{1}{\mu} \frac{z}{1-z} \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx e^{-\mu x (1 - \frac{1}{z})} = \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{z}{1-z} (-1 + \varphi(\mu - \frac{\mu}{z})). \end{aligned}$$

Now generating function of the stationary probabilities could be easily expressed as

$$P(z) = \frac{1}{\mu T} \pi(z) \alpha(z) \frac{z (1 - \varphi(\mu - \frac{\mu}{z}))}{z - 1} + Q_1 \left(\frac{1}{z} \right),$$

where $Q_1(z) = \frac{1}{T} \sum_{k+l < s} \pi_k \alpha_l \omega_s (1 - z^{s-k-l})$.

Expressing from (2) the product $\alpha(z) \pi(z) \varphi(\mu - \frac{\mu}{z})$ in terms of $\pi(z)$ we obtain

$$P(z) = \frac{1}{\mu T} z \pi(z) \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z} + Q_2 \left(\frac{1}{z} \right),$$

where $Q_2(\frac{1}{z}) = Q_1(\frac{1}{z}) + \frac{1}{\mu T} \frac{z}{z-1} Q(\frac{1}{z})$.

Similar to the proof of theorem 1, we can now deduce, that function $P(z) - \frac{1}{\mu T} z \pi(z) \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z}$ is analytic and bounded on the whole plane, therefore being constant, its value obtained from the normalization condition $P(1) = 1$. Therefore we obtain final result.

Theorem 2. *Under the condition (2) stationary distribution of the process $\xi(t)$ exists and is defined by the generating function*

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{\mu T} z \pi(z) \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z} + 1 - \frac{\nu}{\mu T},$$

where $\pi(z)$ is defined by (2).

References

1. Gnedenko B. V., Kovalenko I. N., Lectures on Queueing Theory. — KVIRTU, 1963.
2. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. — Nauka, 1987.
3. Silvestrov D. S. Semi-Markov Processes with a Discrete State Space. — "Soviet Radio" Publishers, 1980.

Научно-мировоззренческая революция 16–17 веков и “механицизм” в науке

С. Н. Колесников*

** Механико-математический факультет,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119991*

Аннотация. В статье рассмотрен новый подход к историко-научному материалу периода «научно-технической революции 16-17 веков», который позволил выявить во многом совершенно неожиданные аспекты произошедших в это время изменений в науке и мировоззрении и обнаружить важные взаимосвязи с современным развитием механики.

Ключевые слова: классическая механика, законы Ньютона, Коперник, законы движения.

Прежде всего рассмотрим новое прочтение известных книг Н.Коперника «О вращении небесных сфер» [4] и И.Ньютона «Математические начала натуральной философии» [3], так же как и роли содержащихся в последней книге «законов Ньютона» в развитии науки. На основе предложенного материала, кроме значительного изменения подходов к изучаемому историческому периоду складывается интересная картина возможностей применения самых современных разделов механики в экономических приложениях.

В истории мировой науки хорошо известен произошедший в течение 16-17 веков кардинальный перелом в философии, науке и технике, получивший название «научно-мировоззренческой революции». Однако традиционные взгляды на этот период оставляют слишком много вопросов, и прежде всего не дают ответа на главный из них: «почему?». Более того, детальный историко-экономический анализ происходивших в то время исторических процессов [1-2] не дает ответа на вопрос о том, собственно какими причинами были обусловлены кардинальные изменения в экономической, и если так можно сказать, «научной» географии Европы тех времен, а они несомненны и крайне значительны.

В настоящей статье делается попытка пролить свет на эти события и ответить на вопрос, что же собственно, произошло в научном мировоззрении, по-новому взглянув на роль в них основных научно-исторических персонажей – Коперника, Галилея, Декарта, Ньютона. В частности, совершенно по-иному представляется роль Коперника и его открытия, которые на поверку оказываются совсем не теми, о которых обычно рассказывается в литературе. Гипотеза о вращении Земли не была новинкой к моменту появления знаменитой книги Коперника [4],

более того, сам автор называет на первых страницах своих предшественников, хотя и не всех.

«Поэтому я принял на себя труд перечитать книги всех философов, которые только мог достать, желая найти, не высказывал ли когда кто-нибудь мнения, что у мировых сфер существуют движения, отличные от тех, которые преподают в математических школах. Сначала я нашел у Цицерона, что Никет высказывал мнение и движении Земли, затем я встретил у Плутарха, что этого взгляда держались и некоторые другие.»

Далее в книге Коперник приводит и других авторов, придерживавшихся концепции движения Земли, а в рукописях, не вошедших в книгу, он перечисляет их еще больше, действительно, как и обещал Коперник в вышеприведенной цитате видимо «практически всех, которых только мог достать».

Нам же интересна не сама гипотеза о вращении Земли, а аргументация Коперника о причинах необходимости принятия гелиоцентрической системы, и его общий взгляд на основания научной аргументации, который остается принципиальным и до настоящего времени. Именно эта аргументация кардинально отличает Коперника от его предшественников, апеллировавших преимущественно к понятиям преимущественно философски-религиозного характера.

С этой же точки зрения крайне важным оказывается текст предисловия, написанного неизвестным автором, предположительно – известным лютеранским богословом и религиозным деятелем Осиаандером, принимавшем деятельное участие в издании книги. Так как предисловие вошло в оригинальные издания Коперника без указания авторства, то для читателя, не изошренного в анализе текстов, предисловие казалось принадлежащим Копернику [4]. Приведем центральную часть предисловия:

"Всякому астроному, свойственно на основании тщательных и искусных наблюдений составлять повествование о небесных движениях. Затем, поскольку никакой разум не в состоянии исследовать истинные причины или гипотезы этих движений, астроном должен изобрести и разработать хоть какие-нибудь гипотезы, при помощи которых можно было бы на основании принципов геометрии правильно вычислять эти движения как для будущего, так и для прошедшего времени. И то и другое искусный автор этой книги выполнил в совершенстве. Ведь нет необходимости, чтобы эти гипотезы были верными или даже вероятными, достаточно только одного, чтобы они давали сходящийся с наблюдениями способ расчета..."

В этом предисловии, по сути, сформулирована новая парадигма научного знания, практически неизменно сохранившаяся до настоящего времени. Суть ее сводится к тому, что задачей науки является построение модели (в том время имелось в виду - математической) пригодной для практического использования, истинность же ее в некотором абсолютном философском или религиозном смысле совершенно не являлась обязательной. При этом собственно авторский подход Коперника

скорее всего заметно отличался от мнения комментатора, хотя и поддерживал его принципиальные положения. В отличие от комментатора, который настаивал на практическом значении модели, Коперник апеллировал к древнему подходу, согласно которому построение «красивой» в некотором смысле математической модели обеспечивало ее истинность.

Сделанные же Коперником важнейшие открытия в механике совершенно забыты и обычно приписываются другим историческим персонажам, хотя в действительности их значение для собственно механики является чрезвычайно важным. В частности, Коперник по-видимому, впервые, стал рассматривать движение планет, как физических твердых тел, аналогичных Земле, а не точек или сводимых к ним эфирных тел, как более не только более ранние авторы, но и еще многие последующие. Это позволило ему различить вращательное и круговое поступательное движение, для описания последнего он предложил принцип сложения движений. В результате Солнце и «блуждающие звезды» выстроились в прекрасную гармоничную картину, вместо запутанных петлеобразных траекторий, никак не тянущих на божественную гармонию.

Однако поставив вопрос о построении математических моделей, Коперник не предложил методик их построения. Более того, даже для механики эта задача еще была слишком сложной, так как очень много еще не было понятно в причинах движений и способах их измерений. Этот пробел был заполнен с участием многих ученых, но конечно прежде всего Галилеем и Кеплером, который в дополнение к механике и математике сделал шаг и в изучении глобальной «гармонии мира», возможно недооцененный еще и в наше время. В части же поиска методологии построения математических моделей также существует масса авторов, внесших значительный вклад, но ограничимся такими глобальными фигурами, как Ф.Бэкон, Р.Декарт, Г.В. Лейбниц. Причем в свете предлагаемой реконструкции событий научной революции, роль последнего в становлении науки похожа, существенно недооценена и требует дальнейшего исследования.

Приведем весьма важную в контексте данного обсуждения цитату из «первоначал философии» Р.Декарта [5]:

«64. Чтобы иметь возможность обосновать посредством доказательства все, что я буду выводить, я не принимаю в физике никаких начал, которые не были бы также началами математики; и этих начал достаточно, тем более что посредством их могут быть объяснены все явления природы...»

Удивительно, но в этой формулировке Декарта можно увидеть четкую программу фундаментального труда И. Ньютона «Математические начала натуральной философии».

Именно эта книга представляет для нас наибольший интерес. По сравнению с традиционными представлениями, оказывается что роль И.Ньютона в лице его «трех законов природы» [4], и его взаимоотношения с Декартом [5] гораздо теснее, чем обычно считается. Ньютон

оказывается последователем Декарта, а не оппонентом. В современных курсах механики обычно «законы Ньютона» излагаются в совершенно иной, отличной от оригинальной, интерпретации, не дающей возможности оценить их первоначальный замысел. Приведем формулировку трех законов Ньютона в их оригинальной формулировке [4]:

«Закон I. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.»

Первый закон определяет, ключевое для методологии Ньютона понятие «сила» через идентификацию его действия на тело. При этом Ньютон придерживается дихотомии движения, рассматривающей покой как частный случай равномерного движения, и разделяющей ускоренное и равномерное движение. Это противоречило учению Аристотеля.

В современной литературе под первым законом обычно формулируется «Определение III» Ньютона в несколько измененной формулировке, по сравнению с оригиналом:

«Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно представлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.»

«Закон II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.»

Второй закон позволяет количественно измерить силу через оказываемое воздействие на тело, точнее через изменение его количества движения. При этом Ньютон говорит именно о пропорциональности величины силы, а не о точном равенстве. Это важно с методологической точки зрения, для практических применений даже в сложных случаях механического движения, а тем более в немеханических приложениях.

«Закон III. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.»

И, наконец, третий закон позволяет свести любую неизвестную «силу» природы к механической силе, через их уравнивание. Например, поскольку известно, что на тяжелое тело действует сила притяжения к Земле, то если оно висит на канате, закреплённом на пружине или магнитах, то пружина или магниты оказывают противоположное действие на канат, таким образом они также являются источниками силы иной природы, иначе бы система не находилась в равновесии. Это позволяет изучать электрические или магнитные силы, или иные неизвестные доселе силы, через постановку эксперимента сводящего их действие через систему простых машин к механическим силам или силам тяжести.

Именно книга Ньютона до настоящего времени считается чуть ли не основой всего современного естествознания [6], а автор входит в число самых значительных мыслителей всех времен и народов по версии ВВС [7], занимая в этом крайне представительном списке 3 место. Вряд ли это могло бы случиться если бы «законы природы» были бы только законами механики. Анализ оригинального текста и дальнейшего использования законов Ньютона дают четкое представление о том, что они, как раз, и являются методологической основой построения математических моделей, как в механике, так и в других дисциплинах. Об этом говорит, как и название книги «Математические начала натуральной философии», так и ее структура – изложение методологии и обширные примеры ее применения в наиболее интересных и продвинутых на тот момент разделах механики. И хотя Ньютон применяет свои законы к механическим задачам, это связано прежде всего с популярностью рассматриваемых в книге задач в науке того времени.

Для механической аудитории, конечно же, наиболее интересным является рассказ о том, как изменилась роль математики и ее связи с механикой, а также их значение в науке в течение указанного периода. Также важно, как это соотносится с дальнейшим прогрессом наук, и, в частности, механики, роль которой в процессах модификации научного мировоззрения оказывается сильно недооцененной. Понятие «механицизма», оказывается не просто сильно упрощенным, но скорее даже утрированным в современных описаниях, по крайней мере, в отечественной литературе. Утратив связь с источником, которым являются законы Ньютона в их изначальной формулировке, оно оказалось интерпретируемым крайне вульгарно и даже местами неверно.

Кроме того, крайне важным является определение понятия мгновенной скорости и понятия действия силы в работе Ньютона. Они принципиально отличаются от тех понятий, которое используется в современной литературе и восходят к определениям Эйлера.

Резюмируя, можно сформулировать следующую интерпретацию событий научной революции 16-17 веков: предложенная Коперником новая парадигма науки вызвала живой отклик в самых разных областях знания, но, что вполне естественно, прежде всего – в математике и механике. Однако результаты этого первого этапа были не так значимы, так как отсутствовала методика построения математических моделей.

Предложение Ньютоном в виде «трех законов» такой методики вызвало взрывообразный рост научного знания во многих областях, причем не только естественнонаучных. Этот период получил название «механицизма» в науке. При этом в самой механике и некоторых близких к ней отраслях, параллельно с Ньютонианской, активно развивалась и «континентальная» парадигма аналитической механики, основанная, если можно так сказать, на «философии бесконечно малых» и более ориентированная на внутреннюю работу с чистыми математическими моделями. Это стало возможным благодаря тому, что, как тогда казалось, основные вопросы математического представления

типичных задач уже были решены, и оставалось развивать их аналитические возможности.

Таким образом, в исследовании периода научно-мировоззренческой революции 16-17 веков есть еще очень много вопросов, влияние которых на современное состояние науки крайне интересно и подлежит изучению.

Литература

1. *Бродель Ф.* Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV-XVIII вв. В 3-х тт. — М., 1986-1992. — 592 с.+672 с.+732 с.
2. *Валлерстайн И.* Анализ мировых систем и ситуация в современном мире / Пер. с англ. П.М. Кудюкина / Под общ. ред. Б.Ю. Кагарлицкого. — СПб., 2001. — 416 с.
3. *Коперник Н.* О вращениях небесных сфер. Малый комментарий. Послание против Вернера. Упсальская запись / Перевод И. Н. Веселовского. — М.: Наука, 1964. — 646 с.
4. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Перевод с латинского и примечания А.Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 688 с.
5. *Декарт Р.* Сочинения: в 2 т. Т. 1 : пер с лат. и фр. / сост., ред. и примеч. В.В. Соколова. — М.: Мысль, 1994. — 654 с.
6. "The Economist". — <http://www.economist.com/node/2003425>
7. <http://news.bbc.co.uk/1/hi/english/static/events/millennium/sep/winner.htm>
8. <http://gtresearchnews.gatech.edu/newsrelease/newton.htm>

UDC 530.01, 51(091), 001.5

Scientific revolution of 16–17 centuries and period of “mechanism” in science

S. N. Kolesnikov*

** Faculty of Mechanics and Mathematics,
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: wiseacre@inbox.ru*

The article describes a new approach to historical and scientific material period of "scientific and technological revolution of 16-17 centuries", which revealed a largely unexpected aspects have occurred in this time of changes in science and scientific view and discover the important relationship with the history and process of development of modern mechanics.

Keywords: classical mechanics, Newton's laws, Copernicus, the laws of motion.

On mean-field $GI/GI/1$ queueing model: existence and uniqueness

A.Yu. Veretennikov^{*†‡}

^{*} *School of Mathematics, University of Leeds, LS2 9JT, Leeds, UK*

[†] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[‡] *Institute for Information Transmission Problems, 19 B. Karetny, Moscow, 127051, Russia*

Abstract. A mean-field extension of the queueing system $GI/GI/1$ is considered. Under certain assumptions on intensities, the process is constructed as a Markov solution of a martingale problem.

Keywords: $GI/GI/1$, mean-field process, intensities, existence, uniqueness.

1. Introduction

Mean-field approach in the theory of queueing systems is designed to take into consideration large interacting ensembles of queues by replacing these interactions by a suitable “mean field”. In particular, this approach showed rather fruitful in systems with countable state spaces. In this work we propose a method of constructing a more general extension of the system $GI/GI/1$ (more precisely, $GI/GI/1/\infty$) under certain restrictions on intensities of arrivals and service, which intensities may depend on the state as well as on the marginal distribution of the process. Weak uniqueness will be also discussed.

2. Main section

The state space of the process under consideration is the union

$$\mathcal{X} := (0, x) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, x, y), \quad x, y \geq 0.$$

The meaning of n here is the number of “customers” in the system; the value x stands for the elapsed time from the last arrival, while y signifies the elapsed time of the current service. There is only one server which works without breaks (if there is at least one customer in the system) and it is always in a working state. All newly arrived customers stand in a queue of the infinite capacity, and for simplicity only we assume the FIFO discipline of service. It is assumed that at any time t at any state $X = (n, x, y)$ (or $X = (0, x)$ for $n = 0$) there are *intensities* of service $h[t, X_t, \mu_t]$ and arrivals $\lambda[t, X_t, \mu_t]$, where μ_t is the distribution of the random variable X_t itself.

Note that occasionally we will be using notation $(0, x, y)$ where y is a “false” variable. The process is linear–deterministic Markov one (see [1, 3]).

The assumptions:

(A1)

$$\lambda[t, X, \mu] = \int \lambda(t, X, Y)\mu(dY), \quad h[t, X, \mu] = \int h(t, X, Y)\mu(dY)$$

(A2) The functions $\lambda(t, X, Y)$ and $h(t, X, Y)$ are Borel and bounded.

(A3) The functions $\lambda(t, X, Y)$ and $h(t, X, Y)$ are continuous in all variables.

(A4) The functions $\lambda(t, X, Y)$ and $h(t, X, Y)$ are bounded away from zero.

For $X \in \mathcal{X}$ let us denote (X^- is not defined for $X = (0, x)$)

$$X^+ := (n + 1, 0, y), \quad \text{for } X = (n, x, y),$$

$$X^- := 1(n > 0)(n - 1, x, 0), \quad \text{for } X = (n, x, y), \quad n \geq 1.$$

Theorem 1 *Let the assumptions (A1)–(A3) be satisfied. Then for any fixed $X_0 \in \mathcal{X}$, on some probability space there exists a Markov process $(X_t, t \geq 0)$ with marginal distributions μ_t and intensities $\lambda[t, X_t, \mu_t]$, $h[t, X_t, \mu_t]$; in other words, such that for any bounded continuous function $g(X)$ with bounded continuous derivatives in (x, y) , the expression*

$$M_t := g(X_t) - g(X_0) - \int_0^t L(s, X_s, \mu_s)g(X_s) ds \quad (1)$$

is a martingale, where for $X = (n, x, y)$, $X' = (n', x', y')$, $n \geq 0$, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} L(t, X', \mu)g(X) &:= \lambda[t, X', \mu](g(X^+) - g(X)) \\ &+ 1(n > 0)h[t, X', \mu](g(X^-) - g(X)) \end{aligned} \quad (2)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}g(n, x, y) + 1(n > 0)\frac{\partial}{\partial y}g(n, x, y).$$

For any given measure-valued function $(\mu_s, s \geq 0)$ in $L(s, X_s, \mu_s)$, the martingale problem (see [4]) (1) has a weakly unique solution.

Equivalently to (1), Dynkin’s identity holds true for any function $g(X)$ from the same class,

$$\mathbb{E}_{0, X_0}g(X_t) = g(X_0) + \mathbb{E}_{0, X_0} \int_0^t L(s, X_s, \mu_s)g(X_s) ds.$$

Moreover, equivalently, for any $0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_{m+1}$, and for any Borel bounded functions $\phi_k(X)$, $X \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{E}_{0, X_0} \left(g(X_{t_{m+1}}) - g(X_{t_m}) - \int_{t_m}^{t_{m+1}} L(s, X_s, \mu_s) g(X_s) ds \right) \prod_{k=1}^m \phi_k(X_{t_k}) = 0. \tag{3}$$

The equation (2) may be also called a *martingale problem*.

Proof of Theorem 1. For any $n \geq 1$ consider a process (X_t^n) , with initial data $X_0^{n,\delta} = X_0$ and intensities of jumps up and down, respectively,

$$\lambda[t, X_{t-1/n}^n, \mu_{t-1/n}^n], \quad h[t, X_{t-1/n}^n, \mu_{t-1/n}^n].$$

where X_t^n with $t < 0$ is understood as X_0^n , and similarly for μ_t^n . The process (X_t^n) for each n are constructed by induction successfully on the intervals $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, etc. Due to the boundedness assumption on both intensities, there is no blow up and the processes for any n are defined for any $t \geq 0$ as càdlàg pure jump processes. Moreover, for any t probability of jump at t for any X^n equals zero. The processes $(X_t^n, t \geq 0)$ for $n \geq 1$ being constructed, let us introduce on some probability space *independent* equivalent processes $(\xi_t^n, t \geq 0)$; let \mathbb{E}' stand in all cases for the integration with respect to the *third variable*, e.g.,

$$\mathbb{E}' h(t, X_t^n, \xi_t^n) := \int h(t, X_t^n, y) \mu_t^n(dy).$$

It can be checked that the assumptions of the Lemma 1 from the Appendix are satisfied. Hence, on some new probability space there are equivalent – and, hence, *Markov with the same generators* – processes $(\tilde{X}_t^n, \tilde{\xi}_t^n)$ and a limiting pair $(\tilde{X}_t, \tilde{\xi}_t)$ such that for some subsequence $(\tilde{X}_t^{n'}, \tilde{\xi}_t^{n'}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\tilde{X}_t, \tilde{\xi}_t)$, $n' \rightarrow \infty$, for each t . It follows due to the boundedness of all intensities that the limiting process $(\tilde{X}_t, \tilde{\xi}_t)$ is also stochastically continuous. More than that, it is a pure jump process with a finite number of jumps on any bounded interval with probability one. Moreover, due to $\lim_{h \downarrow 0} \sup_n \sup_{t, s \leq T; |t-s| \leq h} \mathbb{P}(|\tilde{X}_t^n - \tilde{X}_s^n| > \epsilon) = 0$ for any $\epsilon > 0$ it follows that

$$\tilde{X}_{t-1/n'}^{n'} \xrightarrow{\mathbb{P}} \tilde{X}_t, \quad n' \rightarrow \infty.$$

The analogue of Dynkin’s formula (2) reads,

$$\mathbb{E}_{0, X_0} \left[\left(g(\tilde{X}_{t_{m+1}}^{n'}) - g(\tilde{X}_{t_m}^{n'}) - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \mathbb{E}' L(s, \tilde{X}_{s-1/n'}^{n'}, \tilde{\xi}_{s-1/n'}^{n'}) g(\tilde{X}_s^{n'}) ds \right) \right]$$

(4)

$$\times \prod_{k=1}^m \phi_k(\tilde{X}_{t_k}^{n'}) \Big] = 0.$$

By continuity of λ and h , and due to the stochastic continuity of the processes \tilde{X} and $\tilde{\xi}$, and since all integrand expressions are bounded, and by virtue of Lebesgue's bounded convergence Theorem, we obtain from (2) in the limit with *continuous bounded* functions (ϕ_k),

$$\mathbb{E}_{0, X_0} \left(g(\tilde{X}_{t_{m+1}}) - g(\tilde{X}_{t_m}) - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \mathbb{E}' L(s, \tilde{X}_s, \tilde{\xi}_s) g(\tilde{X}_s) ds \right) \prod_{k=1}^m \phi_k(\tilde{X}_{t_k}) = 0. \quad (5)$$

Since the distribution of the random variable $\tilde{\xi}_t$ is the same as the one of \tilde{X}_t – let us denote it by $\tilde{\mu}_t$ – then (2) can be equivalently written as

$$\mathbb{E}_{0, X_0} \left(g(\tilde{X}_{t_{m+1}}) - g(\tilde{X}_{t_m}) - \int_{t_m}^{t_{m+1}} Lg(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mu}_s) ds \right) \prod_{k=1}^m \phi_k(\tilde{X}_{t_k}) = 0. \quad (6)$$

Due to the properties of measures on \mathbb{R}^d , the formula (2) holds true for any Borel bounded functions (ϕ_k), too. Due to [3], solution of the “martingale problem” (2) – or, more precisely, of the martingale problem

$$M_t := g(\tilde{X}_{t_{m+1}}) - g(\tilde{X}_{t_m}) - \int_{t_m}^{t_{m+1}} Lg(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mu}_s) ds \quad \text{is a martingale,}$$

with given ($\tilde{\mu}_s$) is unique. Hence, by [4, Theorem 4.4.2] the limiting process \tilde{X} is Markov. The required generator (1) with required intensities λ, h follows from (2). This finishes this sketchy proof of the Theorem 1.

3. Uniqueness

Theorem 2 *Let the assumptions (A1)–(A2) and (A4) be satisfied. Then, for any fixed X_0 , the process $(X_t, t \geq 0)$ with required intensities $\lambda[t, x, \mu_t]$ and $h[t, x, \mu_t]$ is unique in distribution.*

Proof of Theorem 2 is based on Girsanov's formula for jump processes (see, e.g., [5]) and will be presented in the full version of this paper.

4. Appendix

Lemma 1 (Skorokhod [6, Ch.1, §6]) *Let ξ_t^n ($t \geq 0$, $n = 0, 1, \dots$) be some d -dimensional stochastic processes defined on some probability space and let for any $T > 0$, $\epsilon > 0$ the following hold true:*

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \sup_{t \leq T} \mathbb{P}(|\xi_t^n| > c) = 0,$$

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_n \sup_{t, s \leq T; |t-s| \leq h} \mathbb{P}(|\xi_t^n - \xi_s^n| > \epsilon) = 0.$$

Then there exists a subsequence $n' \rightarrow \infty$ and a new probability can be constructed with processes $\tilde{\xi}_t^{n'}$, $t \geq 0$ and $\tilde{\xi}_t$, $t \geq 0$, such that all finite-dimensional distributions of $\tilde{\xi}^{n'}$ coincide with those of $\xi^{n'}$ and such that for any $\epsilon > 0$ and all $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|\tilde{\xi}_t^{n'} - \tilde{\xi}_t| > \epsilon) \rightarrow 0, \quad n' \rightarrow \infty.$$

5. Conclusions

Under conditions of boundedness and continuity of *intensities* of arrivals and of service in all variables, it is shown that a mean-field Markov process describing the model $GI/GI/1$ does exist. The results will also have important consequences in the mathematical reliability theory, see [2].

Acknowledgments

This study has been funded by the Russian Academic Excellence Project '5-100' and by the RFBR grant 17-01-00633_a.

References

1. Gnedenko B. V., Kovalenko I. N. Introduction to Queueing Theory. — Editorial URSS, Moscow, 2005.
2. Gnedenko B. V., Belyaev Yu. K., Solov'yev A. D. Mathematical Methods in Reliability Theory. — Academic Press, New York, 1969.
3. Davis M. H. A. Piecewise-Deterministic Markov Processes: A General Class of Non-Diffusion Stochastic Models // J. Royal Stat. Soc. Ser. B (Methodological). — 1984. — Vol. 46, no. 3. — P. 353–388.
4. Ethier S. N., Kurtz T. G. Markov processes: Characterisation and Convergence. — Wiley, 2005.
5. Liptser R. Sh., Shiryaev A. N. Theory of martingales, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
6. Skorokhod A. V.: Studies in the theory of random processes. — Addison-Wesley, 1965.

УДК 51(091)

Первая Международная топологическая конференция. Москва, 1935 г.

Г. С. Смирнова*

** Кабинет истории и методологии математики и механики,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119234*

Аннотация. Рассматриваются некоторые моменты истории развития топологии в СССР и США до первой Международной топологической конференции 1935 г.; обсуждается состав участников и доклады, а также хронология дальнейших топологических конференций.

Ключевые слова: история математики, советская топологическая школа, американская топологическая школа.

1. Одним из важнейших событий математики 20 века стало рождение новой математической дисциплины — топологии. И уже в первой трети 20 века в мире образовалось несколько национальных топологических школ, наиболее выдающимися из которых стали Московская топологическая школа П. С. Александрова и Американская топологическая школа. Огромную роль в налаживании контактов между ними сыграл выходец из России Соломон Лефшец (1884—1972). В своей речи на открытии Первой Международной топологической конференции в Москве (4–10 сентября 1935 г.) он говорил: «У нас теперь, можно сказать, два полюса: алгебра и топология... Все значение этих двух наук, особенно топологии, нигде так не понято, как в наших двух молодых странах: в СССР и в США. У нас создались самые яркие школы топологии. Они просто в центре дела. Нигде это лучше не поняли и не работают так успешно, как здесь, в Москве» [1].

2. В Москве первые важные успехи в топологии в 1921 г. получил Павел Самуилович Урысон (1898—1924), написавший ставшее теперь классическим исследование о теории размерности. Свою теорию он построил без каких бы то ни было посторонних влияний. Впоследствии оказалось, что эквивалентное урысоновскому определение незадолго до этого было дано Брауэром, и что теорию, развивающуюся по тем же направлениям, одновременно с Урысоном и абсолютно независимо от него начал строить еще более молодой студент Венского университета Карл Менгер (1902—1985). В настоящее время мы говорим об определении размерности Брауэра–Урысона–Менгера и о теории размерности Урысона–Менгера. При этом по широте замысла, полноте разработки и количеству новых геометрических фактов, впервые установленных для самых широких классов множеств, урысоновская теория несомненно стоит выше теории Менгера. В частности, Урысон доказал замечательную теорему о возможности интегрального определения размерности, которая послужила отправной точкой всех дальнейших исследований в большой топологической области [2, 3].

В 1921–22 учебном году Урысон впервые в Московском университете прочитал курс топологии. А весной 1924 г. Александровым и Урысоном было решено организовать научный семинар по топологии для студентов, который в дальнейшем, объединившись с топологическим семинаром Коммунистической академии, стал основой знаменитой Московской топологической школы [4, 5]. Многие из участников этого семинара выступили с докладами на топологической конференции 1935 г. (Ефремович В. А., Немыцкий В. В., Понтрягин Л. С., Рожанская Ю. А., Тихонов А. Н.). Интересно, что инициатор проведения Первой международной топологической конференции С. Лефшец также принимал участие в работе этого семинара. Он неоднократно бывал в СССР и в июне–июле 1931 г. трижды выступал с докладами «Основные топологические инварианты», «О топологической многообразии и законе двойственности», «О бесконечных комплексах» перед московскими топологами [6]. В 1934 г. с докладом «О проблемах алгебраической геометрии» Лефшец выступил на II Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде [7].

3. Первое личное знакомство Александрова и Лефшеца случилось, по-видимому, в 1927/28 учебном году, когда Павел Сергеевич вместе с молодым немецким математиком Хайнцем Хопфом (1894–1971) в качестве рокфеллеровских стипендиатов занимались научными исследованиями в Принстоне. Как писал позже в своих воспоминаниях Хопф: «...в университете читали лекции О. Веблен, С. Лефшец и Дж. Александер, и с каждым из них мы вели интересные беседы. Пожалуй, самым важным для нас был контакт с Лефшецом, потому что, с одной стороны, он был союзником Александрова в борьбе за внедрение алгебраических методов в теоретико-множественную топологию, а с другой стороны, мои работы о неподвижных точках примыкали к его основополагающим работам» [8].

О соперничестве Лефшеца и Александера (1888–1971) в это время можно немного прочитать в воспоминаниях известного американского тополога Х. Уитни (1907–1989), одного из молодых участников Московской конференции [9]. Эта работа содержит также очерк истории развития топологии до 1935 г. и воспоминания Уитни о его первых успехах в науке, знакомствах с выдающимися математиками Европы.

4. Официальные отчеты о Московской топологической конференции 1935 г. можно найти и в первом выпуске основанного после II Всесоюзного математического съезда журнала «Успехи математических наук» [10], и в других информационных статьях о достижениях советских математиков [7]; большинство докладов помещено в старейшем отечественном математическом журнале «Математический сборник» [11]. Но мемуарная литература, опубликованная как в советское время, так и в последние годы, позволяет узнать намного больше о том, что подчас скрывается за скупыми информационными статьями.

Х. Уитни в своих воспоминаниях [9] пишет, что для всех большой неожиданностью оказалось выступление А. Н. Колмогорова, который

до этого вроде бы никогда топологией не интересовался. Однако в своем докладе изложил по существу те же результаты, о которых хотел рассказывать и Александер. Как позже отмечал В. И. Арнольд [12], эти работы Колмогорова — «пример неожиданного прорыва Андрея Николаевича в новую область», и после этого Колмогоров топологией не занимался.

Об этом же событии в упомянутых ранее воспоминаниях [8] Хопф пишет чуть иначе: «Независимые друг от друга доклады Дж. Александера, И. Гордона и А. Н. Колмогорова, прочитанные на этой конференции, положили начало теории когомологий (истоки этой теории восходят к Лефшецу, который в 1930 году ввел понятие “псевдоцикла”).» Т.е. кроме Александера и Колмогорова был еще один математик — Израиль Исаакович Гордон (1910—1985), первый аспирант Л. С. Понтрягина, получивший по существу те же результаты, которого никто кроме Хопфа не называет, хотя его доклад опубликован в [11], а известный немецкий тополог Ганс Фройденталь (1905—1990), заинтересовавшись этим вопросом, поскольку конструкция умножения когомологий Гордона отличалась от конструкций Александера и Колмогорова, которые были идентичны, позднее доказал изоморфизм колец Гордона и Александера–Колмогорова. Однако в [10] (и даже в более поздних своих работах) Александров ничего об этом не пишет. Объяснение этому мы можем найти в публикации 2005 г. сына Гордона Е. И. Гордона [13]. Отметим вслед за Е. И. Гордоном, что его отец в то время пользовался постоянной поддержкой Александрова и Понтрягина, которая существенно помогала ему в поисках работы. По его рассказам, утверждение его кандидатской диссертации в ВАК (которая к тому времени уже была опубликована в «Annals of Mathematics») стоило им значительных усилий в связи с “сомнительным политическим лицом” диссертанта. Уитни в [9] не упоминает Гордона, по-видимому, потому, что покинул Москву на следующий день после своего доклада, не дожидаясь окончания конференции.

5. Участников конференции от имени Академии наук СССР приветствовал один из основателей знаменитой Московской математической школы теории функций Николай Николаевич Лузин (1883—1950). Выступать с научным докладом Лузин не стал, поскольку тематика конференции отличалась от направления его математических исследований в то время, однако на заседаниях секции «Топологическая теория множеств» присутствовал, поскольку в ней участвовали его давние коллеги, представители знаменитой Польской школы теории множеств Вацлав Серпинский (1882—1969) и Казимеж Куратовский (1896—1980). Годом позже это обстоятельство стало одним из тех, которые ставились Лузину в вину во время его политической травли (т.н. «дело Лузина») [14].

6. В рамках конференции 5 сентября 1935 г. прошло специальное заседание Московского математического общества, посвященное памяти

Эмми Нетер (1882–1935) [15], на которую в качестве почетного гостя по приглашению ММО приезжал ее брат Фриц Нетер (1884–1941).

7. В уже упоминавшемся приветствии С. Лефшец говорил: «Для людей науки недостаточно читать в печати и невозможно, так как слишком много печатается; но очень важно войти в соприкосновение друг с другом. И важно, чтобы такое соприкосновение было чаще». К сожалению, ситуация в Советском Союзе, да и во всем мире ухудшалась. Уже начиная с 1932 г., выезд за границу стал невозможен и научные контакты были прерваны. Только фантастическая энергия П. С. Александрова позволила ему организовать эту необычайную по представительству конференцию. Вторая Московская топологическая конференция состоялась только в 1979 г., но некоторые международные встречи топологов все же имели место быть. Сразу после Московской конференции 21–25 октября 1935 г. в Женеве под председательством Эли Картана (1869–1951), которого не было в Москве, состоялась Вторая Международная топологическая конференция. В отличие от Московской конференции, на которой с докладами выступило 45 математиков из 10 стран, в Женеве было зачитано только 8 докладов, из которых 4 выступавших участвовали и в работе Московской конференции. Все эти доклады опубликованы в [16].

Были проведены две конференции в США — в Мичиганском университете (1940 г.) и в Чикаго (1950 г.); первый послевоенный Международный Коллоквиум по алгебраической топологии состоялся в 1947 г. в Париже. В настоящее время на механико-математическом факультете МГУ им. Ломоносова регулярно проходят «Александровские чтения». Последние состоялись 22–26 мая 2016 г., в них принимало участие более 170 математиков, было сделано три пленарных и 87 секционных докладов.

Литература

1. *Савицкайте В. С.* О первой международной топологической конференции // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция. М., 2004. — С. 385–388.
2. *Александров П. С.* Топология / Математика и естествознание в СССР. Очерки развития математических и естественных наук за двадцать лет. М.–Л., 1938. — С. 79–96.
3. *Александров П. С., Федорчук В. В., Зайцев В. И.* Основные моменты в развитии теоретико-множественной топологии // УМН — 1978. — Т. 33, вып. 3 (201). — С. 3–48.
4. *Смирнова Г. С.* П. С. Александров и его первые ученики // Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании. Москва, Московский технологический университет (МИРЭА), 12–15 декабря 2016 г. / Под ред. А.Г. Яголы, С.А. Розановой. М.: МИРЭА, 2016.

5. *Смирнова Г. С.* Первые семинары по топологии в Москве // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция. М., 2017.
6. *Немыцкий В. В.* Московский топологический кружок за 10 лет // УМН — 1936. — Вып. 2. — С. 279–285.
7. *Ланго А. Ф., Люстерник Л. А.* Математические съезды и конференции в СССР // УМН — 1957. — Т. 12, вып. 6 (78). — С. 82–85.
8. *Хопф Х.* Некоторые личные воспоминания, относящиеся к предистории современной топологии // УМН — 1966. — Т. 21, вып. 4 (130). — С. 8–16.
9. *Whitney H.* Moscow 1935: Topology Moving Toward America / A Century of Mathematics in America. Part 1. — P. 97–117.
10. *Александров П. С.* Первая международная топологическая конференция в Москве // УМН — 1936. — Вып. 1. — С. 260–262.
11. Первая международная топологическая конференция, 4–10 сентября 1935 г. // Математический сборник. — 1936. — Т. 1 (43). — С. 617–793.
12. *Арнольд В. И.* Об А. Н. Колмогорове // Колмогоров в воспоминаниях / Под ред. А. Н. Ширяева. М. Наука, 1993. — С. 144–172.
13. *Гордон Е. И.* Адресат Л. С. Понтрягина — И. И. Гордон (Вступительные заметки) // Историко-математические исследования. М. 2005. — Вып. 9 (44). — С. 14–26.
14. Научная общественность клеймит врагов в советской маске // «Фронт науки и техники». — 1936. — No. 7. — С. 121–123.
15. *Александров П. С.* Памяти Эмми Нетер // УМН — 1936. — Вып. 2. — С. 255–265.
16. Conférences internationales de topologie // L'Enseignement mathématique. Genève. — 1936. — Vol. 35. — P. 177–287.

UDC 51(091)

Moscow 1935: the First International Topology Conference

G. S. Smirnova*

* *Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119234, Russia*

This article is devoted to the several moments of the history of topology in the USSR and in the USA before the First International Topology conference (Moscow, 1935). The list of participants, the list of articles and the chronology of further International Topology conferences are discussed.

Keywords: history of mathematics, Soviet Topology school, Topology school of America.

Computational models of diamond anvil cell compression

A. I. Kondrat'yev*

* *Independent Researcher,
5944 St. Alban Road, Pensacola, Florida 32503, USA*

Abstract. Diamond anvil cells (DAC) are extensively utilized in the study of material properties at extreme conditions of pressures and temperatures. The pressures in excess of 400 GPa and temperatures in excess of 4000 K have been reported in DAC devices. Most studies on the optimization of diamond geometry and gasket materials used in diamond anvil cell devices have been carried out by trial and error using experimental high pressure data. This article addresses design and optimization issues in DAC using finite element modeling (FEM) and computational analysis. The computational approach is centered around the recent advances in the growth of isotopically enriched carbon-13 layers on diamond anvil and their use as pressure sensor in diamond anvil cell devices. In particular, the carbon-13 diamond layer of 6 microns in thickness grown on top of existing anvil has been demonstrated to serve as a universal pressure sensor to 156 GPa. If a thin enough pressure sensor can be fabricated then the calibration of this sensor is independent of the stress or strain distribution in DAC. Some questions about the geometry and other properties of DAC remain open as well the theory of a universal pressure sensor.

Keywords: Diamond anvil cell device, Finite-element modeling, Diamond-coated rhenium gasket, Diamond anvil failure conditions.

1. Introduction

The object of our research is DAC device main component of which is *diamond anvil*. In DAC configuration a sample chamber is placed between the polished culets of diamond anvils. The metal gasket is preindented between the two anvils before drilling a hole that serves as a pressure chamber. All components are thoroughly assembled in a specially sealed cylinder. Then using tools we can apply pressure by turning special nuts in the assembly. *Object of our investigation* is the DAC device. We study separately DAC device components: diamond anvils, gasket, and sample material. In those components we study radial and axial stresses as well as pressure distribution with respect to geometry of anvils, sample and gasket material properties, and radial and axial coordinates. We have complete description of geometry and material properties of all DAC components. Because of DAC special design and diamond transparency we have X-ray diffraction experiments data for sample materials obtained within DAC compression. In some cases, diamonds were compressed to failure to test the upper limit of the pressures that can be created in diamond anvil cell

device. In order to use results of diffraction experiments we have to use equations of state for diamond, sample material, and a gasket. As a result, we obtain dependencies of pressure distribution vs. radial distance. The pressure distribution in DAC can be experimentally measured only at the diamond/gasket interface and diamond/sample interface or at $z = 0$. Obtaining experimental data of pressure vs. axial distance is more complicated problem. At this stage of DAC device technology we are not able to measure axial and radial stresses. In order to calculate this information we have to use finite element analysis and modeling (FEAM) and computer simulation as well as analytical modeling and solution to main problems. Further development of finite element modeling (FEM) give us the full computer simulation model of DAC compression process. We develop and extend diamond anvil capabilities in order to use it as a high pressure sensor. When a thin film of ^{13}C layer was grown on a top of regular diamond anvil this thin film maybe used as a high pressure sensor using Raman spectroscopy. Our last study is by using analytical description and analysis of stresses and strains in an anvil and in a layer and also by using FEAM and computer simulation to analyze pressure distribution in a layer by describing the behavior of optical transverse phonon mode in an anvil and in a layer. *Our working approach* is based on use FEM and variety of analytical models with conjunction of experimental data. We validated these models as well computer simulation models on the results of other researchers and verify them on experimental data. The use of analytical model is essential because in some cases Nike2D supported simulation models do not provide this type of information, e.g. equations of state, dependence on initial and boundary conditions, solution stability, internal and external strain, stress, loads and phonoelastic tensor properties. Phonoelastic analytical models allow connect strain measurements with experimental data on Raman data under high pressure.

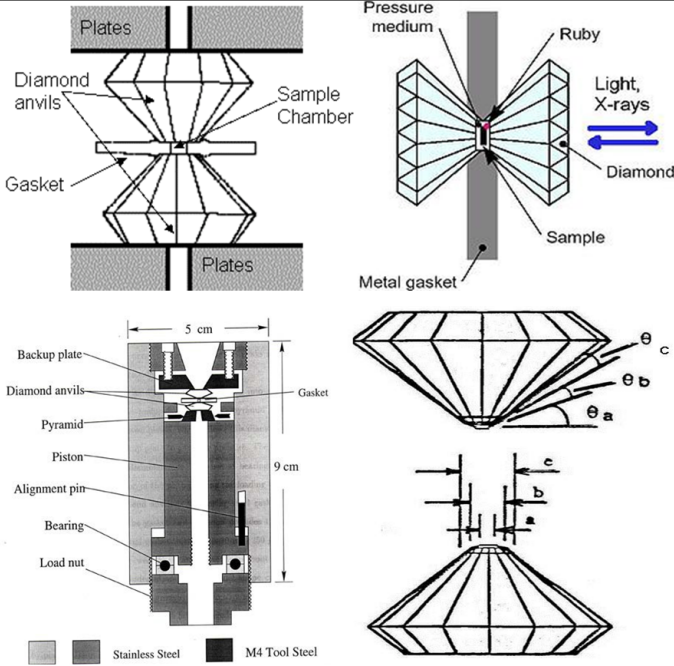
2. Computational Models. Equations of Motion and State in Nike2D

Let ρ be the density, u_i are the displacements Ω is the continuum domain, b_i is body force per unit volume, τ_{ij} is the Cauchy's stress tensor. As always

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \ddot{u}_i = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

FE equations of motion in Ω : $\rho \cdot \ddot{u}_i = b_i + \tau_{ij,j}$. Let continuum domain Ω has a boundary Γ_u , where spatial displacements u_i are defined, and also a boundary Γ_τ , where stresses τ are defined.

$$\begin{aligned} \text{Boundary conditions are} \quad u_i &= \tilde{u}_i \subset \Gamma_u, \\ \tau_{ij} \cdot n_j &= \tilde{\tau}_i \subset \Gamma_\tau. \end{aligned}$$



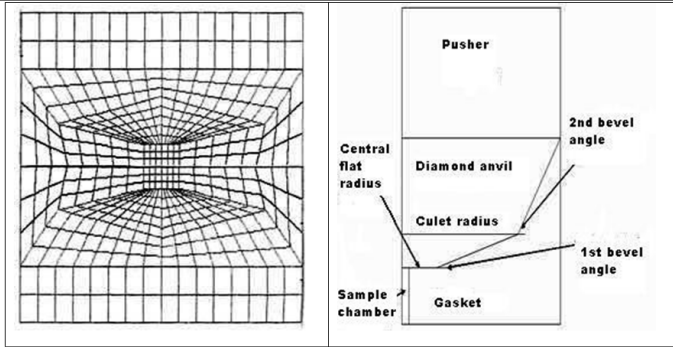
Initial conditions are $u_i(0) = u_{0i}$,
 $\dot{u}_i(0) = \dot{u}_{0i}$.

Rate of deformation tensor is $\dot{d}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$.

The Cauchy tensor τ in general is a function of \dot{d}_{ij} and a set of history variables \tilde{H} and temperature T (we consider temperature to be constant in our investigation)

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(\dot{d}_{ij}, \tilde{H}, T) = \tau_{ij}(\dot{d}_{ij}, \tilde{H}).$$

In our work we use two Nike2D material models: elastic and elastoplastic. Nike2D uses axes r and z . Equations of state in the way they usually defined in solid mechanics are not inbuilt in Nike2D. Sets of parameters are used for elastic and elastoplastic materials. These parameters are related through some definitive equations of general form which we present later. This leads us in our research to a rather strong commitment: try to use well known equations of state for DAC components as well as different types of analytical models valid for FEM DAC (e.g. Timoshenko-Goodier's model). We use Lagrangian and Eulerian theories in order to implement



some of Nielsen's stress-strain models into FEAM. In order to validate analytical models we compare stress-strain curves obtained by Nike2D FEM with the ones obtained from Timoshenko-Goodier's, Nielsen's, and Handland et al.'s models. We also develop adjusting procedures with use of some controlling parameters of these models in order to inbuilt them into FEAM. Notice that use of analytical models in our FEAM research is perfectly justified because these models are not inbuilt in FEM supported by Nike2D. Process of DAC compression is described by components, geometry model, material model, motion model and equation of state. Maze language commands allow to describe material models for each of DAC components. Diamond anvil and "pusher" are considered to be "elastic" and each of them is described by density, Young's modulus, and Poisson's ratio. This model describes isotropic, linear elastic material behavior. Gasket and sample material are considered to be "kinematic/isotropic elastic-plastic material" and described by density, Young's modulus, Poisson's ratio, yield stress, hardening modulus, hardening parameter, number of points in stress-effective plastic strain curve, effective plastic strain, and effective stress. This model includes linear or nonlinear strain hardening. Kinematic and isotropic hardening models which describe sample and gasket material yield identical behavior under monotonic loading. We consider only double-beveled diamond anvils. Using Nike2D Maze input language and using axial and radial symmetry of DAC we describe all four components of DAC. Each component is described by its own geometry and its own mesh. Geometry includes a series of line definitions. Points are introduced in the line definitions. Using these definitions element and nodal topologies are generated by Maze. Each DAC FE is defined by four boundary, nodal points which are in nondeformed state connected by line segments. The material number describing material properties of the element is also included in the definition. From lines parts and regions are constructed. Mesh assembly is defined from all described parts.

Process of DAC compression is described by components, geometry model, material model, motion model and equation of state. Sample of DAC geometry and mesh for all components is shown. Maze language

commands allow to describe material models for each of DAC components. Diamond anvil and “pusher” are considered to be “elastic” and each of them is described by density, Young’s modulus, and Poisson’s ratio. This model describes isotropic, linear elastic material behavior. Gasket and sample material are considered to be “kinematic/isotropic elastic-plastic material” and described by density, Young’s modulus, Poisson’s ratio, yield stress, hardening modulus, hardening parameter, number of points in stress-effective plastic strain curve, effective plastic strain, and effective stress. This model includes linear or nonlinear strain hardening. Kinematic and isotropic hardening models which describe sample and gasket material yield identical behavior under monotonic loading. Parameters describing elastic and elastoplastic material behavior usually are considered as linear or nonlinear functions of pressure.

3. Results and Conclusions

The following results were obtained:

1. The validation of the modeling approaches. Pressure distribution results obtained on DAC compression model were verified using existing literature data;
2. DAC compression model in Nike2D computer code was investigated for different types of boundary and initial conditions, verified on several practical applications and theoretical results including equations of state, Timoshenko-Goodier’s, Nielsen’s and Hanfland et al.’s models;
3. The experimentally measured pressure distribution in DAC to a peak pressure of 213 GPa by X-ray diffraction methods using a diamond coated rhenium gasket was compared with the finite element modeling results and a good agreement was obtained;
4. The role of a thin film of ^{13}C layer and its use as a universal sensor in DAC to 156 GPa and corresponding mechanisms involved were analyzed;
5. Finally, the role of diamond geometry and gasket materials were investigated to get a realistic estimate of the ultra high pressure conditions that can be generated in diamond anvil cells. The radial and axial stresses as well as shear stresses were examined and a failure criterion for diamond anvils in high pressure devices was developed.

Acknowledgments

This material is based upon work supported by the Department of Energy (DOE) National Nuclear Security Administration (NNSA) under Grant No DE-FG52- 06NA26168.

References

1. *Kondrat'yev A. I., Vohra Y. K.* Finite-element modeling of stresses and strains in a diamond anvil cell device: case of a diamond-coated rhenium gasket // High Pres. Res. — 2007. — Vol. 27, no. 3. — P. 321–331.
2. *Kondrat'yev A. I.* Mathematical modeling and computer simulation of compression process. — VDM Verlag, 2009.

Central Limit Theorem of Turing's Formula

Molchanov S.*[†], Zhang Zh.[†], Zheng L.[‡]

* *Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[†] *University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC, USA*

[‡] *Tennessee Technological University, Cookeville, TN, USA*

Abstract. The paper concerns the generalized Maxwell-Boltzmann scheme: the distribution of n particles among infinitely many boxes b_k , $k \geq 1$, in a system. Let $Y_k(n)$, $k \geq 1$, be the occupation members of the boxes, $N_r = \sum_{k \geq 1} 1[Y_k = r]$, where $1[\cdot]$ is the indicator function and $r = 0, 1, \dots, n$. The paper contains the central limit theorem for the joint distribution of N_1 and the Turing's "lost probability" statistic, $\pi_0 = \sum_{k \geq 1} p_k 1[Y_k = 0]$ under mild regularity conditions on the distribution $\{p_k; k \geq 1\}$.

Keywords: Maxwell-Boltzmann statistics, occupation numbers, missing probabilities, Turing's formula, central limit theorem.

1. Introduction

Alan Turing, along with Hödel and Cherch, is considered as one of the founders of the modern mathematical logic (Turing machine, recursive functions, etc.). But he also worked in cryptography, statistics, and information theory. The following model was proposed by Alan Turing during his famous activity in the decoding of German submarine enigmas in WWII. It is the generalization of the multivariant distribution or Maxwell-Boltzmann scheme.

2. Main Section

Let $\mathcal{X} = \{\ell_k, k \geq 1\}$ be a countable alphabet with letters ℓ_1, ℓ_2, \dots . Consider a corresponding probability distribution $\{p_k; k \geq 1\}$ on \mathcal{X} , $p_k > 0$, $p_k \downarrow$, and $\sum_{k \geq 1} p_k = 1$. Let $\{Y_k; k \geq 1\}$ be the frequencies of the letters observed in an identically and independently distributed (*iid*) sample of size n under the distribution $\{p_k; k \geq 1\}$.

In the terminology of Maxwell-Boltzmann statistics, ℓ_k , $k \geq 1$, are the boxes, Y_k are the occupation numbers of the boxes in the case when n particles are allocated independently to the boxes one by one according to the distribution $\{p_k; k \geq 1\}$.

Let $N_r(n) = \sum_{k \geq 1} 1[Y_k = r]$, $r = 1, 2, \dots, n$, *i.e.*, N_r is the number of letters repeated exactly r times in the sample. The *lost probability statistic* by Turing is given by the formula

$$\pi_0 = \sum_{k \geq 1} p_k 1[Y_k = 0],$$

the total probability associated with the unobserved letters or empty boxes.

Since Y_k , for each k , $k \geq 1$, has the binomial distribution with parameters (n, p_k) , it follows that

$$E(\pi_0) = \sum_{k \geq 1} p_k (1 - p_k)^n$$

and

$$E(N_1(n+1)) = \sum_{k \geq 1} \binom{n+1}{1} p_k (1 - p_k)^n,$$

that is,

$$(n+1) E(\pi_0(n)) = E(N_1(n+1))$$

(a justification for Turing formula) and $N_1(n)$ (*i.e.*, the number of letters observed exactly once) is a good approximation for the lost probability $\pi_0(n)$ after normalization $\pi_0 \rightarrow n\pi_0$ (see additional information in the monograph [1]).

In the present talk we will discuss only random variables $\pi_0(n)$ and $N_1(n)$ as $n \rightarrow \infty$ and the corresponding central limit theorem after appropriate normalization.

Note that there are many cases when the random variable, say, $N_1(n)$ is not asymptotically normal. Consider the geometric distribution $p_k = pq^{k-1}$, $k \geq 1$, $0 < p < 1$, and $q = 1 - p$. Then

$$\begin{aligned} E(N_1(n)) &= \sum_{k \geq 1} np_k (1 - p_k)^{n-1} \\ &= \sum_{k \geq 1} npq^{k-1} (1 - pq^{k-1})^{n-1} \\ &\sim \sum_{k \geq 1} npq^{k-1} e^{-(n-1)pq^{k-1}}. \end{aligned}$$

The asymptotics of the first moment has a form,

$$E(N_1(n)) \sim \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{a(n)}{q^l} e^{-\frac{a(n)}{q^l}} (1 + o(1)),$$

where

$$a(n) = p \exp \left(- \ln \frac{1}{q} \left[\frac{\ln(n-1)}{\ln(1/q)} \right] \right).$$

The important fact is not only that $N_1(n)$ is bounded in probability but also the slow oscillation of $E(N_1(n))$ in the $\ln n$ scale as $n \rightarrow \infty$.

Even for slowly decreasing p_k the first two moments of $N_1(n)$ on $n\pi_0(n)$ can oscillate and be small for appropriate sub-sequences $\{n_k\}$. The proof of the central limit theorem requires some regularity assumptions.

Assume that sequence $\{p_k; k \geq 1\}$ has C^2 interpolation $p(x) \in [0, \infty)$ such that $p_k = p(k)$, $p(0) < \infty$, $p'(x) < 0$ for $x \geq 0$, i.e., $\int_0^\infty p(k)dx \geq p(0) + \sum_{k \geq 1} p_k = p(0) + 1$. We consider three cases:

- a) $p(x) = \frac{L(x)}{(1+x)^\alpha}$, where $\alpha > 1$ and $L(x)$ is a regularly slowly varying function on $[0, \infty)$ (it means that $L(x) \in C^1([0, \infty))$ and $L'(x) = L_1(x)/(1+x)$, where $L_1(x) = o(L(x))$).
- b) $p(x) = \exp(-\ln(1+x)L(x))$, where $L(x) \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow \infty$ and satisfies the same condition as in a).
- c) $p(x) = \exp(-x^\alpha L(x))$, where $0 < \alpha < 1$ and $L(x)$ is from the same class as in a) and b).

Theorem 1. Consider the Turing vector $(n\pi_0(n), N_1(n))$. In all three regular situations a), b) and c) after normalization

$$\left(\pi_0^*(n) = \frac{n\pi_0(n)}{\sqrt{\text{Var}(n\pi_0(n))}}, \quad N_1^*(n) = \frac{N_1(n) - \mathbb{E}(N_1(n))}{\sqrt{\text{Var}(n\pi_0(n))}} \right),$$

it follows that

$$(\pi_0^*(n), N_1^*(n)) \xrightarrow{\text{law}} N(0, B)$$

where B is a non-degenerated limiting covariance matrix (see below). The analysis of the moments of $n\pi_0(n)$ and $N_1(n)$ is a non-trivial analytic problem. Let's give first the integral representations for such moments:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(n\pi_0(n)) &\sim \int_0^\infty np(x)e^{-np(x)}dx, \quad \text{as } n \rightarrow \infty \\ \mathbb{E}(N_1(n)) &= \mathbb{E}(n\pi_0(n)) + \mathcal{O}(1), \\ \text{Var}(n\pi_0(n)) &\sim \int_0^\infty n^2 p^2(x) \left(e^{-np(x)} - e^{-2np(x)} \right) dx, \\ \text{Var}(N_1(n)) &\sim \int_0^\infty np(x)e^{-np(x)}dx - \int_0^\infty n^2 p^2(x)e^{-2np(x)}dx, \\ \text{Cov}(n\pi_0(n), N_1(n)) &= 0. \end{aligned}$$

It is not difficult to understand that the main contribution to the moments is from the region where $np(x) = \mathcal{O}(1)$, i.e., the occupation numbers Y_k , $k \geq 1$, have Poisson distributions. After changes of the variables and using the Laplace method, one can find the asymptotics for the moments. The formulas in the simplest cases are presented below.

I) $p(x) = \frac{L(x)}{(1+x)^\alpha}$, where $\alpha > 1$. In this case,

$$\begin{aligned} E(N_1(n+1)) &= E(n\pi_0(n)) \sim C_1(\alpha)n^{1/\alpha}\tilde{L}(n), \\ \text{Var}(N_1(n)) &\sim C_2(\alpha)n^{1/\alpha}\tilde{L}(n), \quad \text{and} \\ \text{Var}(n\pi_0(n)) &\sim C_3(\alpha)n^{1/\alpha}\tilde{L}(n). \end{aligned}$$

For the constants, $C_i(k)$, $i = 1, 2, 3$, and the slowly varying function $\tilde{L}(n)$ there are exact expressions.

II) $p(x) = \exp(-\ln^\beta x)$, where $\beta > 1$ (a particular case of a more general form presented above). In this case,

$$\begin{aligned} E(N_1(n)) &= E(n\pi_0(n)) \sim C_1(\beta)\frac{e^{(\ln n)^{1/\beta}}}{(\ln n)^{1-1/\beta}}, \\ \text{Var}(N_1(n)) &\sim C_2(\beta)\frac{e^{(\ln n)^{1/\beta}}}{(\ln n)^{1-1/\beta}}, \quad \text{and} \\ \text{Var}(n\pi_0(n)) &\sim C_3(\beta)\frac{e^{(\ln n)^{1/\beta}}}{(\ln n)^{1-1/\beta}}. \end{aligned}$$

III) $p(x) = \exp(-x^\alpha L(x))$, where $\alpha \in (0, 1)$. In this case, all first and second moments have (up to a constant factor depending only on α) the form $C_i(\alpha)\ln^{1/\alpha-1}n\tilde{L}(n)$, where the slowly varying function \tilde{L} can be expressed in terms of L and α .

3. Conclusions

The paper in progress will contain the central limit theorem for the system $\pi_0(n), N_1(n), \dots, N_r(n)$ under the same classes of distribution $\{p_k; k \geq 1\}$ as presented above. Examples will be given to show that outside these classes there are cases for which the asymptotic normality does not hold. Statistical applications will also be considered.

References

1. *Zhang Z.* Statistical implications of Turing formula. — John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA, 2017.

UDC 519.214.7

Approximation of diffusion processes on solvable Lie groups by random walks. Local and quasi-local limit theorems

V. Konakov*, S. Menozzi*[†], S. Molchanov*[‡]

* *Laboratory of Stochastic Analysis and its Applications,
Higher School of Economics,
Shabolovka str. 28/1, Moscow, Russia*

[†] *LaMME, UMR CNRS 8071,
Université d'Evry Val d'Essonne,
23 Boulevard de France, 91037 Evry, France*

[‡] *Department of Mathematics and Statistics,
University of North Carolina,
Charlotte, NC 28223, USA*

Abstract. This note states several results on the exponential functionals of the Brownian motion and their approximations by Markov chains. Starting from M. Yor, such functionals were studied in mathematical finance. At the same time, they play a significant role in different settings: the analysis of diffusions on the class of solvable Lie groups, in particular on the group of (2×2) upper triangular matrices, with positive diagonal elements. The discrete random walks cannot properly describe the local structure of diffusion. However, instead of the usual local limit theorem (which is not applicable) its weaker form, namely quasi-local form is given.

Keywords: Exponential functionals, Brownian motion, Asian option, solvable Lie groups, random walks, quasi-local theorems.

1. Introduction

In the well known paper [1], see also selected works by Marc Yor on the exponential functionals [2], the author studied the moments and the distribution density for particular functional of the Brownian motion $B(s)$, $s \geq 0$:

$$A_t^\nu = \int_0^t \exp(2B(s) + \nu s) ds,$$

which corresponds up to normalization in t^{-1} to the process associated with the Asian option in the Black and Scholes model. The general case $\nu \neq 0$ can be reduced to $\nu = 0$ using the Girsanov transformation and the central object is now $A_t = \int_0^t \exp(2B(s)) ds$.

This and more general exponential functionals (which have a transparent financial meaning) also appear in a completely different setting: the Brownian motion on the solvable matrix groups. In this note we present several results in the area but to simplify the notations we consider one

particular case, namely the group G_2 of 2×2 upper triangular matrices with positive diagonal elements.

We will use the parametrization

$$g = \begin{bmatrix} \exp(x) & z \\ 0 & \exp(y) \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad g \in G_2.$$

2. Main section

The simplest random walk on G_2 with short steps can be constructed as the product of random matrices containing a parameter $\varepsilon = \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$A_{\varepsilon, k} = \begin{bmatrix} \exp(\varepsilon X_k) & \varepsilon Z_k \\ 0 & \exp(\varepsilon Y_k) \end{bmatrix},$$

where the random variables (X_k, Y_k, Z_k) are independent for fixed k and the triples for different k are also independent. In addition

$$\mathbb{E}X_k = \mathbb{E}Y_k = \mathbb{E}Z_k = 0, \quad \text{Var}X_k = \text{Var}Y_k = \text{Var}Z_k = 1.$$

Let

$$g_\varepsilon(r) = \prod_{k=1}^r A_{\varepsilon, k} = \begin{bmatrix} \exp(x(r)) & z(r) \\ 0 & \exp(y(r)) \end{bmatrix}, \quad g_\varepsilon(r+1) = g_\varepsilon(r)A_{\varepsilon, r+1}. \quad (1)$$

From the last relation

$$\begin{aligned} x(r+1) &= x(r) + \varepsilon X_{r+1} \Rightarrow \exp(x(r)) = \exp(\varepsilon(X_1 + \dots + X_r)), \\ y(r+1) &= y(r) + \varepsilon Y_{r+1} \Rightarrow \exp(y(r)) = \exp(\varepsilon(Y_1 + \dots + Y_r)), \\ z(r+1) &= \varepsilon Z_{r+1} \exp(\varepsilon(X_1 + \dots + X_r)) + z(r) \exp(\varepsilon Y_{r+1}). \end{aligned}$$

After iteration in the last formula

$$\begin{aligned} z(r) &= \varepsilon[Z_r \exp(\varepsilon(X_1 + \dots + X_{r-1})) + Z_{r-1} \exp(\varepsilon(X_1 + \dots + X_{r-2} + Y_r)) \\ &\quad + Z_{r-2} \exp(\varepsilon(X_1 + \dots + X_{r-3} + Y_{r-1} + Y_r)) + \dots \\ &\quad + Z_1 \exp(\varepsilon(Y_2 + \dots + Y_r))]. \end{aligned}$$

The successive sums of the random variables X_k, Y_k, Z_k are attracted (due to the functional CLT by Donsker-Prokhorov) to the Brownian motion i.e for $n \rightarrow \infty$,

$$\{\varepsilon(X_1 + \dots + X_r) = \frac{(X_1 + \dots + X_r)}{\sqrt{n}}, \quad r = [tn], \quad t \leq 1\} \xrightarrow{\text{(law)}} b_1(t), \quad t \leq 1.$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(Y_1 + \cdots + Y_r), r = [tn] \xrightarrow{(\text{law})} b_2(t), t \leq 1\}, \\ \{\varepsilon(Z_1 + \cdots + Z_r), r = [tn] \xrightarrow{(\text{law})} b_3(t), t \leq 1\}, \end{aligned}$$

and the processes $b_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ are three independent standard one dimensional Brownian motions.

Theorem 1 (Brownian motion on G_2) For the process introduced in (1), the following convergence holds:

$$g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}([tn]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{law})} g(t), t \leq 1,$$

and

$$g(t) = \begin{bmatrix} \exp(b_1(t)) & \int_0^t \exp(b_1(s) + b_2(t) - b_2(s)) db_3(s) \\ 0 & \exp(b_2(t)) \end{bmatrix} \quad (2).$$

The generator of the process:

$$\Theta_t = (\exp(b_1(t)), \exp(b_2(t)), \exp(b_2(t)) \int_0^t \exp(b_1(s) - b_2(s)) db_3(s)),$$

writes:

$$\begin{aligned} (Lf)(x, y, z) = & \frac{1}{2} \left[x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (z^2 + x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right. \\ & \left. + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right] (x, y, z). \end{aligned}$$

Usually in the study of the approximations of the diffusions by the Markov chains we want to prove not only the integral theorems (on the convergence of the distribution functions) but also some kind of the local theorems. In our case everything is nice for the diagonal elements of the matrices. For instance, if X_i are symmetric Bernoulli random variable then for $k = O(\sqrt{n})$,

$$P\{X_1 + \cdots + X_n = k\} = P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}k \right\} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{k^2}{2n}}}{\sqrt{2\pi n}}.$$

The same is true for arbitrary integer valued random variables X_i such that $EX_i = 0$, $Var X_i = 1$.

What happens in the Bernoulli case for the non diagonal entry? Consider the random variable

$$\frac{z(n)}{\varepsilon} = Z_n e^{\varepsilon(X_1 + \dots + X_{n-1})} + Z_{n-1} e^{\varepsilon(X_1 + \dots + X_{n-2} + Y_n)} + \dots + Z_1 e^{\varepsilon(Y_2 + \dots + Y_n)}.$$

For fixed X_i, Y_j it has a form

$$S = \sum_{i=1}^n a_i Z_i,$$

where a_i are typically (say, for rational ε) jointly transcendental. It gives either $P\{S = 0\} = 0$ or (like in our case of particular $a_i, i = 1, \dots, n$) $P\{S_n = 0\} = o(e^{-\sqrt{n}})$ (see e.g. [6]), i.e the local CLT is not working. But there is a bit weaker quasi-local theorem. Let us formulate the following result.

Lemma 1 *Let X_{1n}, \dots, X_{nn} be independent random variables (in each group) and $EX_{in} = 0, VarX_{in} = \sigma_{in}^2, B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{in}^2, \mu_{in} = E|X_{in}|^3$ and $M_n = \sum_{i=1}^n \mu_{in}$. Assume that $B_n \rightarrow \infty$ and Lyapunov function $L(n) := \frac{M_n}{B_n^3} = O(\frac{1}{B_n})$. Then for any sequence $d_n \rightarrow \infty$ and $\frac{d_n}{B_n} \rightarrow 0$ for a fixed integer b ,*

$$P \left\{ \frac{X_{1n} + \dots + X_{nn}}{B_n} \in \left(b, \frac{d_n}{B_n} + b \right) \right\} \sim \frac{d_n}{B_n} \phi(b).$$

Here $\phi(b) = \frac{e^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

Using this lemma one can prove the quasi-local theorem for the element $z(n)$. If the random variables $X_k, Y_k, Z_k, k \leq n$ have the densities, then the following results hold.

Theorem 2 *If X_i, Y_j, Z_k have characteristic functions in $L^1(R)$, so that in particular they have densities, then the joint distribution density for the elements of $g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(t_n)$ exists and converges uniformly to the joint distribution density for elements of the $g(t)$.*

The recent progress in the study of limit theorems for non-lattice and non absolutely continuous distributions (see e.g. [3], [4]), opens the possibility to prove stronger quasi-local theorems for singular distributions of Z_i with Diophantine property.

Finally we want to formulate two results on the *generalized* Yor's type exponential functional on G_2 :

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \exp[2(b_1(s) + b_2(t) - b_2(s))] ds.$$

Theorem 3 For $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln A(t)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow{\text{(law)}} M_1 := \max_{s \leq 1} [b_1(s) + b_2(1) - b_2(s)].$$

For the distribution of M_1 there exists an explicit formula. This formula shows that the generalized Asian option is very large for $t \rightarrow \infty$ with high probability.

However, the following result holds.

Theorem 4 Consider

$$\alpha(t) = \mathbb{E}[A(t) | b_1(s) \leq 1, b_2(s) \leq 1, s \leq t]$$

(i.e. prices of both stocks did not grow). Then $\alpha(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, a.s.

3. Conclusions

The proofs of all results presented above as well as the theorems announced by the authors in [5] will be given in the forthcoming paper by the authors. In particular, it will include the quasi-local theorems for the random walks on the dense subgroups of R^1 and such groups as H_3 (Heisenberg group) and $Aff(R^1)$. We also expect to prove new limit theorems for the general exponential functionals given by the multiple Itô integrals.

Acknowledgments

The study has been funded by the Russian Science Foundation (project No 17-11-01098).

References

1. Yor M. On some exponential functionals of Brownian motion // Adv. Appl. Prob. — 1992. — Vol. 24. — P. 509-531.
2. Yor M. Exponential functionals of Brownian motion and related processes. — Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
3. Breuillard É. Distributions diophantiennes et théorème limite local sur R^d // Probab. Theory Rel. Fields. — 2005. — Vol. 132. — P. 39-73.
4. Bobkov S. An extended Khinchin's theorem, and Edgeworth approximations in presence of typical noise. — Preprint, 2017. — www-user.math.umn.edu-bobko001/publications.html.
5. Konakov V., Menozzi S., Molchanov S. Diffusion Processes on Solvable Groups of Upper Triangular 2×2 Matrices and Their Approximation // Doklady Mathematics. — 2011. — Vol 84, no. 1. — P. 527-530.
6. Pittet C., Saloff-Coste L. Random walks on finite rank solvable groups // J. Eur. Math. Soc. — 2003. — Vol. 5. — P. 313-342.

UDC 519.214.4

On natural convergence rate estimates in the Lindeberg theorem

I. Shevtsova*[†], R. Gabdullin*, V. Makarenko*

* *Department of Mathematical Statistics of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Moscow State University, 119991, Leninskie Gory, 1/5/2, Moscow, Russia*

[†] *Institute for Informatics Problems of FRC "Informatics and Control", Vavilova str., 44 Moscow, Russia*

Abstract. We present various natural (according to the Zolotarev (1986) classification) convergence rate estimates in the Lindeberg theorem, like Esseen (1969), Rozovsky (1974), and Ahmad-Wang (2016) inequalities, and their improvements. We also discuss some problems associated with the optimization of the appearing absolute constants and present both upper and lower bounds for them.

Keywords: analytical methods in probability theory, computational methods, central limit theorem, characteristic function.

Let X_1, X_2, \dots, X_n be independent r.v.'s with distribution functions F_1, \dots, F_n and such that $\mathbb{E}X_k = 0$, $\mathbb{E}X_k^2 = \sigma_k^2 < \infty$. Let $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 > 0$, $S_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$, $\bar{F}_n(x) = \mathbb{P}(S_n < x)$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$,

$$\Delta_n = \sup_x |\bar{F}_n(x) - \Phi(x)|, \quad \varrho_k(z) = \left| \int_{|x| < z} x^3 dF_k(x) \right| + z \int_{|x| \geq z} x^2 dF_k(x),$$

$$L_{E,n}^3 = B_n^{-3} \sum_{k=1}^n \sup_{z > 0} \{ \varrho_k(z) \}, \quad \bar{L}_{E,n}^3 = B_n^{-3} \sum_{k=1}^n \sup_{0 < z \leq B_n} \{ \varrho_k(z) \},$$

$$L_{R,n}^3 = B_n^{-3} \left[\left| \sum_{k=1}^n \int_{|x| < B_n} x^3 dF_k(x) \right| + \sup_{0 < z \leq B_n} \left\{ z \sum_{k=1}^n \int_{|x| \geq z} x^2 dF_k(x) \right\} \right].$$

The first term in $\varrho_k(z)$ is the *truncated third-order moment* and the second one is the *quadratic tail*. Note that $\bar{L}_{E,n}^3, L_{R,n}^3$ are always finite, while $L_{E,n}^3$ maybe infinite. Moreover, $\bar{L}_{E,n}^3 \leq L_{E,n}^3$.

In (Esseen, 1968) the following estimates are given:

$$\Delta_n \leq C_E \cdot L_{E,n}^3 \quad \text{and} \quad \Delta_n \leq \bar{C}_E \cdot \bar{L}_{E,n}^3, \quad (1)$$

where C_E, \bar{C}_E are some absolute constants. In (Rozovskii, 1974) it was proved that

$$\Delta_n \leq C_R \cdot L_{R,n}^3, \quad (2)$$

where C_R is an absolute constant.

A very recent result due to (Ahmad, Wang, 2016) can be formulated in the following terms. Let \mathcal{G} be a class of all functions $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ such that $g(z)$ does not decrease together with $z/g(z)$ for $z > 0$, then for every $g \in \mathcal{G}$

$$\Delta_n \leq \frac{C_{AW}}{B_n^2 g(B_n)} \sum_{k=1}^n \sup_{z>0} \frac{g(z)}{z} \varrho_k(z), \quad (3)$$

where C_{AW} is an absolute constant.

All these inequalities improve the celebrated Osipov (1966), Katz (1963), and Petrov (1965) estimates in the CLT and thus can be called *natural* (according to Zolotarev's (1986) classification) convergence rate estimates in the CLT in the sense that their left- and right-hand sides either tend or do not tend to zero simultaneously, if the X_k satisfy the Feller condition of the uniform asymptotic negligibility.

In the present work we improve all the bounds presented above by:

(i) transferring the suprema and the modulae outside of the sum over $k = 1, n$ in (1) and (3);

(ii) bounding the domain $z > 0$ over which the supremum can be taken in (3);

(iii) introducing a parameter $\varepsilon \in (0, \infty]$ defining the domain $0 < z < \varepsilon B_n$ over which the suprema can be taken in (1)–(3);

(iv) introducing a parameter $\gamma > 0$ defining the proportion between the third truncated moment and the quadratic tail in the definitions of $\varrho_k(z)$ and $L_{R,n}^3$.

We also find the extremal functions g that minimize and maximize the R.H.S. of inequality (3) and its improvements. Moreover, we present two-sided bounds for all the constants appearing in the improved inequalities, the lower bounds being obtained in terms of the asymptotically exact constants introduced in (Komogorov, 1953), (Zolotarev, 1986), and (Shevtsova, 2011). The proof of the upper bounds is substantially based on the method of characteristic functions, for which purpose new and sharp estimates for characteristic function were obtained.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grants No. 15-07-02984, 16-31-60110 and by the grant MD-2116.2017.1.

References

1. *Ahmad I. A., Wang N.* A Berry–Esseen Inequality without Higher Order Moments // The Indian Journal of Statistics. — 2016. — Vol. 78-A, no. 2. — P. 180–187.
2. *Esseen C.-G.* On the remainder term in the central limit theorem // Arkiv för Matematik. — 1968. — Vol. 8, no. 2. — P. 7–15.
3. *Kolmogorov A. N.* Some recent works in the field of limit theorems of probability theory // Bulletin of Moscow University. — 1953. — Vol. 10, no. 7. — P. 29–38. (in Russian)
4. *Rozovskii L. V.* On the rate of convergence in the Lindeberg–Feller theorem // Leningrad University Bull. — 1974. — No. 1. — P. 70–75. (in Russian)
5. *Shevtsova I. G.* On the asymptotically exact constants in the Berry–Esseen–Katz inequality // Theory Probab. Appl. — 2011. — Vol. 55, no. 2. — P. 225–252.
6. *Zolotarev V. M.* Modern Theory of Summation of Random Variables. — VSP, Utrecht, The Netherlands, 1986.

An Asymptotic Minimax Theorem for Gaussian Two-Armed Bandit

A. V. Kolnogorov*

** Department of Applied Mathematics and Computer Science,
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University,
B-St-Petersburgskaya str. 41, Velikiy Novgorod, 173003, Russia*

Abstract. The asymptotic minimax theorem for Bernoulli two-armed bandit problem states that minimax risk has the order $N^{1/2}$ as $N \rightarrow \infty$, where N is the control horizon, and provides the estimates of the factor. For Gaussian two-armed bandit with unit variances of one-step incomes and close expectations, we improve the asymptotic minimax theorem as follows: the minimax risk is approximately equal to $0.637N^{1/2}$ as $N \rightarrow \infty$.

Keywords: two-armed bandit problem, minimax and Bayesian approaches, an asymptotic minimax theorem, parallel processing.

1. Introduction

We consider the two-armed bandit problem which is also well-known as the problem of expedient behavior in a random environment and the problem of adaptive control (see, e.g. [1], [2]). Let ξ_n , $n = 1, \dots, N$ be a controlled random process which values are interpreted as incomes, depend only on currently chosen actions y_n ($y_n \in \{1, 2\}$) and are distributed as follows

$$\Pr(\xi_n = 1 | y_n = \ell) = p_\ell, \quad \Pr(\xi_n = 0 | y_n = \ell) = q_\ell,$$

$p_\ell + q_\ell = 1$, $\ell = 1, 2$. This is Bernoulli two-armed bandit. It can be described by a parameter $\theta = (p_1, p_2)$ with the set of values $\Theta = \{\theta : 0 \leq p_\ell \leq 1; \ell = 1, 2\}$. The results can be applied to optimizing of data processing. In this case $\xi_n = 1$ and $\xi_n = 0$ correspond to successively and unsuccessfully processed data. The goal is to maximize (in some sense) the total expected number of successively processed data.

Control strategy σ at the point of time n assigns a random choice of the action y_n depending on the current history of the process, i.e. responses $x^{n-1} = x_1, \dots, x_{n-1}$ to applied actions $y^{n-1} = y_1, \dots, y_{n-1}$. Denote by $m_\ell = p_\ell$ one-step expected income if the ℓ -th action is applied. If the parameter θ is known then the optimal strategy prescribes always to choose the action corresponding to the largest of m_1, m_2 , the total expected income is thus equal to $N(m_1 \vee m_2)$. If the parameter is unknown then the regret

$$L_N(\sigma, \theta) = N(m_1 \vee m_2) - \mathbb{E}_{\sigma, \theta} \left(\sum_{n=1}^N \xi_n \right)$$

describes the expected losses of income due to incomplete information. Minimax risk is equal to

$$R_N^M(\Theta) = \inf_{\sigma} \sup_{\theta} L_N(\sigma, \theta), \quad (1)$$

corresponding optimal strategy is called the minimax strategy. The minimax approach to the problem was proposed in [3] and caused a considerable interest to it. It was shown in [4] that explicit determination of the minimax strategy and minimax risk is virtually impossible already for $N \geq 5$. However, an asymptotic minimax theorem was proved in [5] using some indirect techniques. This theorem states that the following estimates hold as $N \rightarrow \infty$:

$$0.612 \leq (DN)^{-1/2} R_N^M(\Theta) \leq 0.752, \quad (2)$$

where $D = 0.25$ is the maximal variance of one-step income. Presented here the lower estimate was obtained in [6]. The maximal values of the regret calculated for proposed in [5] strategy correspond to $|p_1 - p_2| \approx 3.78(D/N)^{1/2}$ with additional requirement that p_1, p_2 are close to 0.5.

The goal of our paper is to improve the estimates (1). Our approach is based on the main theorem of the theory of games which sets the relation between minimax and Bayesian approaches. Let $\lambda(\theta)$ be a prior probability density. The value

$$R_N^B(\lambda) = \inf_{\sigma} \int_{\Theta} L_N(\sigma, \theta) \lambda(\theta) d\theta \quad (3)$$

is called the Bayesian risk and corresponding optimal strategy is called the Bayesian strategy. Minimax risk (1) and Bayesian risk (1) are related as follows

$$R_N^M(\Theta) = R_N^B(\lambda_0) = \sup_{\lambda} R_N^B(\lambda), \quad (4)$$

where λ_0 is called the worst-case prior distribution. The advantage of the Bayesian approach is that it allows to find explicitly Bayesian strategy and Bayesian risk by solving a recursive Bellman-type equation. However, a direct usage of the main theorem of the theory of games is virtually impossible due to the high computational complexity. Therefore, at first we describe the properties of the worst-case prior and this allows to simplify Bellman-type equation significantly. This is easily made for Gaussian two-armed bandit which occurs if the parallel control in the random environment is implemented, i.e. the same actions are applied to groups of incoming data and then cumulative incomes are used for the control (see [7, 8]). For Gaussian two-armed bandit we obtain the invariant Bellman-type recursive equation with the unit control horizon and second-order partial differential equation in the limiting case. Finally, the asymptotic estimate of the minimax risk is obtained by numerical methods. For Gaussian two-armed bandit with unit variances of one-step incomes

and close expectations, we estimate the minimax risk as approximately equal to $0.637N^{1/2}$ as $N \rightarrow \infty$.

2. Main section

Incomes of the Gaussian two-armed bandit ξ_n , $n = 1, \dots, N$ have probability densities $f(x|m_\ell)$ if $y_n = \ell$, $\ell = 1, 2$ where

$$f(x|m) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2}\right\}.$$

So, Gaussian two-armed bandit is described by a vector parameter $\theta = (m_1, m_2)$. The set of parameters is $\Theta = \{\theta : |m_1 - m_2| \leq 2cN^{-1/2}\}$ with $c > 0$ large enough. It is a set of “close expectations”, maximal expected regret is attained just on this set of parameters.

According to the approach based on the main theorem of the theory of games (see equality (1)) we characterize the worst-case prior distribution. It is convenient to modify parametrization. Let's put $m_1 = m + v$, $m_2 = m - v$, then $\theta = (m+v, m-v)$ and $\Theta = \{\theta : |v| \leq cN^{-1/2}\}$. Asymptotically the worst-case prior distribution density can be chosen as

$$\nu_a(m, v) = \kappa_a(m)\rho(v), \quad (5)$$

where $\kappa_a(m)$ is the uniform density if $|m| \leq a$, $\rho(v)$ is a symmetric density (i.e. $\rho(-v) = \rho(v)$) if $|v| \leq cN^{-1/2}$ and $a \rightarrow \infty$.

Let's present the dynamic programming equation for calculation Bayesian risk and Bayesian strategy with respect to (2). Denote by n_1, n_2, X_1, X_2 current applications of both actions and corresponding total incomes up to the point of time $n = n_1 + n_2$. We assume that once being chosen action is applied M times (so, the group control is considered). It turned out for the prior (2) that at the time point n control is completely determined by a triple (U, n_1, n_2) with $U = (X_1n_2 - X_2n_1)n^{-1}$.

We present the equation in invariant form with unity control horizon. Let's put $\varepsilon = MN^{-1}$, $t_1 = n_1N^{-1}$, $t_2 = n_2N^{-1}$, $t = nN^{-1}$, $u = UN^{-1/2}$, $w = vN^{1/2}$, $c = CN^{1/2}$, $\varrho(w) = N^{1/2}\rho(v)$. Denote $f_D(u) = (2\pi D)^{-1/2} \exp(-u^2/(2D))$.

Bayesian strategy at the initial stage $t \leq 2\varepsilon$ ($n \leq 2M$) applies actions turn-by-turn. Then it can be determined by solving the following recursive equation:

$$r_\varepsilon(u, t_1, t_2) = \min_{\ell=1,2} r_\varepsilon^{(\ell)}(u, t_1, t_2), \quad (6)$$

where $r_\varepsilon^{(1)}(u, t_1, t_2) = r_\varepsilon^{(2)}(u, t_1, t_2) = 0$ if $t_1 + t_2 = 1$ and

$$r_\varepsilon^{(1)}(u, t_1, t_2) = \varepsilon g^{(1)}(u, t_1, t_2) + r_\varepsilon(u, t_1 + \varepsilon, t_2) * f_{\varepsilon t_2^2 t^{-1}(t+\varepsilon)^{-1}}(u), \quad (7)$$

$$r_\varepsilon^{(2)}(u, t_1, t_2) = \varepsilon g^{(2)}(u, t_1, t_2) + r_\varepsilon(u, t_1, t_2 + \varepsilon) * f_{\varepsilon t_1^2 t^{-1}(t+\varepsilon)^{-1}}(u) \quad (8)$$

if $t_1 + t_2 < 1$. Here ‘*’ denotes convolution,

$$g^{(\ell)}(u, t_1, t_2) = \int_0^c 2w \exp((-1)^\ell 2uw - 2w^2 t_1 t_2 t^{-1}) \varrho(w) dw,$$

$\ell = 1, 2$. If $t > 2\varepsilon$ ($n > 2M$) then the ℓ -th action is currently optimal iff $r_\varepsilon^{(\ell)}(u, t_1, t_2)$ has smaller value ($\ell = 1, 2$). Bayesian risk corresponding to the prior (2) is calculated according to the formula

$$N^{-1/2} R_N^B(\rho(v)) = 4\varepsilon \int_0^c w \varrho(w) dw + \int_{-\infty}^{\infty} r_\varepsilon(u, \varepsilon, \varepsilon) f_{0.5\varepsilon}(u) du, \quad (9)$$

where

$$N^{-1/2} R_N^B(\rho(v)) = \lim_{a \rightarrow \infty} N^{-1/2} R_N^B(\nu_a(m, v)).$$

It is proved in [7, 8] that there exists a limit $r(u, t_1, t_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} r_\varepsilon(u, t_1, t_2)$ as $\varepsilon \rightarrow +0$. The limiting description of $r(u, t_1, t_2)$ is given by the second-order partial differential equation which follows from (2), (2), (2). Equation (2) must be written as $\min(r_\varepsilon^{(\ell)}(u, t_1, t_2) - r_\varepsilon(u, t_1, t_2)) = 0$, $\ell = 1, 2$. The differential equation is as follows

$$\min_{\ell=1,2} \left(\frac{\partial r}{\partial t_\ell} + \frac{t_\ell^2}{2t^2} \times \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + g^{(\ell)}(u, t_1, t_2) \right) = 0 \quad (10)$$

with $\bar{\ell} = 3 - \ell$. Initial and boundary conditions take the form

$$r(u, t_1, t_2)|_{t_1+t_2=1} = 0, \quad r(\infty, t_1, t_2) = r(-\infty, t_1, t_2) = 0. \quad (11)$$

The optimal strategy prescribes to chose the ℓ -th action if the ℓ -th member in the left-hand side of (2) has minimal value. Note that $\varepsilon \rightarrow 0$ implies $N \rightarrow \infty$. So, the limiting value of Bayesian risk according to (2) is given by

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1/2} R_N^B(\rho(v)) = r(0, 0, 0). \quad (12)$$

To estimate the limiting value of the minimax risk according to (1) and (2) we assumed that the worst-case prior $\varrho(w)$ is a degenerate one and is concentrated at two points $w = \pm d$ with equal probabilities. Calculations of $r(u, t_1, t_2)$ as a function of d were implemented according to (2), (2) for $t_1 + t_2 \geq \varepsilon$ with $\varepsilon = 0.001$. Partial derivatives were replaced by

partial differences with $\Delta u = 0.023$, $\Delta t = 2000^{-1}$. For $0.5 \leq d \leq 2.5$ maximum of $2d\varepsilon + r(0, \varepsilon, \varepsilon)$ was approximately equal to 0.637 at $d \approx 1.57$. Finally, the determined optimal strategy was applied to calculate regrets for $0.5 \leq d \leq 2.5$. As the regret does not exceed the value 0.637 at $d \approx 1.57$, this confirms the assumption of the worst-case prior.

3. Conclusions

The asymptotic minimax theorem for Gaussian two-armed bandit was obtained for the case of close mathematical expectations. To generalize it to the case $\Theta = \{\theta : |m_1 - m_2| \leq 2C\}$, $0 < C < \infty$ one should provide the separation of close and distant expectations at the initial stage of control. Some ideas are presented in [7]. Applications of the results to Bernoulli two-armed bandit may be done by usage of group control.

References

1. *Berry D. A., Fristedt B.* Bandit Problems: Sequential Allocation of Experiments. — Chapman and Hall, London, New York, 1985.
2. *Sragovich V. G.* Mathematical Theory of Adaptive Control. — World Scientific. Interdisciplinary Mathematical Sciences, New Jersey, London, 2006. — Vol. 4.
3. *Robbins H.* Some aspects of the sequential design of experiments // Bulletin AMS. — 1952. — Vol. 58, no. 5. — P. 527–535.
4. *Fabius J., van Zwet W. R.* Some remarks on the two-armed bandit // Ann. Math. Statist. — 1970. — Vol. 41. — P. 1906–1916.
5. *Vogel W.* An asymptotic minimax theorem for the two-armed bandit problem // Ann. Math. Stat. — 1960. — Vol. 31. — P. 444–451.
6. *Bather J. A.* The minimax risk for the two-armed bandit problem // Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, New York. — 1983. — Vol. 20. — P. 1–11.
7. *Kolnogorov A. V.* Parallel design of robust control in the stochastic environment (the two-armed bandit problem) // Automation and Remote Control. — 2012. — Vol. 73, no. 4. — P. 689–701.
8. *Kolnogorov A. V.* On a limiting description of robust parallel control in a random environment // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, no. 7. — P. 1229–1241.

UDC 519.2

On probabilities of large and moderate deviations for L -statistics: a survey of some recent developments

N. V. Gribkova*[†]

* *Department of Probability Theory and Mathematical Statistics,
St.-Petersburg State University,
Universitetskaya nab. 7/9, St. Petersburg, 199034, Russia*

[†] *Department of Mathematics and Simulations,
St.-Petersburg State Transport University,
Moskovsky av. 9, St.-Petersburg, 190031, Russia*

Abstract. A survey of some new results on Cramér type large and moderate deviations for trimmed L -statistics and for intermediate trimmed means will be presented. We discuss a new approach to the investigation of asymptotic properties of trimmed L -statistics proposed in the reviewed papers that allowed us to establish certain results on large and moderate deviations under quite mild and natural conditions.

Keywords: large deviations, moderate deviations, L -statistics, intermediate trimmed mean, slightly trimmed mean, central limit theorem for L -statistics.

1. Introduction

The class of L -statistics is one of the most commonly used classes in statistical inferences. We refer to monographs [5], [11], [12], [14] for the introduction to the theory of L -statistics. A survey on some modern applications of them in the economy and theory of actuarial risks can be found in [7]. There is an extensive literature on asymptotic properties of L -statistics, but its part concerning the large deviations is not so vast. We can mention a few of highly sharp results on this topic for L -statistics with smooth weight functions established in [13], [2], [1]. As to the trimmed L -statistics, the first – and up to the recent time the single – result on probabilities of large deviations was obtained in [4], but under some strict and unnatural conditions. Recently, the latter result was strengthened in [9], where a different approach than in [4] was proposed and implemented.

In this note we present some of our recent results established in [8]– [10].

To conclude this short introduction, we want to mention a paper [3], and an interesting article [6], in which a general delta method in the theory of Chernoff's type large deviations was proposed and illustrated by many examples including M -estimators and L -statistics.

2. Moderate deviations for intermediate trimmed means

Let X_1, X_2, \dots be a sequence of independent identically distributed (i.i.d.) real-valued random variables (r.v.'s) with common distribution

function (df) F , and for each integer $n \geq 1$ let $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ denote the order statistics based on the sample X_1, \dots, X_n . Introduce the left-continuous inverse function F^{-1} defined as $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$, $0 < u \leq 1$, $F^{-1}(0) = F^{-1}(0^+)$, and let F_n and F_n^{-1} denote the empirical df and its inverse respectively.

Consider the intermediate trimmed mean

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n} = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} F_n^{-1}(u) du,$$

where k_n, m_n are two sequences of integers such that $0 \leq k_n < n - m_n \leq n$, $\alpha_n = k_n/n$, $\beta_n = m_n/n$, where we assume that

$$\min(k_n, m_n) \rightarrow \infty, \quad \max(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Define the population trimmed mean

$$\mu(u, 1-v) = \int_u^{1-v} F^{-1}(s) ds, \quad \text{where } 0 \leq u < 1-v \leq 1.$$

Let $\xi_\nu = F^{-1}(\nu)$ denote the ν -th quantile of F and let $W_i^{(n)}$ be the X_i Winsorized outside of $(\xi_{\alpha_n}, \xi_{1-\beta_n}]$, i.e. $W_i^{(n)} = \max(\xi_{\alpha_n}, \min(X_i, \xi_{1-\beta_n}))$, $i = 1, \dots, n$. In order to normalize T_n , we define two sequences

$$\mu_n = \mu(\alpha_n, 1-\beta_n), \quad \sigma_{W,n}^2 = \mathbf{Var}(W_i^{(n)}),$$

and assume that $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{W,n} > 0$.

Let Φ denote the standard normal distribution function. Here is our main result on moderate deviations for intermediate trimmed means.

Theorem 2.1 ([10]) *Suppose that $\mathbf{E}|X_1|^p < \infty$ for some $p > c^2 + 2$ ($c > 0$). In addition, assume that $\frac{\log n}{\min(k_n, m_n)} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, and that $\max(\alpha_n, \beta_n) = O((\log n)^{-\gamma})$, for some $\gamma > 2p/(p-2)$, as $n \rightarrow \infty$. Then*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}(T_n - \mu_n)}{\sigma_{W,n}} > x\right) = [1 - \Phi(x)](1 + o(1)), \quad (1)$$

as $n \rightarrow \infty$, uniformly in the range $-A \leq x \leq c\sqrt{\log n}$ ($A > 0$).

It is known that the intermediate trimmed mean T_n can serve as a consistent and robust estimator for $\mathbf{E}X_1$ (whenever it exists), and that the large and moderate deviations results for T_n can be helpful to construct more attractive confidence intervals for the expectation of X_1 than those that arise from the CLT.

Our next result concerns the asymptotic behavior of the first two moments of T_n and the possibility of replacing the normalizing sequences in (2.1) (in particular, replacing of μ_n by $\mathbf{E}X_1$).

Theorem 2.2 ([10]) *Suppose that the conditions of Theorem 2.1 are satisfied. Then*

$$n^{1/2}(\mathbf{E}T_n - \mu_n) = o\left((\log n)^{-1}\right), \quad \frac{\sigma_{W,n}}{\sigma} = 1 + o\left((\log n)^{-2}\right),$$

$$\frac{\sqrt{\mathbf{Var}(T_n)}}{\sigma_{W,n}/\sqrt{n}} = 1 + o\left((\log n)^{-1}\right), \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Moreover, μ_n and $\sigma_{W,n}$ in relations (2.1) can be replaced respectively by $\mathbf{E}T_n$ and σ or $\sqrt{n\mathbf{Var}(T_n)}$, without affecting the result.

Furthermore, if in addition

$$\max(\alpha_n, \beta_n) = o\left[(n \log n)^{-\frac{p}{2(p-1)}}\right],$$

then

$$n^{1/2}(\mathbf{E}X_1 - \mu_n) = o\left((\log n)^{-1/2}\right),$$

and μ_n in (2.1) can be also replaced by $\mathbf{E}X_1$.

3. Large and moderate deviations for trimmed L -statistics

In this section we consider the trimmed L -statistic given by

$$L_n = n^{-1} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} c_{i,n} X_{i:n}, \quad \text{where } c_{i,n} \in \mathbb{R}.$$

Let α_n, β_n denote the same sequences as before, and suppose now that

$$\alpha_n \rightarrow \alpha, \quad \beta_n \rightarrow \beta, \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1 - \beta < 1,$$

i.e. we focus on the case of heavy trimmed L -statistic. Let J be a function defined in an open set I such that $[\alpha, 1 - \beta] \subset I \subseteq (0, 1)$. Define the trimmed L -statistic

$$L_n^0 = n^{-1} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} c_{i,n}^0 X_{i:n} = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} J(u) F_n^{-1}(u) du$$

with the weights $c_{i,n}^0 = n \int_{(i-1)/n}^{i/n} J(u) du$ generated by the function J .

To state our results, we need the following set of assumptions.

(i) J is Lipschitz in I .

(ii) F^{-1} satisfies a Hölder condition of order $0 < \varepsilon \leq 1$ in some neighborhoods U_α and $U_{1-\beta}$ of α and $1 - \beta$.

(iii) $\max(|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta|) = O(n^{-\frac{1}{2+\varepsilon}})$, where ε is the Hölder index from condition (ii).

(iv) $\sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} |c_{i,n} - c_{i,n}^0| = O(n^{\frac{1}{2+\varepsilon}})$, where ε is as in conditions (ii)-(iii).

Define the distribution function of the normalized L_n :

$$F_{L_n}(x) = \mathbf{P}\{\sqrt{n}(L_n - \mu_n)/\sigma \leq x\}, \tag{2}$$

where $\mu_n = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} J(u)F^{-1}(u) du$, and the asymptotic variance

$$\sigma^2 = \int_{\alpha}^{1-\beta} \int_{\alpha}^{1-\beta} J(u)J(v)(\min(u, v) - uv) dF^{-1}(u) dF^{-1}(v).$$

Here is our main result on Cramér type large deviations for L_n .

Theorem 3.1 ([9]) *Suppose that F^{-1} satisfies condition (ii) for some $0 < \varepsilon \leq 1$ and the sequences α_n and β_n satisfy (iii). In addition, assume that the weights $c_{i,n}$ satisfy (iv) for some function J satisfying condition (i).*

Then for every sequence $a_n \rightarrow 0$ and each $A > 0$

$$1 - F_{L_n}(x) = [1 - \Phi(x)](1 + o(1)), \tag{3}$$

as $n \rightarrow \infty$, uniformly in the range $-A \leq x \leq a_n n^{\varepsilon/(2(2+\varepsilon))}$.

Remark 3.1 Note that under somewhat stronger conditions (iii)-(iv') (cf. [9]) than (iii)-(iv), the asymptotic variance σ in Theorem 3.1 can be replaced by $\sqrt{n \mathbf{Var} L_n}$, without affecting the result (see Theorem 1.2 [9]).

Corollary 3.1 *Suppose that the conditions of Theorem 2.1 are satisfied with $\varepsilon = 1$, i.e. F^{-1} is Lipschitz in some neighborhoods U_{α} and $U_{1-\beta}$ of α and $1 - \beta$. Then for every sequence $a_n \rightarrow 0$ and each $A > 0$ relation (3.1) holds true, uniformly in the range $-A \leq x \leq a_n n^{1/6}$.*

Finally, we state our main results on probabilities of moderate deviations for L_n , i.e. the deviations in logarithmic ranges. We will need the following versions of conditions (ii)-(iv).

(ii'') *There exists a positive ε such that for each $t \in \mathbb{R}$ when $n \rightarrow \infty$*

$$F^{-1}(\alpha + t\sqrt{\log n/n}) - F^{-1}(\alpha) = O((\log n)^{-(1+\varepsilon)}),$$

$$F^{-1}(1 - \beta + t\sqrt{\log n/n}) - F^{-1}(1 - \beta) = O((\log n)^{-(1+\varepsilon)}).$$

(iii'') $\max(|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta|) = O(\sqrt{\frac{\log n}{n}})$, $n \rightarrow \infty$.

(iv'') *For some $\tilde{\varepsilon} > 0$* $\sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} |c_{i,n} - c_{i,n}^0| = O(\frac{1}{\log^{\tilde{\varepsilon}} n} \sqrt{\frac{n}{\log n}})$, $n \rightarrow \infty$.

Theorem 3.2 ([8]) *Suppose that F^{-1} satisfies condition (ii'') and that condition (iii'') holds for the sequences α_n and β_n . In addition, assume that there exists a function J satisfying condition (i) such that (iv'') holds for the weights $c_{i,n}$. Then relation (3.1) holds true, uniformly in the range $-A \leq x \leq c\sqrt{\log n}$, for each $c > 0$ and $A > 0$.*

Theorem 3.3 ([8]) *Suppose that the conditions of Theorem 3.2 hold true. In addition, assume that $E|X_1|^\gamma < \infty$ for some $\gamma > 0$. Then*

$$\sqrt{n\mathbf{Var}(L_n)}/\sigma = 1 + O((\log n)^{-(1+2\nu)}),$$

where $\nu = \min(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})$, $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ are as in conditions **(ii'')** and **(ii''')** respectively.

Moreover, relation (3.1) remains valid for each $c > 0$ and $A > 0$, uniformly in the range $-A \leq x \leq c\sqrt{\log n}$, if we replace σ in definition of $F_{L_n}(x)$ (cf. (3)) by $\sqrt{n\mathbf{Var}(L_n)}$.

References

1. *Aleskeviciene A.* Large and moderate deviations for L-statistics // Lithuanian Math. J. — 1991. — Vol. 31. — P. 145–156.
2. *Bentkus V., Zitikis R.* Probabilities of large deviations for L-statistics // Lithuanian Math. J. — 1990. — Vol. 30. — P. 215–222.
3. *Boistard H.* Large deviations for L-statistics // Statistics & Decisions. — 2007. — Vol. 25. — P. 89–125.
4. *Callaert H., Vandemaële M., Veraverbeke N.* A Cramér type large deviations theorem for trimmed linear combinations of order statistics // Comm. Statist. Th. Meth. — 1982. — Vol. 11. — P. 2689–2698.
5. *David H., Nagaraja H. N.* Order Statistics, 3rd. ed. — Wiley, New York, 2003.
6. *Gao F., Zhao X.* Delta method in large deviations and moderate deviations for estimators // Ann. Statist. — 2011. — Vol. 39. — P. 1211–1240.
7. *Greselin F., Madan L., Puri M. L., Zitikis, R.* L-functions, processes, and statistics in measuring economic inequality and actuarial risks // Stat. Interface. — 2009. — Vol. 2. — P. 227–245.
8. *Gribkova N. V.* Cramér type moderate deviations for trimmed L-statistics // Math. Methods Statist. — 2016. — Vol. 25, no. 4. — P. 313–322.
9. *Gribkova N. V.* Cramér type large deviations for trimmed L-statistics. Probab // Math. Statist. — 2017. — Vol. 37, no. 1. — P. 101–118.
10. *Gribkova N. V.* Cramér type moderate deviations for intermediate trimmed means // Commun. Statist. Th. Meth. — 2017 (to appear).
11. *Serfling R. J.* Approximation theorems of mathematical statistics. — Wiley, New York, 1980.
12. *Shorack G. R., Wellner, J. A.* Empirical processes with application in statistics. — Wiley, New York, 1986.
13. *Vandemaële M., Veraverbeke N.* Cramér type large deviations for linear combinations of order statistics // Ann. Probab. — 1982. — Vol. 10. — P. 423–434.
14. *van der Vaart A. W.* Asymptotic statistics, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Vol. 3. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

UDC 511.2:519.2

Arithmetic Statistics, Probabilities and Langlands correspondence

N. M. Glazunov*

** Department of Electronics,
National Aviation University,
Prospect Komarova, 1, Kiev, 03680, Ukraine*

Abstract. We give a short review of some novel results in the area of arithmetic statistics. Then we present several results related to statistics of Artin-Schreier covering over fields of finite characteristic and over the ring of rational integers, which support our computations and some of which follow from general theorems by N. Katz and others about global monodromy of Kloosterman sheaves. In this framework, we can reprove known results for two parameter Kloosterman sums. In a more general framework, connections among arithmetic statistics, probabilities and Langlands correspondence are investigated.

Keywords: analytical methods in probability theory, Kloosterman sum, Artin-Schreier covering, L -function, Sato-Tate density.

1. Introduction

Classical works by P.L. Chebyshev, A.O. Gel'fond, B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, Yu.V. Linnik, A.G. Postnikov, and other researchers, demonstrate the fruitfulness of the interaction of analytical and computational methods in solving problems in probability theory and its applications. In the framework of this approach A.V. Malyshev have developed Linnik's ergodic method in number theory. The fruitfulness of this approach to appropriate problems of probability theory and reliability theory have demonstrated by works of A.D. Solovyev and his colleagues.

Nowadays some aspects of the investigations are reflecting in the areas of arithmetic statistics and Cohen-Lenstra heuristics. These two areas are mathematical approaches which were founded in order to throw light on the limiting behavior of (number-theoretic and group) objects in families [1–4].

Arithmetic statistics of subschemes of abelian varieties over finite fields have investigated in paper [2].

Arithmetic statistics and the probability that a complete intersection is smooth have investigated in the paper by A. Bucur, K. Kedlaya in [3]. Let X be a smooth subscheme of a projective space over a finite field. In the case of a single hypersurface of large degree, the probability that its intersection with X is smooth of the correct dimension was computed by B. Poonen in [4]. A. Bucur, K. Kedlaya generalize Poonen's theorem to the case of complete intersections. They then relate this result to the probabilistic model of rational points of such complete intersection. Briefly, the general idea of the proof of authors Theorem is a sieve over the set of closed points of X similar to Poonen's proof of Theorem 1.1. in

which authors separately analyze the contribution of points of low degree, medium degree and high degree. Authors also give an interesting corollary that the number of rational points on a random smooth intersection of two surfaces in projective 3-space is strictly less than the number of points on the projective line. Finally, they indicate some other directions in which one can probably generalize Poonen's results from hypersurfaces to complete intersections and make the conjecture, generalizing the conditional Poonen's Theorem 5.5. There are another interesting papers on arithmetic statistics.

In our communication we present several results related to statistics of Artin-Schreier covering over fields of finite characteristic and over $Spec \mathbf{Z}$, which support our computations and which follow from general theorems by N. Katz and others about global monodromy of Kloosterman sheaves. In this framework, we can reprove known results for two parameter Kloosterman sums. In a more general framework, connections among arithmetic statistics, probabilities and Langlands correspondence are investigated.

2. Equidistribution and L -functions

Let X be a compact topological space and $C(X)$ be the Banach space of continuous complex-valued functions on X . For $f \in C(X)$ let its norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Let δ_x be the Dirac measure associated to $x \in X$: $\delta_x(f) = f(x)$. For a sequence $(x_n), n \geq 1$ let $\mu_n = \frac{\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n}}{n}$. Let μ be a Radon measure on X .

The sequence (x_n) is said to be equidistributed with respect to measure μ (or μ -equidistributed) if $\mu_n \rightarrow \mu$ (weakly) as $n \rightarrow \infty$.

Let G be a compact group and let X be the space of conjugacy classes of G . Let $x_v, v \in \Sigma$ be a family of elements of X indexed by a denumerable set Σ .

Theorem (Chebotarev, Artin, Serre). The elements $x_v, v \in \Sigma$ are equidistributed for the normalized Haar measure of G if and only if the L -functions relative to the non trivial irreducible characters of G are holomorphic and non zero at $s = 1$.

3. Experimental distribution of Kloosterman sums and Sato-Tate density

Definition 1 Let

$$T_p(c, d) = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i(\frac{cx+d}{p})},$$

$$1 \leq c, d \leq p - 1; x, c, d \in \mathbf{F}_p^*$$

be a Kloosterman sum.

By A. Weil estimate $T_p(c, d) = 2\sqrt{p} \cos \theta_p(c, d)$.

In seventies the author of the communication have computed the distribution of angles $\theta_p(c, d)$ (mainly for the case $c = d = 1$, prime p runs from 2 in interval $[2, 10000]$, and unsystematically for some prime from the interval with constant p and varying $1 \leq c, d \leq p - 1$).

There are possible two distributions of angles $\theta_p(c, d)$ on semiinterval $[0, \pi)$:

- a) p is fixed and c and d varies over \mathbf{F}_p^* ; what is the distribution of angles $\theta_p(c, d)$ as $p \rightarrow \infty$;
- b) c and d are fixed and p varies over all primes not dividing c and d .

Conjecture 1. In the case b) when p varies over all primes then angles $\theta_p(1, 1)$ are distributed on the interval $[0, \pi)$ with the Sato-Tate density $\frac{2}{\pi} \sin^2 t$.

4. Artin-Schreier covering and Kloosterman sums

Let k be a field of characteristic $p > 0$ and let X be a nonsingular projective variety defined over k . In most cases $k = \mathbb{F}_q, q = p^s$ for some positive integer s .

An Artin-Schreier covering of X is a finite morphism $\pi : Y \rightarrow X$ from a normal variety Y onto X such that the field extension $k(Y)/k(X)$ is an Artin-Schreier extension. This extension is defined by the Artin-Schreier equation $y^p - y = f$ and $f \in k(X)$.

Example 1. The equation in affine form $y^p - y = cx + \frac{d}{x}$, $c, d \in \mathbb{F}_p^*$ defines an Artin-Schreier covering of the projective line.

Example 2. The equation in affine form $y^p - y = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i \in \mathbb{F}_p$ defines an Artin-Schreier curve and the respective covering of the projective line.

Proposition 1 *The Kloosterman sum $T_p(c, d)$ is defined by the Artin-Schreier covering*

$$y^p - y = cx + \frac{d}{x}, \quad c, d \in \mathbb{F}_p^*.$$

Proposition 2 *See [5, 11]. Let X be reduced absolutely irreducible nonsingular projective algebraic curve of genus g defined over a finite field \mathbb{F}_q . Let $\overline{\mathbb{F}}_q$ be an algebraic closure of \mathbb{F}_q . We may regard X as an algebraic curve over $\overline{\mathbb{F}}_q$. In this case one can attach to X the Jacobean $J(X)$ of X . Formal completion of the variety defines the commutative formal group F of dimension g .*

Proposition 3 *Under the conditions of the Proposition 3 there is an algebraic construction of the continuation of the Artin-Schreier covering $\pi : Y \rightarrow X$ to the map $\pi' : J(Y) \rightarrow J(X)$.*

Let l be a prime such that $l \neq p$. Let $T_l(A)$ be the Tate module of the abelian variety A . In the case of the Jacobean $J(X)$ the Tate module is a free module of the rank $2g$ over l -adic numbers.

5. Sato-Tate type conjectures and elements of Langlands program

Geometric analogues of Sato-Tate conjecture (Sato-Tate conjecture over functional fields) are investigated and proved by B. Birch [7] and by H. Yoshida [8].

Let (in P. Deligne notations) X be a scheme of finite type over \mathbf{Z} , $|X|$ the set of its closed points, and for each $x \in |X|$ let $N(x)$ be the number of points of the residue field $k(x)$ of X at x . The Hasse-Weil zeta-function of X is, by definition $\zeta_X(s) = \prod_{x \in |X|} (1 - N(x)^{-s})^{-1}$.

The Hasse-Weil zeta function of E over \mathbf{Q} (an extension of numerators of $\zeta_E(s)$ by points of bad reduction of E) is defined over all primes p : $L(E(\mathbf{Q}), s) = \prod_p (1 - a_p p^s + \epsilon(p) p^{1-2s})^{-1}$, here $\epsilon(p) = 1$ if E has good reduction at p , and $\epsilon(p) = 0$ otherwise.

A cusp (parabolic) form of weight $k \geq 1$ and level $N \geq 1$ is a holomorphic function f on the upper half complex plane \mathbf{H} .

Langlands conjectured that some symmetric power L -functions extend to an entire function and coincide with certain automorphic L -functions. Sato-Tate conjecture, now Clozel-Harris-Shepherd-Barron-Taylor Theorem:

Theorem (Clozel, Harris, Shepherd-Barron, Taylor). Suppose E is an elliptic curve over \mathbf{Q} with non-integral j invariant. Then for all $n > 0$; $L(s; E; Sym^n)$ extends to a meromorphic function which is holomorphic and non-vanishing for $Re(s) \geq 1 + n/2$.

These conditions and statements are sufficient to prove the Sato-Tate conjecture.

Under the prove of the Sato-Tate conjecture the Taniyama-Shimura-Weil conjecture oriented methods of A. Wiles and R. Taylor are used.

Recall the main (and more stronger than in Wiles and in Wiles-Taylor papers) result by C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor.

Taniyama-Shimura-Weil conjecture - Wiles Theorem. For every elliptic curve E over \mathbf{Q} there exists f , a cusp form of weight 2 for a subgroup $\Gamma_0(N)$, such that $L(f, s) = L(E(\mathbf{Q}), s)$.

6. Distribution of Kloosterman sums in functional case

Theorem 1 For any sequence of prime finite fields \mathbf{F}_p , when p tends to ∞ , $1 \leq c, d \leq p - 1$; $x, c, d \in \mathbf{F}_p^*$. the distribution of angles $\theta_p(c, d)$ on seminterval $[0, \pi)$ tends to the equidistribution with the density $\frac{2}{\pi} \sin^2 t$.

6.1. Sketch of the proof

(follow to [9]. Very roughly.)

a) Construction of l -adic representations, l -adic cohomologies and corresponding sheaves.

b) Introduction and investigation of corresponding L -functions and their zeroes.

c) Testing that the given representation is pure. Computation of the weight of the representation. Selection of representations.

d) Applications of Deligne's results.

7. Conclusions

The short review of some novel results in the area of arithmetic statistics is given. Several results related to statistics of Artin-Schreier covering over fields of finite characteristic and over $Spec \mathbf{Z}$, which support our computations and some of which follow from general theorems by N. Katz and others about global monodromy of Kloosterman sheaves are presented. The sketch of the proof of the analog of N. Katz theorem for two parameter Kloosterman sums is given.

References

1. *Arkipov G. I., Chubarikov V. N.* An asymptotic formula for the number of lattice points in a circle on the Lobachevsky plane. // *Discrete Math. Appl.* — 2006. — Vol.16, no. 5. — P.461–469. (in Russian)
2. *Achter J.* The distribution of torsion subschemes of abelian varieties // *J. Inst. Math. Jussieu.* — 2016. — Vol.15, no. 4. — P. 693–710.
3. *Bucur A., Kedlaya K.* The probability that a complete intersection is smooth // *Theor. Nombres Bordx.* — 2012. — Vol. 24, no. 3. — P. 541–556.
4. *Poonen B.* Bertini theorems over finite fields // *Ann. Math.* — 2003. — Vol. 160. — P.1099–1127 .
5. *Mumford D.* *Abelian Varieties.* — Tata Institute of Fundamental Research Publications, 2012. — Vol. 13.
6. *Hazewinkel M.* *Formal Groups and Applications.* — Providence, Rhode Island: Academic Press, 2012.
7. *Birch B.* How the number of points of an elliptic curve over a fixed prime field varies // *J. London Math. Soc.* — 1968. — Vol. 43. — P.57–60.
8. *Yoshida H.* On an analogue of the Sato conjecture // *Inventiones Math.* — 1973. — Vol. 19. — P.261–277.
9. *Katz N.* *Gauss sums, Kloosterman sums, and monodromy groups.* — Princeton University Press, 1988.
10. *Adolphson A.* On the distribution of angles of Kloosterman sums // *Journ. rein. angew. Math.* — 1989. — Vol. 395. — P. 214–220.

-
11. *Glazunov N.* Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics // *Chebyshevskii Sbornik*. — 2015. — Vol. 16, no. 3. — P.124–146.

УДК 510.58

Вероятностные методы для сравнительного анализа и оптимизации сценариев и алгоритмов управления речевым диалогом

М. П. Фархадов*, Н. В. Петухова*

* *Лаборатория автоматизированных систем массового обслуживания и обработки сигналов,*

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, д. 65, Москва, Россия, 117997*

Аннотация. В статье вероятностными методами исследуются основные характеристики человеко-машинного диалога в речевых диалоговых системах: вероятность успешного завершения диалога и оценка продолжительности диалогов с различными процедурами выявления и корректировки ошибок. Выполнен анализ различных вариантов диалогов и получены рекомендации для оптимизации сценариев диалогов с учетом надежности распознавателя.

Ключевые слова: вероятностные методы, сценарии и алгоритмы управления речевым диалогом, вероятность успешного завершения диалога, продолжительность диалога, речевой интерфейс.

1. Введение

Автоматизированные диалоговые системы на основе речевых технологий все активнее внедряются в повседневную жизнь людей. Чаще всего их используют для получения информации, при бронировании или для передачи голосовых команд. Центральная роль в речевых диалоговых системах принадлежит модулю управления диалогом. Его функцией является принятие решения относительно того, по какой из ветвей будет развиваться диалог после завершения каждого человеко-машинного взаимодействия. Алгоритмы поведения проектируются разработчиком и основываются на оптимизации определенной функции с учетом текущих значений ряда параметров. Основную проблему при проектировании управления диалогом составляет необходимость учета ошибок распознавания. Несмотря на то, что надежность распознавателей значительно выросла за последние годы, ошибки все равно будут возникать. Они являются следствием и внешнего шума, и индивидуальности произношения клиентов, и наличия трудно различаемых по произношению слов в любом языке. Единственный надежный способ обнаружить и исправить ошибки — это обращение к процедуре переспроса, когда система после распознавания сказанного клиентом произносит свою гипотезу и просит клиента подтвердить или отвергнуть ее. Однако переспрос имеет и негативную сторону: он связан с потерей времени и может вызывать раздражение клиента. Со всем *не безразлично*, в каком месте диалога использовать переспрос и

как его производить. В статье вероятностными методами исследуются варианты сценариев диалога с применением различных процедур обнаружения и коррекции ошибок распознавания.

2. Сравнение сценариев диалога

В речевых диалоговых системах взаимодействие с пользователем осуществляется путем последовательных циклов вопрос-ответ, в которых каждый вопрос системы построен так, чтобы получить в ответе клиента некоторую информацию. Ответ клиента обрабатывается распознавателем. В зависимости от результатов обработки меняется внутреннее состояние диалога и формируется новый вопрос клиенту или следует обращение к базе данных или внешней системе.

Вероятностные методы достаточно широко используются для анализа и оптимизации автоматизированных диалоговых систем, построенных на основе речевых технологий. В работе [1] поведение системы представляется марковским процессом принятия решений. В работе [2] авторы рассматривали проблему управления диалогом с учетом возможных ошибок распознавания. Выбор предлагаемого им алгоритма продолжения диалога основан на использовании частично наблюдаемого марковского процесса принятия решений. В работе [3] поведение системы представляется в виде графа, и модуль управления выбирает следующее действие системы, основываясь на текущем состоянии и в соответствии с прописанной стратегией, оптимизирующей целевую функцию. Подобные подходы доказали свою эффективность в простых приложениях. Однако они становятся слишком сложными для конструирования правил в сложных сценариях.

В последние годы были предложены новые подходы, которые используют статистические методы и машинное обучение для определения оптимальных действий системы в ходе диалога. Обучение с подкреплением является в настоящее время наиболее популярным методом, используемым для оптимизации диалога на основе накопленных данных. В работах [4, 5] приведен обзор публикаций и результаты некоторых применений обучения с подкреплением в диалоговых системах. Показано, что такие системы демонстрируют неплохие результаты.

Однако полноценное применение машинного обучения на этапе разработки систем и на ранних стадиях эксплуатации невозможно из-за отсутствия данных для обучения. Были предложены различные модели пользователей для тренировки моделей, однако поведение реальных пользователей оказывается, как правило, отличным от моделируемого [6]. Другой подход состоит в создании обобщенной базы данных [7]. Здесь есть свои проблемы, например, предполагается равенство энтропий всех атрибутов.

Целью данной работы является анализ основных сценариев диалога и получение ряда оценок и рекомендаций, которые помогли бы разработчикам речевых диалоговых систем спроектировать оптимальный

сценарий диалога в зависимости от надежностных параметров используемых речевых блоков.

Для решения этой задачи выполнена *классификация диалогов*, в основу которой положены следующие признаки: типы элементов диалога - простые элементы и составные элементы; местоположение процедур выявления и корректировки ошибок - в процессе формирования запроса, *после окончания* формирования запроса; способ реализации процедур выявления и корректировки ошибок - *покаждому элементу, единым блоком, путем опроса*.

Методика выполнения сравнительного анализа вариантов состоит в использовании модифицированного применительно к данной задаче принципа *квантификации*, когда варианты сравниваются на множестве *одинаковых типовых количественных значений* ряда параметров. Например, сравнительная оценка вероятности успешного завершения диалога осуществляется при *одинаковых значениях вероятностей* правильного распознавания речевых блоков и *одинаковом допустимом числе переспросов* для сравниваемых вариантов сценариев [8, 9, 10].

Необходимость в таких допущениях диктуется большой размерностью моделей и широким диапазоном изменения параметров. *Квантификация является достаточно популярным методом количественного анализа качества интерфейсов*.

В качестве характеристик для сравнения вариантов выбраны два главных количественных критерия оценки качества речевого диалога: *вероятность успешного завершения диалога и продолжительность диалога*.

Поиск оптимального сценария осуществляется на основе минимизации оценок продолжительности диалога с обеспечением заданной вероятности его успешного завершения.

Оценка вероятности успешного завершения диалога.

Для оценки *вероятности успешного завершения диалога* вначале определяются вероятности правильного распознавания *элементов диалога*, а затем выводятся формулы вероятности успешного завершения *диалогов*, отличающихся типами элементов и процедурами выявления и корректировки ошибок.

Под *простым элементом* диалога понимается взаимодействие между системой и клиентом в виде «вопрос-ответ», в ходе которого выявляется один атрибут запроса.

Под *составным элементом* диалога понимается взаимодействие, при котором определяются несколько атрибутов запроса с использованием разных речевых блоков. Использование составных элементов в диалоге вызвано обычно стремлением сократить продолжительность диалога.

Предельным вариантом составного элемента является «монологическое» взаимодействие, при котором в ответе клиента на вопрос системы присутствуют все запрашиваемые атрибуты.

Вероятность правильного распознавания элемента диалога зависит от надежности соответствующего данному шагу диалога речевого блока (блоков) и от влияния человеческого фактора. Надежности речевых

блоков оцениваются экспериментально путем их тестирования. Влияние человеческого фактора в процессе переспросов может быть уменьшено за счет выдачи примеров и подсказок. Далее показаны формулы для оценки вероятности правильного распознавания простого и составного элементов.

Вероятность правильного распознавания простого элемента диалога при n переспросах P_n определяется формулой:

$$P_n = \rho_0 + \sum_{j=1}^n \rho_{0j} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \rho_{0k}), n = 1, 2, 3$$

где ρ_0 - номинальная вероятность правильного распознавания элемента диалога, ρ_{0k} - вероятность правильного распознавания при k -том переспросе. В условиях однородности процесса распознавания, когда вероятность распознавания при каждом переспросе равна ρ_0 , вероятность правильного распознавания элемента диалога представляется усеченным геометрическим распределением:

$$P_n = \sum_{j=0}^n \rho_0 (1 - \rho_0)^j = \rho_0 \cdot \frac{1 - (1 - \rho_0)^{n+1}}{1 - (1 - \rho_0)} = 1 - (1 - \rho_0)^{n+1}, n = 0, 1, 2, 3$$

Величина, вычисленная по данной формуле, представляет собой нижнюю оценку вероятности правильного распознавания элемента диалога при n переспросах.

Из формулы видно, что при $\rho_0 > 0,7$ один-два переспроса могут обеспечить вероятность распознавания элемента диалога более 0,99.

Составной элемент содержит M смысловых составляющих, распознаваемых самостоятельно с вероятностью P_{0i} , $i = 1, M$. Вероятность P_{0c} правильного распознавания составного элемента диалога равна

$$P_{0c} = \prod_{i=0}^M P_{0i}$$

Для составного элемента, как можно получить из формулы, также достаточно 1 или 2 переспросов, а наилучшие результаты по вероятности распознавания имеет вариант выявления и корректировки ошибок по каждой составляющей элемента.

Вероятность успешного завершения диалога $P_{\partial n}$, состоящего из комбинации $(N - N_c)$ простых и N_c составных элементов, каждый из которых может переспрашиваться n раз, определяется соотношением:

$$P_{\partial n} = \prod_{i=1}^{N-N_c} P_{n_i} \cdot \prod_{j=1}^{N_c} P_{c n_j}$$

Продолжительность диалога

Для анализа диалогов по продолжительности введены следующие разновидности оценок:

- предельные оценки: оценка снизу, оценка сверху;
- средняя оценка.

Нижняя оценка вычисляется в предположении отсутствия неправильно распознанных элементов и характеризует алгоритм управления диалогом при идеальной системе распознавания. Оценка сверху характеризует максимально возможную продолжительность диалога при уменьшении вероятности распознавания элемента диалога до установленного предела.

Формулы для расчета продолжительности диалога учитывают в том числе и временные затраты на процедуры выявления и корректировки ошибок. Были рассмотрены следующие варианты этих процедур: по каждому шагу диалога, после завершения диалога путем переспроса всех атрибутов, после завершения диалога и прочтения распознанного запроса путем выявления ошибочных атрибутов и их корректировки.

Важно отметить, что выявление и корректировка ошибок распознавания во время диалога приводит к автоматизации накопления информации об ошибках в лог файлах. В результате создается база данных, которая может быть использована как при исправлении ошибок в словарях, так и при применении различных методов машинного обучения для разработки эффективных стратегий управления диалогом на последующих стадиях развития проекта.

Ниже приведены общие формулы для вычисления оценок продолжительности диалога из N элементов: нижней оценки T_H , оценки сверху T_B и среднего времени T_{cp} .

$$T_H = \left(\sum_{i=1}^N L_i \right) \cdot \tau$$

$$T_B = \left[\left(\sum_{i=1}^N L_i \right) \cdot K_{n_{\partial 0n}} + \sum_{i=1}^N Q_i + \left(\sum_{i=1}^N G_i \right) \cdot K_{n_{\partial 0n}} \right] \cdot \tau$$

$$T_{cp} = \left[\sum_{m=0}^N (1 - p_0)^m \cdot p_0^{N-m} \cdot C_N^m \cdot \left[L_{cp} \cdot (N - m) + \right. \right. \\ \left. \left. + (L_{cp} \cdot K_{n_{\partial 0n}} + Q_{cp} + G_{cp} \cdot K_{n_{\partial 0n}}) \cdot m \right] \right] \cdot \tau$$

где τ - временной квант, затрачиваемый на произнесение одного среднестатистического слова,

L_i - количество временных квантов, затрачиваемых на i -тый элемент диалога при правильном распознавании,

Q_i - количество временных квантов, затрачиваемых на i -тый элемент диалога при переспросе,

G_i - количество временных квантов, дополнительно затрачиваемых на i -тый элемент диалога при переспросе непонятых реплик клиента,

$K_{n \rightarrow n}$ - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличивается время, затрачиваемое на один переспрашиваемый элемент диалога при допустимом числе переспросов.

Сравнение вариантов организации диалогов произведено для безразмерных величин, которые получены делением обеих частей соотношений для временных оценок на величину τ . Эти безразмерные величины названы соответственно коэффициентами нижней, верхней и средней оценок продолжительности диалога.

3. Результаты анализа и рекомендации

В соответствии с классификацией методов речевого взаимодействия были проанализированы следующие варианты организации диалогов:

- диалог из простых элементов;
- диалог из простых и составных элементов;
- режим «монолога».

Для каждого варианта были рассмотрены различные процедуры выявления и корректировки ошибок. Варианты сравнивались по критериям продолжительности диалога при обеспечении заданной вероятности успешного распознавания.

Выполненный анализ позволил сформулировать следующие рекомендации для разработчиков речевых диалоговых систем:

- В диалогах из простых элементов лучше производить переспросы по каждому элементу.

- Использование составных элементов улучшает временные характеристики для стратегий введения переспросов после формирования запроса. Улучшение тем больше, чем выше надежность элементов.

- Режим монолога имеет лучшие характеристики, чем другие, но только при достаточно надежных речевых блоках.

- При отсутствии конкретных данных о надежности распознавания рекомендуется строить диалог из простых элементов с проверкой правильности распознавания и корректировкой ошибок по каждому элементу диалога.

Полученные результаты также позволяют:

- определять необходимое число переспросов;
- определять среднее время, затрачиваемое на элемент диалога;
- вычислять вероятности успешного завершения диалогов различной структуры;
- анализировать и сравнивать между собой различные стратегии управления диалогом;

• производить обоснованный выбор сценариев и алгоритмов управления диалогом для конкретных задач на основе разработанной методики.

4. Заключение

Проектирование сценариев для речевых диалоговых систем во многом остается искусством. Человек привык к речевому взаимодействию с другим человеком и поэтому произвольно ожидает от речевых систем такого же «разговора». Однако распознавание речи и ее понимание пока еще далеко не свободны от ошибок. Разработчик речевых приложений должен считаться с этими факторами. Поэтому для него важны обоснованные рекомендации, которыми он может воспользоваться на ранних этапах своей работы, чтобы создать успешно функционирующую систему, пусть и с упрощенным диалогом типа вопрос-ответ и с простыми процедурами выявления и корректировки ошибок распознавания. Данное исследование было нацелено на получение таких рекомендаций путем применения вероятностных моделей для анализа таких важных характеристик диалоговых систем как вероятность успешного завершения диалога и оценка его продолжительности. Применение различных вариантов процедур выявления и корректировки ошибок сопровождается автоматическим накоплением сведений об ошибках распознавания в лог файлах, что может быть использовано для улучшения качества работы систем на основе применения стратегий машинного обучения для управления диалогом.

Литература

1. *Young S.J.* Probabilistic methods in spoken-dialogue systems // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 2000. — Vol. 358, no. 1769. - P. 1389–1402.
2. *Roy N., Pineau J., Thrun S.* Spoken Dialogue Management Using Probabilistic Reasoning, *Proceedings of the 38th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL 2000).* Hong Kong, Oct. 2000. — P. 93–100.
3. *Pieraccini R., Huerta J.* Where do we go from here? research and commercial spoken dialog systems // *6th SIGdial Workshop on Discourse and Dialogue, 2005.* — P. 1-10.
4. *Young S., Gaci M., Thomson B., Williams J.D.* POMDP-based statistical spoken dialog systems: A review // *Proceedings of the IEEE.* — 2013. — Vol. PP, no. 99. — P. 1-20.
5. *Lemon O., Pietquin O.* Machine Learning for Spoken Dialogue Systems // *Proceedings of the 10th European Conference on Speech Communication and Technologies (Interspeech'07), 2007.* — P. 2685-2688.

6. Crook P.A., Keizer S., Wang Z., Tang W., Lemon O. Real user evaluation of a pomdp spoken dialogue system using automatic belief compression // Computer Speech & Language. — 2014. — Vol. 28, no. 4. — P. 873–887.
7. Polifroni J., Walker M.A. Intensional summaries as cooperative responses in dialogue: Automation and evaluation // ACL. Citeseer, 2008. — P. 479-487.
8. Билик Р.В., Жожикашвили В.А., Петухова Н.В., Фархадов М.П. Анализ речевого интерфейса в интерактивных сервисных системах. Часть I // Автоматика и телемеханика. — 2009. — No. 2. — С. 80-89.
9. Билик Р.В., Жожикашвили В.А., Петухова Н.В., Фархадов М.П. Анализ речевого интерфейса в интерактивных сервисных системах. Часть II // Автоматика и телемеханика. — 2009. — No. 3. — С. 97-113.
10. Билик Р.В., Мясоедова З.П., Петухова Н.В., Фархадов М.П. Анализ речевого интерфейса при взаимодействии клиента с автоматизированной системой массового обслуживания. — М.: МАКС Пресс, 2007. - 112 с.

UDC 510.58

Probabilistic methods for comparative analysis and optimization of scenarios and algorithms for managing speech dialogue

M. P. Farkhadov*, N. V. Petukhova*

* *Laboratory of automated queuing systems and signal processing,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS,
Profsoyuznaya str. 65, Moscow, Russia, 117997*

In the article, the basic characteristics of human-machine dialogue in speech dialogue systems are investigated by probabilistic methods: the probability of successful completion of a dialogue and evaluation of the duration of dialogues with various procedures for identifying and correcting errors. The analysis of various variants of dialogues is made and recommendations are received for optimizing the scenarios of the dialogues taking into account the reliability of the recognizer.

Keywords: probabilistic methods, scenarios and algorithms for managing speech dialogue, probability of successful completion of the dialogue, duration of the dialogue, speech interface.

UDC 519.21

About the thinning of a flow with limited aftereffect and different interarrivals distributions

V. A. Ivnitiski*

* *Moscow State University of Railway Engineering
Obrazcova Street, 9b9, Moscow, 127994, Russia*

Abstract. In the talk, we present some analytical results obtained for the probability characteristics of a thinning of a flow with limited aftereffect. The thinning is performed according to a given function which depends on evolution time and on the number of customers in the thinned flow and the number of lost customers in the original flow. The characteristics are obtained in the form of Laplace-Stieltjes transforms defined by a system of recurrence equations using inversion of Laplace-Stieltjes transforms. A special case is also considered.

Keywords: flow with limited aftereffect, thinning of a flow, time-depend function of thinning, Laplace-Stieltjes transform, inversion of Laplace-Stieltjes transform .

1. Introduction

Let us recall some results about thinning of flows. Renyi [1] in 1956 proved the first theorem on thinning of a renewal flow. A customer joins the thinned flow with a constant probability q , and with probability $p = 1 - q$ he doesn't. By changing the time scale the flow can be made constant intensity. Assume that the thinning is performed n times with different probabilities q_1, \dots, q_n . Then, provided that $n \rightarrow \infty$ and $q_1, \dots, q_n \rightarrow \infty$, the thinned flow converges to a Poisson flow. Belyaev Yu.K. in an addendum «Random flows and renewal theory» to the Russian translation of the book by D. Cox and V. Smith [2] wrote about the preservation of Poissonian property by the flow under the thinning of the original Poisson flow.

Belyaev Yu. K. [3] generalized this fact to arbitrary flows. Gnedenko B.V. and Kovalenko I.N. in [4] generalized Belyaev's theorem to the case of a non-stationary limiting flow. A. D. Soloviev in [5] in 1971 demonstrated that asymptotically the time of the first occurrence of a rare event in a regenerative process with appropriate normalization tends to an exponential random variable with parameter 1. Some other results about thinned flows can be found in [8–12].

For all of these works the aim was to obtain the limit theorems in the case of infinite thinning and under appropriate normalization. The common point for the above works was the fact that the thinning was carried out according to procedures that were time-independent. The novelty of this work is that the thinning is performed according to well-defined time-dependent procedures.

2. The problem statement

In his article [6] V. Smith studied a flow of customers with different probability distributions of interarrival intervals. A.Ya. Khinchin [7] named such flows of customers the flows with limited aftereffect. The present article considers a flow of customers with limited aftereffect and thinning. The first customer in this flow arrives at a random time with the probability distribution function $F_1(x)$.

The time interval between the arrival of the first customer and the arrival of the second customer has a probability distribution function $F_2(x)$, and in general, the time interval between the arrival of the $(i - 1)$ -st customer and the arrival of the i -th customer has a probability distribution function $F_i(x)$, $i = 2, 3, \dots$.

The thinning meant the following. If the customer arrives at time t , the number of customers joined to the thinned flow by this time equals $i - 1$, and the number of customers from the source flow who didn't join (was lost) equals j , then the customer either joins the thinned flow with probability $P_{i,j}(t)$, or is lost with the complementary probability. The next interarrival time has distribution function $F_{i+j}(x)$. The functions $P_{i,j}(t)$ are assumed to be known. We aim to find the probability distribution of the number of customers who joined the thinned stream up to an arbitrary time t , assuming that at times $t = 0$ the number of customers in thinned flow was zero.

3. Solution

We introduce the following notation: $\nu(t)$ – the number of customers who joined the thinned flow, $\nu_0(t)$ – the number of lost customers from the source flow with limited aftereffect, $\xi(t)$ – the elapsed time between t and the next arrival from the source flow with limited aftereffect.

First, consider the process $\zeta(t) = (\nu(t), \xi(t))$. This process will not be Markovian random process, since its values after time t will not depend only on values $\nu(t)$ and $\xi(t)$, but will also depend on the number of lost customers up to the time t from the source flow with limited aftereffect. This is because the lost customers shift time instants of customer arrivals to the thinned stream on the time axis.

Indeed, consider two consecutive times ξ_0 and $\xi_0 + \xi$. Let us assume that both times the customers arrived from the source flow with limited aftereffect have not joined the thinned flow, the probability of this event equals $(1 - P_{0,0}(\xi_0))(1 - P_{0,0}(\xi_0 + \xi))$. If we consider the process $\zeta(t) = (\nu(t), \xi(t))$, the probability of this event is equal to $(1 - P_0(\xi_0))^2$, as the shift on the time axis by the amount ξ will not be considered because the value $\xi(t)$ is not taken into account.

Let us now consider the process $\zeta(t) = (\nu(t), \nu_0(t), \xi(t))$. This process already takes into account the fact that the lost customers shift points in

time of customers arrivals to the thinned flow on the time axis. Therefore, the process $\zeta(t) = (\nu(t), \nu_0(t), \xi(t))$ will already be a Markov random process, its values after the time t will depend on $\nu(t)$, $\nu_0(t)$ and $\xi(t)$, i.e. will not depend on its states before time t . We introduce the notation $\varphi_{i,j}(t, x) = P(\nu(t) = i, \nu_0(t) = j, \xi(t) < x)$, $\varphi_{i,j}(t) = \varphi(i, j)(t, \infty)$, $i = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots$.

The problem is to find the probability distribution $\varphi_{i,j}(t)$ for the number of accepted customers to the thinned flow by a fixed time t .

First, we will find the joint probability distribution for the number of accepted customers in the thinned flow and the elapsed time till next arrival, i.e. $\varphi_{i,j}(t, x)$. Initially, number customers is zero (at time $t = 0$).

We derive a system of differential equations for the desired quantities $\varphi_{i,j}(t, x)$. We have the following system of difference equations

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0}(t + \Delta t, x - \Delta t) &= \varphi_{0,0}(t, x) - \varphi_{0,0}(t, \Delta t), \\ \varphi_{0,j}(t + \Delta t, x - \Delta t) &= \varphi_{0,j}(t, x) - \varphi_{0,j}(t, \Delta t) \\ &\quad + \varphi_{0,j-1}(t, \Delta t)(1 - P_{0,j-1}(t))F_j(x), \quad j > 0, \\ \varphi_{i,0}(t + \Delta t, x - \Delta t) &= \varphi_{i,0}(t, x) - \varphi_{i,0}(t, \Delta t) \\ &\quad + \varphi_{i-1,0}(t, \Delta t)P_{i-1,0}(t)F_i(x), \quad i > 0, \\ \varphi_{i,1}(t + \Delta t, x - \Delta t) &= \varphi_{i,1}(t, x) - \varphi_{i,1}(t, \Delta t) + \varphi_{i-1,1}(t, \Delta t) \\ &\quad \times P_{i-1,1}(t)F_{i1}(x) + \varphi_{i,0}(t, \Delta t)(1 - P_{i,0}(t))F_{i+1}(x), \quad i > 0, \\ \varphi_{i,j}(t + \Delta t, x - \Delta t) &= \varphi_{i,j}(t, x) - \varphi_{i,j}(t, \Delta t) + \varphi_{i-1,j}(t, \Delta t) \\ &\quad \times P_{i-1,j}(t)F_{i+j}(x) + \varphi_{i,j-1}(t, \Delta t)(1 - P_{i,j-1}(t))F_{i+j}(x), \quad i > 0, j > 1. \end{aligned}$$

This yields the following system of differential equations for $\varphi_{i,j}(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{0,0}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,0}(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,0}(t, 0), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{0,j}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,j}(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,j}(t, 0) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,j-1}(t, 0)(1 - P_{0,j-1}(t))F_j(x), \quad j > 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{i,0}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,0}(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,0}(t, 0) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i-1,0}(t, 0)P_{i-1,0}(t)F_i(x), \quad i > 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{i,1}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,1}(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,1}(t, 0) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i-1,1}(t, 0)P_{i-1,1}(t)F_{i+1}(x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,0}(t, 0)(1 - P_{i,0}(t))F_{i+1}(x), \quad i > 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{i,j}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j}(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j}(t, 0) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i-1,j}(t, 0)P_{i-1,j}(t)F_{i+j}(x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j-1}(t, 0)(1 - P_{i,j-1}(t))F_{i+j}(x), \quad i > 0, j > 1. \end{aligned}$$

We introduce the notations:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_0^{(0)}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dF_1(x) = \tilde{\varphi}_1(s), \quad \tilde{\varphi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_i(x) = \tilde{\varphi}_1(s), \quad i > 0, \\ \tilde{\varphi}_{i,j}(u, s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-ut} d_x \varphi_{i,j}(t, x) dx, \\ \tilde{\varphi}_{i,j}(u) &= \int_0^\infty e^{-ut} \varphi_{i,j}(t) dt, \quad \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j}(u, 0) = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j}(t, 0) dt, \\ \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j}(u, 0) &= \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j}(t, 0) P_{i,j}(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

The following theorem holds.

Theorem 1. *The Laplace-Stieltjes transforms $\tilde{\varphi}_{i,j}(u, s)$ of functions $\varphi_{i,j}(t, x)$ satisfy the following relations:*

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{0,0}(u, s) &= (u - s)^{-1} (\tilde{\varphi}_1(s) - \tilde{\varphi}_1(u)), \\ \tilde{\varphi}_{i,j}(u, s) &= (u - s)^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j}(u, 0) + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i-1,j}(u, 0) \tilde{\varphi}_{i+1}(s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j-1}(u, 0) \tilde{\varphi}_{i+j}(s) - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j-1}(u, 0) \tilde{\varphi}_{i+j}(s) \right), \quad i > 0, j > 1\end{aligned}$$

where $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j}(u, 0)$ are determined sequentially from the following recurrent equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j}(u, 0) &= \tilde{\varphi}_{i+1}(u) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i-1,j}(u, 0) + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j-1}(u, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_{i,j-1}(u, 0) \right) \\ &= \tilde{\varphi}_{i+1}(u) \left(\int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i-1,j}(t, 0) P_{i-1,j}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j-1}(t, 0) (1 - P_{i,j-1}(t)) dt \right).\end{aligned}$$

References

1. *Renyi A. A Characterization of Poisson Processes // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. — 1956. — V. 1, no. 4. — P. 519–527.*

2. *Cox, D.R., Smith W.L.* Renewal Theory. — Soviet Radio, 1967.
3. *Belyaev Yu.K.* Limit theorems for Rearing Flows // Theory of Probability and its Applications. — 1963. — V. 8, no. 2. — P. 175–184.
4. *Gnedenko B.V., Kovalenko, I.N.* Introduction to Queueing Theory, Second Edition. — Birkhauser, 1989.
5. *Soloviev A.D.* Asymptotic Behavior of the First occurrence of a Rare Event in a Regenerating Process // Engineering Cybernetics. — 1971. — No. 6. — P. 79–89.
6. *Smith W.L.* On some general renewal theorems for non-identically distributed Variables // Proceedings of the 4-th Berkeley Symposium. — 1961. — P. 467–514.
7. *Khintchine A. Y.* Mathematical Methods in the Theory of Queueing. — Charles Griffin and Co., 1960.
8. *Streit R.l.* Poisson Point Processes: Imaging, Tracking, and Sensing. — Springer, 2010.
9. *Serfozo R.* A Course in Applied Stochastic Processes. — Springer, 2009.
10. *Assuncao R.M., Ferrari P.A.* Independence of Thinned Processes Characteristics the Poisson Process: an Elementary Proof and a Statistical Application // Test. — 2007. — V. 16, no. 2. — P. 333–345.
11. *Kushnir A.O.* Asymptotic Behavior of a Renewal Process Trinned by an Alternating Process // Cybernetics and Systems Analysis. — 1993 — V. 29, no. 1. — P. 20–25.
12. *Gurel-Gurevich O., Peled R.* Poisson Thickening // Israel Journal of Mathematics —2013. — V. 196, no. 1. — P. 215–234.

UDC 519.234.22, 519.236.2

Applying the maximum likelihood method for constructing asymptotically effective nonparametrical estimators of functionals from the regression function

Yu. I. Pastukhova²

² *Central Economics and Mathematics Institute of RAS,
Nakhimovsky prosp. 47, Moscow, 117418, Russia*

Abstract. In the case when the sample design is given, and the "noise" conditional distribution function is known, nonparametric estimators of linear and smooth functionals from the regression function, for which minimax lower bound of mean square risk is asymptotically tight, are constructed

Keywords: asymptotically effective nonparametrical estimator, maximum likelihood method, regression function.

1. Introduction

Let the values $X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)$ of unknown function $f(t)$ be observations at some point $t_1, \dots, t_n, t \in [0; 1]$. The values $X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)$ are conditionally independent for a given design $t^{(n)} = (t_1, \dots, t_n)$.

Let us consider the problem of estimation of linear functional

$$L(f) = \int_0^1 f(t)l(t)dt$$

and the smooth functional $F : L_2 \rightarrow R^1$. It is supposed that $f(t) \in K \subset L_2$, where K is known compact in L_2 , $l(t)$ is the known function in L_2 .

Assume that the regressor's design is given. It means that the random variables t_1, \dots, t_n are independent and have the common distribution density $p(t)$,

$$0 < c \leq p(t) \leq C < \infty,$$

here c, C are some constants.

2. Main Section

Observation $X_i(t_i)$ can be written in the form

$$X_i(t_i) = f(t_i) + \varepsilon_i(t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Here $\varepsilon_i(t_i) = X_i(t_i) - f(t_i)$ is the "noise",

$$E\{X_i(t_i) - f(t_i)|t_i\} = 0,$$

$\varepsilon_i(t_i), \dots, \varepsilon_n(t_n)$ are conditionally independent for a given design $t^{(n)}$, $f(t)$ is regression function. Let $f \in K \subset L_2$, $\sup_{f \in K} |f(0)| < \infty$ were K is some compact in L_2 .

The distribution of $X_i(t_i) - f(t_i)$, for a given $t_i = t$ is supposed to be known and the density function $q(x|t)$ with respect to the Lebesgue measure in R^1 is absolutely continuous in x , has the finite Fisher's information

$$I(t) = \int_{R^1} \frac{(q'_x(x|t))^2}{q(x|t)} dx$$

and satisfies the following regularity conditions

$$0 < \inf_{[0;1]} I(t) \leq \sup_{[0;1]} I(t) < \infty; \quad \sup_{[0;1]} \int_{R^1} |x|q(x|t)dx < \infty; \quad (1)$$

$$\sup_{[0;1]} \int_{R^1} \left(\frac{q'_x(x+s|t)}{q^{1/2}(x+s|t)} - \frac{q'_x(x|t)}{q^{1/2}(x|t)} \right)^2 dx \rightarrow 0 \quad s \rightarrow 0; \quad (2)$$

$$\sup_{[0;1]} \int_{|q'_x(x|t)/q^{1/2}(x|t)| > A} \left(\frac{q'_x(x|t)}{q^{1/2}(x|t)} \right)^2 dx \rightarrow 0 \quad A \rightarrow \infty.$$

The functional F is Frechet differentiable in L_2 for $f \in K$ and the derivative $F'(f, t)$ satisfies the Hölder conditional in L_2 with some index $\alpha > 0$, i.e. for $f_1, f_2 \in K$

$$\| F'(f_1, \cdot) - F'(f_2, \cdot) \| \leq C_1 \| f_1 - f_2 \|^\alpha, \quad (\alpha \leq 1).$$

Theorems of asymptotical minimax lower bounds of mean square risk were proved in [1], [2] if conditions (1), (2) are satisfied.

Definition 1. The estimator \widehat{L}_n , is asymptotically effective in K non-parametrical estimator of linear functional $L(f)$ for the given experiment design and the known noise conditional density, if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \sup_{f \in K} E \left\{ \widehat{L}_n - L(f) \right\}^2 \right] = \int_0^1 \frac{l^2(t)}{I(t)p(t)} dt,$$

Definition 2. The estimator \widehat{F}_n is asymptotically efficient in K non-parametrical estimator of smooth functional from the regression function, if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_K [nE\{\widehat{F}_n - F(f)\}^2 - \int_0^1 \frac{(F'(f, t))^2}{I(t)p(t)} dt] = 0.$$

To estimate the linear functional, the interval $[0; 1]$ is divided into $N = [\gamma \sqrt{n}] (\gamma > 0)$ mutually disjoint parts so that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in K} \left[\int_0^1 f^2(t)l(t)p(t) dt - \sum_{k=1}^N \frac{\left(\int_{\Delta_k} f(t)l(t)p(t) dt \right)^2}{\int_{\Delta_k} l(t)p(t) dt} \right] = 0.$$

It is noted that on each set Δ_j the function $f(t)l(t)$ is approximated successfully by constant

$$S_j = N \int_{\Delta_j} f(t)l(t) dt, \quad j = 1, \dots, N$$

Let us denote by A_j the event consisting in the fact that the number of elements from $t^{(n)}$ belonging to Δ_j greater than \sqrt{n} . On each such interval the estimator $\widehat{\delta}_j$ is constructed. It maximizes function

$$Z_j(\delta) = \prod_{t_i \in \Delta_j} q(X_i(t_i) - \frac{\delta}{a_j} | t_i) p(t_i) \quad ,$$

here $a_j = N \int_{\Delta_j} l(t) dt$.

then the estimator

$$\widehat{L}_n = \sum_{j=1}^N \frac{\widehat{\delta}_j}{N} \chi(A_j)$$

($\chi(A)$ - is indicator of an event A) is asymptotically efficient in nonparametrical estimator in the sense of definition 1.

To estimate the value $F(f)$ the following conditions will be used

1. $f \in K \subset W_2^\beta$ ($\beta > \frac{1}{2}$).
2. The derivative $F'(f, t)$ satisfies the Hölder condition with some index $\alpha > (2\beta)^{-1}$ uniformly in K .
3. The set $\{F'(f, \cdot), f \in K\}$ is compact in L_2 .
4. $\inf_{t \in [0; 1]} I(t) \geq I_c > 0$ (I_c is constant).

Let us divide the sample design (t_1, \dots, t_n) into two parts. The first one has volume n_0 . It is known (see [2]) that for $f \in W_2^\beta$ there exists based on $X_1(t_1), \dots, X_{n_0}(t_{n_0})$ an estimator \widehat{f}_{n_0} for which

$$\sup_{f \in K} E \| \widehat{f}_{n_0} - f \|^2 \leq M n_0^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}}.$$

The volume n_0 satisfies the conditions

$$n_0 = [n]^\nu, \frac{2\beta + 1}{2\beta(\alpha + 1)} < \nu < 1.$$

The remaining part of the sample is used for the linear functional

$$L_{n_0}(f) = \int_0^1 f(t)F'(\widehat{f}_{n_0}, t) dt$$

estimation. The estimator has the form

$$\widehat{L}_{n_1}(f) = \sum_{j=1}^N \frac{\widehat{\delta}_J}{N} \chi(A_J) \chi(|a_j| > N^{-\varepsilon}).$$

Here $N = \gamma \sqrt{n_1}$ ($\gamma > 0$) is the number of equal part Δ_j which divided $[0; 1]$; A_j is the event consisting in the fact that the number of elements from $t^{(n_1)}$ belonging to Δ_j is greater than $\sqrt{n_1}$; $a_j = N \cdot \int_{\Delta_j} F'(\widehat{f}_{n_0}, t) dt$,

$\widehat{\delta}_J$ is the value that maximizes function

$$Z_j(\delta) = \prod_{t_i \in \Delta_j} q(X_i(t_i) - \frac{\delta}{a_j} |t_i) p(t_i).$$

Then the estimator

$$\widehat{F}_n = F(\widehat{f}_{n_0}) + \widehat{L}_{n_1} - \int_0^1 \widehat{f}_{n_0}(t) F'(\widehat{f}_{n_0}, t) dt$$

is asymptotically efficient in K nonparametrical estimator of smooth functional $F(f)$.

3. Conclusions

Thus, the constructed estimators of the linear functionals are the maximum likelihood estimators. This is possible because it is assumed that the function belongs to some compact. It is possible to divide the interval $[0, 1]$ into parts so that on each segment the function is almost constant

References

1. *Pastukhova Yu.I.*, *Khas'minskii R.Z.* Nonparametric Estimation of a Linear Functional of the Regression Function for a Given Observation

-
- Design // Problems of Information Transmission. — 1988. — Vol. 24, no 3. — P. 215–223.
2. *Pastukhova Yu.I.* A nonparametric estimator of a nonlinear functional of regression under a given plan // Journal of Soviet Mathematics. — 1990. — Vol. 52. — P. 2965–2973.
 3. *Pastukhova Yu.I.* Nonparametric Estimation of Linear Functionals of the Regression Function for a Known Conditional Distribution of the Observation Noise // Problems Information Transmission. — 1999. — Vol. 35, no 2. — P. 150–157.
 4. *Pastukhova Yu.I.* Asymptotically efficient estimation of smooth functionals of the regression function for a known distribution of the observation noise // Problems of Information Transmission. — 2004. — Vol. 40, no. 4. — P. 365–378.

Байесовский тест в задаче многоканального обнаружения сигналов

Е. В. Бурнаев^{*†}, Г. К. Голубев^{†‡}

^{*} Сколковский институт науки и технологий,
ул. Нобеля, д. 3, Москва, Россия, 143026,
E-mail: e.burnaev@skoltech.ru

[†] Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН,
Большой Каретный переулок, д.19, стр. 1., Москва, 127051, Россия,
E-mail: golubev.yuri@gmail.com

[‡] Университет Экс-Марсель,
12M, UMR 7373, Марсель, 13453, Франция,
E-mail: golubev.yuri@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача статистического обнаружения сигнала с неизвестной энергией в многоканальной системе на фоне белого гауссовского шума. Предполагается, что сигнал может появиться в любом из каналов с известной малой априорной вероятностью. Задача состоит в том, чтобы на основе зашумленных наблюдений выходов всех каналов решить присутствует ли сигнал в одном из каналов или наблюдается чистый шум. В работе вычисляются предельные распределения тестовых статистик теста максимальной апостериорной вероятности и оптимального байесовского теста, находятся множества не обнаруживаемых ими сигналов.

Ключевые слова: байесовский тест, тест на основе отношения правдоподобия, многоканальное обнаружение сигналов, обнаружение разладки.

1. Введение. Постановка задачи

В работе рассматривается одна из простейших задач статистического обнаружения сигнала в многоканальной системе. С математической точки зрения это задача о проверке простой гипотезы H_0 , которая состоит в том, что наблюдаемый вектор $Y \in \mathbb{R}^\infty$ представляет собой дискретный белый гауссовский шум $H_0 : Y = \sigma\xi$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)^\top$ – стандартный белый гауссовский шум, т.е. вектор в \mathbb{R}^∞ , компонентами которого являются независимые стандартные гауссовские случайные величины, а $\sigma > 0$ – известный уровень шума.

Альтернативой гипотезе H_0 является $H_1 : Y = S + \sigma\xi$, $S \in \mathbb{S}$, где \mathbb{S} – подмножество сигналов в \mathbb{R}^∞ , которые могут иметь только лишь одну отличную от нуля компоненту. Точнее, пусть \mathbb{S}_k одномерное линейное подпространство в \mathbb{R}^∞ , образованное из векторов, у которых все координаты кроме k -ой равны нулю. Тогда $\mathbb{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{S}_k$. Кроме того, предполагается, что сигнал $S \in \mathbb{S}$ является случайным, не зависящим от ξ и таким, что $\mathbf{P}\{S \in \mathbb{S}_k\} = \bar{\pi}_k$, где априорные вероятности $\bar{\pi}_k$ считаются известными.

Первый автор поддержан грантом РФФИ 16-29-09649 офи м, второй автор поддержан грантом Российского научного фонда (проект No. 14-50-00150).

Таким образом, задача состоит в том, чтобы по наблюдениям Y проверить простую гипотезу H_0 против сложной альтернативы H_1 .

Напомним, что статистическим тестом называется любая измеримая функция $\phi(Y)$, принимающая значения из отрезка $[0, 1]$. Далее для простоты будем предполагать, что эта функция принимает только два значения $\{0, 1\}$: если $\phi(Y) = 0$, то это означает, что принимается гипотеза H_0 , а если $\phi(Y) = 1$, то принимается альтернатива H_1 .

Качество статистического теста принято измерять вероятностями ошибок первого рода α_ϕ (вероятность ложной тревоги) и второго рода β_ϕ (пропуска сигнала), которые определяются соответственно следующим образом: $\alpha_\phi = \mathbf{P}_0\{\phi(Y) = 1\}$, $\beta_\phi(S) = \mathbf{P}_S\{\phi(Y) = 0\}$. Здесь \mathbf{P}_0 – вероятностная мера, порожденная наблюдениями Y при H_0 , а \mathbf{P}_S – мера, порожденная Y при H_1 при фиксированном векторе S .

Как правило, мы хотим при заданной вероятности ложной тревоги построить тест с минимальной вероятностью пропуска сигнала. К сожалению, решить эту задачу в общем случае, как правило, невозможно поскольку вероятность ошибки второго рода зависит от S . Однако всегда можно построить статистический тест, который при заданной вероятности ложной тревоги, минимизирует среднюю вероятность ошибки второго рода $\bar{\beta}_\phi(Q) = \int_{\mathbb{S}} Q(S)\beta_\phi(S) dS$, где положительная функция

$Q(\cdot)$ такова, что $\int_{\mathbb{S}} Q(S) dS = 1$. Подчеркнем, что вероятностная плотность $Q(\cdot)$ должна обязательно отражать априорную информацию о сигнале S . Поскольку предполагается, что $S \in \mathbb{S}_k$ с вероятностью $\bar{\pi}_k$, а \mathbb{S}_k является одномерным подпространством, то в рассматриваемой задаче $\int_{\mathbb{S}} Q(S)\beta_\phi(S) dS = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\pi}_k \int_{-\infty}^{\infty} q_k(S_k)\beta_\phi(0, \dots, 0, S_k, 0, \dots) dS_k$. Здесь $q_k(\cdot)$ – априорная плотность распределения сигнала S_k в k -ом канале.

Тест, минимизирующий среднюю вероятность ошибки второго рода, имеет вид: $\phi(Y) = \mathbf{1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \int_{-\infty}^{\infty} q_k(s)l(s; Y_k) ds \geq t_\alpha\right\}$, где критический уровень t_α выбирается так, чтобы обеспечить заданное значение вероятности ложной тревоги α , а $l(s; Y_k) = \exp(-(s^2 - 2sY_k)/(2\sigma^2))$ – отношение правдоподобия для k -го канала.

Поскольку у нас, как правило, нет никакой априорной информации о распределении ненулевой компоненты сигнала, то математически этот факт можно выразить предположив, например, что эта компонента имеет гауссовское распределение с большой дисперсией, т.е. $q_k(s) = (\sqrt{2\pi}A)^{-1} \exp(-s^2/2A^2)$, где $A \gg \sigma$. Тогда, при $A^2/\sigma^2 \rightarrow \infty$ мы приходим к следующему байесовскому тесту:

$$\phi^\circ(Y) = \mathbf{1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\pi}_k \exp\left(\frac{Y_k^2}{2\sigma^2}\right) \geq t_\alpha^\circ(\bar{\pi})\right\},$$

где критическое значение $t_\alpha^\circ(\bar{\pi})$ выбирается так, чтобы гарантировать вероятность ложной тревоги равную α . Здесь и далее $\bar{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots)^\top$ — вектор априорных вероятностей.

На практике наряду с байесовским тестом часто используется тест максимальной апостериорной вероятности (МАВ)

$$\phi^*(Y) = \mathbf{1} \left\{ \max_{i \geq 1} \left[\bar{\pi}_i \exp\left(\frac{Y_i^2}{2}\right) \right] \geq t_\alpha^*(\bar{\pi}) \right\},$$

где $t_\alpha^*(\bar{\pi})$ — соответствующий критический уровень.

Цель этой статьи — выяснить в каком смысле и насколько байесовский тест лучше теста МАВ. Для этого нам потребуется дополнительная гипотеза об априорных вероятностях $\bar{\pi}_k$. Будем предполагать, что $\bar{\pi}_k = \bar{\pi}_k^n = \bar{\pi}\left(\frac{k}{n}\right) / \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\pi}\left(\frac{s}{n}\right)$, где $\bar{\pi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ — неотрицательная, ограниченная функция такая, что $\int_0^\infty \bar{\pi}(x) dx = 1$, $H(\bar{\pi}) = \int_0^\infty \bar{\pi}(x) \log \frac{1}{\bar{\pi}(x)} dx < \infty$. Грубо говоря, это предположение означает, что априорные вероятности малы, точнее, имеют порядок n^{-1} , но при этом энтропия априорного распределения ограничена величиной $\log(n) + C$, где $C < \infty$, при любых $n > 1$. Фактически, величина n является эффективной размерностью задачи и далее нас будут интересовать свойства статистических тестов при $n \rightarrow \infty$.

Задача обнаружения сигнала в многоканальных системах имеет многочисленные технические приложения и богатую историю. Разнообразные статистические постановки и варианты этой задачи рассмотрены, например, в [1]. Обнаружение сигнала с известной энергией в гауссовских каналах с помощью метода максимального правдоподобия детально изучено в [2], § 8.2.

По-видимому, одной из первых математических работ о байесовском обнаружении сигнала в многоканальных системах является [3]. В этой работе изучалась статистическая модель, состоящая из n рэлеевских каналов. Задача байесовского обнаружения сигналов с известной энергией в гауссовских каналах рассматривалась в [4]. В этих работах предполагалось, что сигнал появляется в одном из n каналов с равными априорными вероятностями. Отметим также, что монография [5] содержит много интересных и полезных фактов об обнаружении сигнала в многоканальных системах с гауссовскими шумами.

Подчеркнем, что в настоящей работе изучается ситуация когда априорные вероятности появления сигнала в различных каналах различны, а его энергия неизвестна и является мешающим параметром. Поскольку статистическая задача обнаружения сигнала в многоканальной системе является задачей большой размерности, то в отличие от статистических задач низкой размерности, ее решение существенным образом зависит от имеющейся априорной информации об обнаруживаемых сигналах и поэтому результаты, представленные в

настоящей работе довольно существенно отличаются от результатов в цитируемых выше работах.

2. Основные результаты

При $n \rightarrow \infty$ критический уровень теста МАВ $\log[t_\alpha^*(\bar{\pi}^n)] = \log \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} - \frac{1}{2} \log \left[\log \left(\frac{n}{\sqrt{\pi\alpha}} \right) \right] + o(1)$. Статистические свойства теста МАВ, связанные с ошибкой второго рода, определяются множеством в \mathbb{R}^∞ : $\Pi_{\bar{\pi}^n, \alpha}^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty : x_i^2 \leq 2\sigma^2 \left[\log \frac{1}{\bar{\pi}_i^n} + \log \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} - \frac{1}{2} \log \left(\log \frac{n}{\sqrt{\pi\alpha}} \right) \right] \right\}$.

Можно показать, что никакой сигнал из $\Pi_{\bar{\pi}^n, \alpha}^* \cap \mathbb{S}$ не может быть обнаружен с помощью теста МАВ. Действительно, для теста МАВ выполнено, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{S \in \Pi_{\bar{\pi}^n, \alpha}^* \cap \mathbb{S}} \beta_{\phi^*}(S) \geq \frac{1-\alpha}{2}$.

При $n \rightarrow \infty$ критический уровень байесовского теста $t_\alpha^\circ(\bar{\pi}^n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[b_n + \frac{t_\alpha^\circ + H(\bar{\pi})}{b_n} \right] + o \left(\frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \right)$, где t_α° удовлетворяет равенству $\mathbf{P} \{ \zeta^\circ \geq t_\alpha^\circ \} = \alpha$, $\zeta^\circ = \left[\left(\sum_{s=1}^k e_s \right)^{-1} - \frac{1}{k} \right] + \gamma$, e_s — независимые, стандартные экспоненциально распределенные случайные величины, $\gamma = 0,577215\dots$ — постоянная Эйлера, $b_n = \left[2 \log \frac{n}{\sqrt{\pi \log(n)}} \right]^{1/2}$.

Как и с тестом МАВ свяжем с байесовским тестом следующий параллелепипед: $\Pi_{\bar{\pi}^n}^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty : x_i^2 \leq 2\sigma^2 \log \frac{1}{\bar{\pi}_i^n \sqrt{\pi \log(n)}} \right\}$. Аналогично, для ошибки второго рода байесовского теста выполнено следующее неравенство: $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{S \in \Pi_{\bar{\pi}^n}^\circ \cap \mathbb{S}} \beta_{\phi^\circ}(S) \geq \frac{1-\alpha}{2}$.

3. Заключение

В работе вычисляются для тестовых статистик теста максимальной апостериорной вероятности и оптимального байесовского теста множества не обнаруживаемых ими сигналов. Заметим, что при больших n разница между квадратами сторон параллелепипедов не обнаруживаемых сигналов $\Pi_{\bar{\pi}^n, \alpha}^*$ и $\Pi_{\bar{\pi}^n}^\circ$ не зависит ни от номера стороны, ни от n и равна $\delta(\alpha) = 2\sigma^2 \log \frac{1}{\alpha}$. Статистический смысл этой величины прозрачен и означает, что байесовский тест по сравнению с тестом МАВ позволяет обнаруживать сигналы с энергиями меньшими на величину $\delta(\alpha)$. Отметим также, что в отличие от теста МАВ, параллелепипед сигналов, не обнаруживаемых байесовским тестом, не зависит от вероятности ложной тревоги α .

Литература

1. Теория обнаружения сигналов // Под ред. П. А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. 440 С.
2. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь. — М.: Советское радио, 1974. — 720 с.
3. *Добрушин Р. Л.* Одна статистическая задача теории обнаружения сигнала на фоне шума в многоканальной системе, приводящая к устойчивым законам распределения // Теория вероятн. и ее примен. — 1958. — Т. 3, вып. 2. — С. 173–185.
4. *Бурнашев М. В., Бергамов И. А.* Об одной задаче обнаружения сигнала, приводящей к устойчивым распределениям // Теория вероятн. и ее примен. — 1990. — Т. 35, вып. 3. — С. 557–560.
5. *Ingster Yu. I., Suslina I. A.* Nonparametric Goodness-of-Fit Testing Under Gaussian Models. — Springer Science & Business Media, 2003.
6. *Pyke R.* Spacings (with discussion) // J. R. Statist. Soc. — 1965. — Vol. 7. — P. 395–449.
7. *Бурнашев М. В., Голубев Г. К.* О предельных распределениях момента первого достижения высокого уровня // Пробл. передачи информ. — 2015. — Т. 51, вып. 2. — С. 67–85.

UDC 519.226

Bayesian Test for Multi-Channel Signal Detection Problem

E. V. Burnaev*[†], G. K. Golubev^{†‡}

* *Skolkovo Institute of Science and Technology,
3 Nobel Street, Moscow 143026, Russia,
E-mail: e.burnaev@skoltech.ru*

[†] *Institute for Information Transmission Problems,
Bolshoy Karetny per. 19, build.1, Moscow 127051 Russia*

[‡] *Aix-Marseille Université,
I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France,
E-mail: golubev.yuri@gmail.com*

We consider a problem of detection a signal with unknown energy in a multi-channel system, containing a big number of channels. We assume that the signal can appear in any of channels with a known small prior probability. Using observations from all channels we would like to detect whether the signal is presented in one of the channels or we observe pure noise. In our work we describe and compare statistical properties of maximum posterior probability test and optimal Bayesian test. In particular, for these tests we obtain limiting distributions of test statistics and define sets of undetectable signals.

Keywords: Bayesian test, multi-channel signal detection, change-point detection, Likelihood ratio test.

УДК 519.234.33

Пределные распределения статистики Пирсона для неоднородной полиномиальной схемы

М. П. Савелов*[†]

* *Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

[†] *Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер., д.9, г. Долгопрудный, Московская область, Россия, 141701*

Аннотация. Для неоднородной полиномиальной схемы найдены условия, при которых распределение статистики Пирсона сходится к распределению неотрицательно определенной квадратичной формы от независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением.

Ключевые слова: критерий хи-квадрат, статистика Пирсона, предельные распределения.

1. Введение

Рассмотрим схему независимых испытаний с N исходами. В соответствии с нулевой гипотезой H_0 будем считать, что вероятность j -го исхода в t -м испытании равна p_j^t , $j = 1, \dots, N$. Для $t \geq 1$ и $1 \leq j \leq N$ введем индикаторы $I_j(t)$: $I_j(t) = 1$, если при t -м испытании осуществился j -й исход, и $I_j(t) = 0$ в противном случае. Тогда $\nu_j(n) := \sum_{t=1}^n I_j(t)$ — частота исхода j в первых n испытаниях. Пусть p_1, \dots, p_N — фиксированные положительные числа. Статистика К. Пирсона

$$X(n) := \sum_{j=1}^N \frac{1}{np_j} (\nu_j(n) - np_j)^2$$

используется, например, в критерии согласия (см., например, [1]; подробный обзор есть в [4]) с гипотезой, которая в наших обозначениях имеет вид: « $p_j^t = p_j$, $1 \leq j \leq N, t \geq 1$ ». Мы рассмотрим ситуацию, когда статистика $X(n)$ используется для построения критерия согласия с гипотезой H_0 в более общем случае.

2. Основная часть

Пусть выполнены следующие условия:

1. $\sqrt{n} \left(\frac{p_i^1 + \dots + p_i^n}{n} - p_i \right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного $1 \leq i \leq N$.

2. Существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n p_i^t p_j^t \right\|_{i,j=1}^N$, где предел понимается как поэлементный предел матриц.

Положим по определению $A = \left\| \delta_{ij} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^n p_i^t p_j^t}{n \sqrt{p_i p_j}} \right\|_{i,j=1}^N$. Через $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ обозначим собственные значения матрицы A (вещественные в силу симметричности A), расположенные в порядке убывания. Установлена следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия 1 и 2, то $\lambda_N = 0$ и

$$X(n) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \xi_i^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\xi_i \sim N(0, 1)$ — независимые стандартные нормальные величины, причем $\lambda_1 \leq 1$.

Заметим, что величина $\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \xi_i^2$, фигурирующая в условии теоремы 1, стохастически меньше (точнее, не больше) величины χ_{N-1}^2 , так как $1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N = 0$.

Пример. Пусть при каждом $1 \leq j \leq N$ величины p_j^t меняются периодическим образом с периодом L_j , т.е. $p_j^t = p_j^{(t \bmod L_j)}$, тогда, как несложно видеть, условия 1 и 2 выполнены (при $p_j = \frac{p_j^1 + \dots + p_j^{L_j}}{L_j}$) и, следовательно, утверждение теоремы 1 верно. Отметим, что наличие периода L_j для каждого j равносильно наличию «общего» периода L , не зависящего от j .

3. Заключение

Теорема 1 означает, что, грубо говоря, «слишком большое» значение статистики $X(n)$, которое предписывает отвергнуть гипотезу вида « $p_j^t = p_j, 1 \leq j \leq N$ », одновременно предписывает отвергнуть целый класс гипотез, которые однозначно определяются числами p_j^t , удовлетворяющими условиям 1–2.

Отметим, что очень похожие утверждения о поведении статистики хи-квадрат критерия можно получить и в ситуации, когда вместо условий 1–2 требуется строгая стационарность последовательности наблюдений (см. [3]). Более того, схожие эффекты (причем вместо неравенства в смысле стохастического порядка выполняется неравенство между дисперсиями) в другой ситуации отмечены в [2] на стр.301 (перед теоремой 1). Наконец, в работе [5] в задаче, близкой к рассматриваемой, установлено поведение статистики Пирсона в случае, когда частоты центрируются их математическими ожиданиями.

Благодарности

Автор благодарит А.М. Зубкова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. *Крамep Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
2. *Samuels S.M.*, On the Number of Successes in Independent Trials // Ann. Math. Statist. — 1965. — Vol. 36, no. 4, — P. 1272–1278.
3. *Chanda K. C.* Chi-Square Goodness-of-Fit Tests Based on Dependent Observations // Statistical Distributions in Scientific Work, NATO Advanced study Institutes Series. — 1980. — Vol. 79, — P. 35–49.
4. *Balakrishnan N., Voinov N., Nikulin M.S.*, Chi-Squared Goodness of Fit Tests with Applications, 1st Edition. — Academic Press, 2013.
5. *Selivanov B.I.* Limit distributions of the χ^2 statistic of K. Pearson in a sequence of independent trials // Mathematical Notes. — 2008. — Vol. 83, no. 5–6. — P. 821–832.

UDC 519.234.33

Limit distributions of the Pearson statistics for nonhomogeneous polynomial scheme**M. P. Savelov**^{*†}^{*} *Lomonosov Moscow State University*[†] *Moscow Institute of Physics and Technology*

We consider nonhomogeneous polynomial scheme and find conditions on the probabilities of outcomes under which it is possible to describe limit distributions of the Pearson statistics.

Keywords: chi-square test, Pearson statistics, limit distribution.

История создания и пути развития интернет-форума имени Б.В. Гнеденко

А. В. Бочков*, М. А. Ястребенецкий†

* *Центр анализа рисков, ООО «НИИгазэкономика», ул. Старая Басманная, д.20, стр. 8, Москва, , 105066, Россия*

† *Кафедра системного анализа и информационно-аналитических технологий, НТУ «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичёва, д.2, Харьков, 61002, Украина*

Аннотация. Описана история создания и развития неформального интернет-сообщества, созданного проф. И.А. Ушаковым в память своего учителя – выдающегося советского математика Б.В. Гнеденко. Форум Гнеденко за 10 лет своего существования стал настоящей рабочей площадкой для общения специалистов и экспертов, продвигающей научные знания, публикующей научные статьи. Регулярные рассылки Форума позволяют специалистам в области прикладной теории надёжности быть в курсе последних научных разработок и проведенных исследований, конференций, публикаций и т.п. Форум издаёт свой журнал “Reliability: Theory & Applications”

Ключевые слова: Б. В. Гнеденко, научное сообщество, теория надёжности, форум, интернет.

Одним из главных условий глобализации сегодня можно назвать “высокоскоростной” обмен знаниями, но во избежание хаоса и для более продуктивного взаимодействия учёных и людей, интересующихся наукой, необходимо создание качественно отличных от социальных сетей виртуальных научных сообществ. Эти сообщества могут дать новый импульс к развитию не только новым научным исследованиям, но и наукам, имеющим давнюю историю и накопившим солидный багаж знаний. Безусловно, одной из таких наук можно назвать теорию надёжности. Она всегда уделяла основное внимание анализу систем: понятно, что на уровне элементов теоретические методы сводились в основном к задачам планирования испытаний и обработки экспериментальных данных. Современные системы всё более и более усложняются – возникают глобальные транспортные системы, телекоммуникационные сети... Есть много интересных, сложных и актуальных задач, но от специалиста по надёжности уже требуется не написание общетеоретических работ, а решение этих конкретных задач, участие в “живых проектах”. Зачастую задачи настолько специфичны, что их решения уже не носят междисциплинарного характера. Но, безусловно, решение этих задач опирается на общеметодологическую и математическую базу современной теории надёжности. Хотя слухи о смерти теории надёжности представляются преждевременными, как говаривал Марк Твен, пора её расцвета, несомненно, осталась позади...

Но был и период расцвета. В 1958 г. состоялась Первая Всесоюзная конференция по надёжности, на которой председательствовал В.И. Сифоров. Формировались научные школы – в Москве, Ленинграде, Киеве, Риге... Бурный поток идей в теории надёжности хлынул в самом начале “холодной войны”, когда стали появляться всё более и более сложные системы вооружения, которые “простаивали” больше, чем работали. И хотя первые шаги в развитии того, что мы теперь называем теорией надёжности, были сделаны в Америке, отечественные специалисты быстро включились в этот процесс, а вскоре не только сравнялись, но во многом опередили “законодателей моды”. Так, интересный метод оценки доверительных границ для надёжности системы, основанных на результатах безотказных испытаний входящих в неё элементов, был получен Р. Мирным и А. Соловьёвым. Затем некоторые более общие результаты были получены Ю. Беляевым, который предложил метод, основанный на статистических испытаниях. Большое число новых аналитических результатов для различных случаев было получено И. Павловым, Р. Судаковым, О. Тескиным. Много работ было посвящено анализу сложных систем с деградацией качества функционирования за счёт “частичных отказов”. Доказательство двух предельных теорем в теории процессов восстановления (рекуррентных точечных процессов) сыграло решающую роль в развитии теории надёжности восстанавливаемых систем. А. Реньи сформулировал и доказал теорему асимптотического “разрежения” точечного потока, и тогда же Г. Ососков доказал теорему об асимптотическом поведении суперпозиции точечных потоков. Позже Ю. Беляев, Б. Григелионис и И. Погожев обобщили эти результаты. Эти асимптотические теоремы позволяют построить практически удобные инженерные методы приближенного анализа сложных высоконадежных систем с восстановлением. Б. Гнеденко был первым, кто начал разрабатывать асимптотические методы анализа систем с восстановлением ещё в начале 60-х годов. Он рассмотрел дублированную систему и показал, что асимптотическое распределение времени безотказной работы таких систем является экспоненциальным и не зависит от распределения времени восстановления (если это время в среднем мало по сравнению с наработкой на отказ). Эти первые работы открыли новое направление в теории надёжности, которое затем успешно развивали, в первую очередь, И. Коваленко и А. Соловьёв. Интересные идеи агрегирования состояний полумарковских процессов с применением к задачам надёжности были предложены В. Королюком и А. Турбиным. Интересные приложения к надёжности содержатся в работах В. Анисимова и Д. Сильвестрова. Такое важное направление в теории надёжности, как ускоренные испытания, также возникло на самой заре развития теории надёжности. Достаточно вспомнить работы Н. Седякина, Х. Кордонского и И. Герцбаха, А. Перроте, Г. Карташова и К. Цветаева. Модели ускоренных испытаний с нагрузками, зависящими от времени, рассмотрели В. Багданавичус и М. Никулин. И, разумеется, нельзя не

упомануть о прекрасной книге [1] под общей редакцией Бориса Владимировича Гнеденко, в которой подытожены отечественные достижения в области теории надёжности .

Представители упомянутых научных школ СССР из Москвы, Ленинграда, Киева, Риги, Иркутска, Ташкента, Горького, Минска, Тбилиси, Еревана, Владивостока и других городов после трагического распада СССР и вследствие стремительного развития тенденций глобализации (в том числе и в сфере науки) оказались в самых разных уголках мира. Конечно, многие ведущие специалисты продолжали научное и личное общение, но эти личные связи носили эпизодический и несистемный характер.

В 2005 году по инициативе Игоря Ушакова возникла неформальная международная группа специалистов по надёжности (International Group on Reliability), которая организовала в сети Интернет сайт – Форум Гнеденко [2], названный в честь выдающегося советского математика, специалиста по теории вероятностей, математической статистике, вероятностным и статистическим методам, члена-корреспондента (1945) и академика (1948) АН УССР Бориса Владимировича Гнеденко (1912-1995). Это была дань памяти Игоря Ушакова своему учителю и другу, попытка собрать своих коллег, разбросанных по всему миру.

С момента своего основания и по сей день Форум Гнеденко – добровольное неформальное объединение, основная цель создания которого – организация дискуссионной площадки и установление профессиональных и личных контактов в международном сообществе специалистов по теории вероятностей и математической статистике, а также различным их приложениям как, например, теория надёжности, контроль качества, теория массового обслуживания, теория управления запасами, анализ рисков и пр. Основная форма деятельности Форума – обмен профессиональной информацией через веб-сайт Форума и личные контакты участников. Форум является некоммерческой организацией, что выгодно отличает его среди существующих виртуальных научных сообществ в сети Интернет. В Форуме может участвовать как персонально (в основном) любой специалист в теории надёжности и анализа риска, так и коллективно (компании, занимающиеся прикладной теорией вероятностей и статистики проектов, соответствующих отделов университетов и т.д.). Нет никаких особых требований к членству, кроме профессиональной принадлежности претендента к области деятельности Форума. Президент Форума избирается на регулярной основе и имеет право решающего голоса в процессе принятия решений и обсуждений на Форуме. Вице-президент также избирается и, соответственно, имеет консультационный голос. По правилам Форума вице-президент автоматически становится президентом на втором сроке своей деятельности.

Начиная с января 2006 года Форум выпускает свой ежеквартальный электронный журнал “Надёжность: Теория и практические приложения” (“Reliability: Theory & Applications”). Журнал зарегистрирован в Библиотеке Конгресса США (ISSN 1932-2321). За 10 лет, прошедшие

с момента издания первого номера, в 31 номере журнала опубликовано более 450 статей. Статьи проходят обязательный этап редактирования и публикуются на сайте журнала. Журнал публикует статьи, обзоры, рецензии, воспоминания, информационные и библиографические материалы по теоретическим и прикладным аспектам надёжности и управления качеством, безопасности, живучести, технического обслуживанию, методам анализа и управления рисками. Предпочтение отдается материалам, отражающим практическое применение рассматриваемых методов, в статьях теоретического характера, должны непременно содержаться новые постановки задач, указание возможности практического применения и не должно быть чрезмерного использования формальных выкладок.

В редакционную коллегию журнала входят ученые и специалисты, являющиеся признанными экспертами в своих областях деятельности и прекрасно разбирающиеся в сути обсуждаемых в журнале проблем. Публикация в журнале приравнивается к публикации в международном научно-техническом журнале, однако за авторами сохраняется полное право использовать свои материалы после публикации в журнале по своему усмотрению (посылать их в другие издания, представлять на конференции и т.п.). В настоящее время статьи журнала индексируются в базе РИНЦ, а конце 2017 года планируется включение издания в базу Scopus.

Регулярно Форум информирует своих участников о предстоящих конференциях, семинарах, выходе новых монографий в области теории надёжности и анализа риска. В настоящее время Форум объединяет более 350 участников из 47 стран мира.

Говоря о Форуме Гнеденко невозможно не сказать о его создателе, генераторе идей и бессменном Президенте – Игоре Алексеевиче Ушакове. Родился он 22.01.1935 г. В 1952 окончил московскую школу № 150, а в 1958 – Московский авиационный институт. В 1963 году ему присвоена степень кандидата, а в 1968 – степень доктора технических наук. Оппонентом на обеих защитах выступал Б. В. Гнеденко, с которым у него установились близкие, доверительные отношения, бережно сохраняемые всю жизнь. Более 40 лет отданы им работе в научно-промышленном и оборонном комплексе СССР. Блестяще написанный им (в соавторстве с Б. А. Козловым) в 1975 году справочник по расчету надёжности до сих пор остается настольной книгой инженеров во всем мире. В 1989 году он был приглашен в Университет Джорджа Вашингтона (США). Перенес операцию и из-за проблем с сердцем остался в Америке до конца жизни. Он был членом редакционного совета журнала “Надежность и контроль качества” с 1962 до конца жизни, исполнительным секретарем журнала Академии наук СССР “Техническая кибернетика” с 1968 по 1991 год; *Kybernetes* (Великобритания), с 1970 по 2014 года и многих-многих других. Под его руководством защитился 61 аспирант, более 10 из них впоследствии стали докторами наук. Его научное наследие насчитывает 30 монографий и более 300 научных статей. Последние 11 лет жизни, вопреки одолевавшим

его недугам, отданы им созданию и развитию неформальной международной группы специалистов по надёжности – Интернет-Форума им. Б. В. Гнеденко. Он ушел из жизни 27 февраля 2015 года на 81 году в г. Сан-Диего (США). Форум Гнеденко и его научный журнал - лучшая память этому светлому человеку.

По образному сравнению Нозера Сингпурвалы научные форумы, подобные Форуму Гнеденко могут стать своеобразными “зонтиками”, под которым объединятся профессионалы и начинающие исследователи. Действительно, существует много сфер человеческой деятельности, в которых знания и методология теории надёжности могут быть востребованы и отлично работать. Как представляется, в поисках новых “локомотивов развития”, “точек роста” могут помочь профессиональные виртуальные научные сообщества.

Литература

1. *Гнеденко Б. В.* (редактор) Вопросы математической теории надежности. (Авт.: Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко, А.Д. Соловьев, И.А. Ушаков.). — М.: Радио и связь, 1983. — 376 с.
2. Интернет-сайт Форума Гнеденко: www.gnedenko-forum.org
3. *Ушаков И. А.* Надёжность: прошлое, настоящее, будущее // Reliability: Theory & Applications. — 2006. — Vol. 1, no. 1. — С. 17–27.
4. *Ушаков И. А.* Откуда мы? Кто мы? Куда мы идём? // Reliability: Theory & Applications. — 2006. — Vol. 1, no. 2. — С. 14–17.

UDC 51:001.83, 51:061.2/.3

The History of the Creation and Development of the e-Forum Gnedenko

A. V. Bochkov*, M. A. Yastrebenetsky†

* LLC "NIIGAZECONOMIKA" (*Economics and Management Science in Gas Industry Research Institute*), Moscow, 105066, Russia
e-mail: a.bochkov@gmail.com

† Kharkov Polytechnical University (*Dept. Systems Analysis*). Expert of International Electrotechnical Commission, 61002, Ukraine
e-mail: ma.yastreb2013@gmail.com

Described the history of creation and development of the Internet Internet community created by prof. I.A. Ushakov in memory of his teacher - an outstanding Soviet mathematician B.V. Gnedenko. Forum Gnedenko for 10 years of its existence has become a real platform for communication of experts and scientist. Regular mailing of the Forum in the field of the applied theory of reliability, about the course of the latest scientific developments and conducted studies, conferences, publications and etc. - are very important. Forum publishes electronic journal "Reliability: Theory and Applications".

Keywords: Gnedenko, scientific community, reliability theory forum, internet.

Золотые периоды московской математики (30-е и 60-е годы)

В. М. Тихомиров*

** Кафедра общих проблем управления,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119991*

Аннотация. В тридцатые годы московская математическая школа — П. С. Александров, Н. К. Бари, И. М. Гельфанд, А. О. Гельфонд, Л. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Д. Е. Меньшов, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Л. С. Понтрягин, В. В. Степанов, А. Н. Тихонов, А. Я. Хинчин, Л. Г. Шнирельман (список можно продолжать), стержень которой составляли ученики и «внуки» Н. Н. Лузина и переехавшие в Москву представители других школ (петербургской — С. Л. Соболев, одесской — В. Ф. Каган, киевской — Б. Н. Делоне и О. Ю. Шмидт), заняла, пожалуй, ведущее положение среди мировых математических школ (немецкая была разгромлена нацизмом, французская переживала период смены поколений, американская математика находилась в стадии созидания, а замечательные европейские школы — английская, венгерская, итальянская, польская, шведская и другие, не располагали столь мощной группой первоклассных математиков).

В шестидесятые годы московская математическая школа переживала ещё один золотой период своего развития. В этот период выдающихся результатов добились В. М. Алексеев, Д. В. Аносов, В. И. Арнольд, Ф. А. Березин, А. Г. Витушкин, С. К. Годунов, А. А. Гончар, Р. Л. Добрушин, В. Д. Ерохин, Ю. И. Журавлёв, М. И. Зеликин, А. А. Кириллов, М. Л. Лидов, О. Б. Лупанов, Ю. И. Манин, С. П. Новиков, О. А. Олейник, И. И. Пятецкий-Шапиро, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, И. Р. Шафаревич, Г. Е. Шилов, и здесь список можно продолжать и продолжать.

В докладе будет рассказано о тех временах и об этих двух замечательных периодах в развитии нашей науки.

Ключевые слова: Московское математическое общество, механико-математический факультет, институт Стеклова, школа Колмогорова, семинар Гельфанда.

Литература

1. Математика в СССР за 40 лет. 1917–1957. Т. 1–2. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Математика в СССР (1958–1967). Т. 2. Вып. 1–2. — М.: Физматгиз, 1970.
3. *Боголюбов Н.Н., Мергелян С.Н.* Советская математическая школа. — М.: Знание, 1967.

4. Демидов С.С., Тихомиров В.М., Токарева Т.А. Московское математическое общество и развитие математики в России (к 150-летию создания) // Труды Московского математического общества. — 2016. — Т. 77, вып. 2. — С. 1–29.

UDC 51(091)

Golden periods of Moscow mathematics (30th and 60th years)

V. M. Tikhomirov*

* *Department of General Problems of Control,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

In the thirties, the Moscow mathematical school – P.S. Alexandrov, N.K. Bari, I.M. Gelfand, A.O. Gelfond, L.V. Keldysh, A.Ya. Khinchin, A.N. Kolmogorov, M.A. Lavrentiev, L.A. Lyusternik, A.I. Maltsev, D.E. Menshov, S.M. Nikolskii, P.S. Novikov, L.S. Pontryagin, L.G. Shnirelman, V.V. Stepanov, A.N. Tikhonov (the list can be continued), the core of which was Luzin’s pupils, his “grandchildren” and the representatives of other schools (Petersburg – S.L. Sobolev, Odessa – V.F. Kagan, Kiev – B.N. Delone, O.Yu. Shmidt), who moved to Moscow, took perhaps the leading position among the world’s mathematical schools (German experienced a period of defeat by Nazism, the French experienced a period of change of generations, American mathematics was in the stage of creation, and wonderful European schools – English, Hungarian, Italian, Polish, Swedish and others – did not have such a powerful group of first-class mathematicians).

In the sixties the Moscow mathematical school experienced another golden period of its development. In this period outstanding results were achieved by V.M. Alekseev, D.V. Anosov, V.I. Arnold, F.A. Berezin, S.V. Fomin, S.K. Godunov, A.A. Gonchar, R.L. Dobrushin, V.D. Erokhin, A.A. Kirilov, M.L. Lidov, O.B. Lupanov, Yu.I. Manin, S.P. Novikov, O.A. Oleynik, I.I. Pyatetskii-Shapiro, I.R. Shafarevich, G.E. Shilov, Ya.G. Sinai, A.G. Vitushkin, M.I. Zelikin, Yu.I. Zhuravliov and the list can be continued.

We want to tell about these two remarkable periods in the development of our science.

Keywords: Moscow mathematical society, Faculty of mathematics and mechanics, Steklov institute, Kolmogorov school, seminar of Gelfand.

Математическая Москва в потоке советской истории

С. С. Демидов*[†], С. С. Петрова*

* Кабинет истории и методологии математики и механики,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119234

[†] Институт истории естествознания и техники
им. С.И. Вавилова РАН,
ул.Балтийская, д. 14, Москва, Россия, 125315

Аннотация. Рассматривается развитие математических исследований и математических институтов в Москве в контексте становления и развития Советской математической школы в 30-е – 60-е годы XX века.

Ключевые слова: Советская математическая школа, Математический институт им. В. А. Стеклова, механико-математический факультет МГУ, Московское математическое общество.

1. К началу Великой Отечественной войны в Москве сложился один из крупнейших мировых математических центров. Его основанием стали: выросшая на почве легендарной Лузитании новая математическая школа (сам Н. Н. Лузин, а также А. Я. Хинчин, П. С. Александров, Л. А. Люстерник, М. А. Лаврентьев, П. С. Новиков, Д. Е. Меньшов, А. Н. Колмогоров, Л. Г. Шнирельман, А. О. Гельфонд, А. Н. Тихонов, Л. С. Понтрягин, М. В. Келдыш, И. М. Гельфанд и др.) и переехавший в 1934 году из Ленинграда Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР (С. Н. Бернштейн, Б. Н. Делоне, И. М. Виноградов, Н. Е. Кочин, С. Л. Соболев и др.). Если иметь при этом в виду, что кроме новой математики, выросшей из исследований по теории множеств и теории функций, в Москве традиционно успешно велись исследования по прикладной математике (школа Н. Е. Жуковского: С. А. Чаплыгин и др.), дифференциальной геометрии и геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров, С. П. Фиников, И. Г. Петровский и др.), а также принять во внимание творческую энергию ряда математиков, переехавших в столицу из других университетов страны (А. П. Котельникова, Е. Е. Слуцкого и О. Ю. Шмидта из Киева, В. Ф. Кагана из Одессы и др.), то становится понятным, насколько мощный математический потенциал сложился в Москве к концу 30-ых годов. Идейный синтез прежде воевавших между собой школ — Ленинградской–Петербургской и Московской, привёл к поразительному результату: к рождению одной из ведущих математических школ второй половины XX века — Советской математической школы. Надо сказать, что это

не сразу было оценено на Западе, хотя некоторые из математиков (например, Ж. Адамар во Франции, С. Лефшец в США) осознали это достаточно рано. Этому непониманию способствовало и то, что активно развивавшиеся в 20-е — первой половине 30-ых годов международные связи советских математиков к концу десятилетия стали затухать, а с началом войны почти что замерли.

2. Начавшаяся война затормозила развитие этого центра. Приближавшийся фронт стал причиной эвакуации на восток страны Президиума Академии наук СССР и академических институтов (в их числе Математического института им. В. А. Стеклова), университета (а, следовательно, Московского математического общества), а также многочисленных московских высших учебных заведений с их математическими кафедрами. В эвакуации математики продолжали интенсивную исследовательскую деятельность, немалое место в которой стала занимать оборонная тематика. При этом они успевали вести активную преподавательскую деятельность на местах — в Поволжье, на Урале, в Сибири, республиках Средней Азии и Закавказья. Невозможно оценить, сколько потенциально одарённых молодых людей, способных к математическому творчеству, погибли на фронтах Великой Отечественной войны. К счастью, жертвы среди успевших проявить себя молодых учёных были минимальны — действовали законы, освобождавшие от призыва талантливую научную молодёжь.

3. После победоносного завершения войны научная жизнь в Москве стала быстро восстанавливаться. Интенсивное развитие математики в 1945 — в начале 50-ых гг. стало возможным, во-первых, благодаря мощному потенциалу Советской школы, который удалось сохранить в страшное военное лихолетье. Оно стало возможным также (это уже во-вторых) благодаря царившей в стране удивительной атмосфере, пронизанной ощущением Победы. Этим ощущением дышат доклады Юбилейной сессии АН СССР, посвящённой её 220-летию и прошедшей летом 1945 года. С докладами о достижениях отечественных математиков на сессии выступили Б. Н. Делоне, П. С. Александров, Бернштейн, Виноградов, Голубев, Петровский. В 1947 г. Московский университет и Московское математическое общество организовали ряд докладов, посвящённых достижениям в области математики, механики и астрономии за 30 лет советской власти. Этим достижениям был посвящён фундаментальный труд «Математика в СССР за 30 лет», увидевший свет в 1948 году [1]. Интенсивный рост математических исследований в СССР в послевоенные годы сопровождался и усилением внимания к исследованиям в области истории математики, в особенности, истории отечественной математики, обусловленного ростом самосознания советского математического сообщества. Так, в 1946 вышли в свет замечательные «Очерки по истории математики в России» Б. В. Гнеденко, а в 1948 Г. Ф. Рыбкиным и А. П. Юшкевичем было начато издание «Историко-математических исследований», значительное

место в которых составили публикации, посвящённые отечественной математике.

4. 50-е годы — время интенсивного развития математики в стране. Не будем забывать, что вторая половина этого десятилетия падает на эпоху оттепели, продолжившуюся в 60-е — время надежд и общего культурного подъёма. Центром развития математики оставалась Москва. Здесь в 50-е годы прошёл ряд всесоюзных конференций по различным вопросам математики, а летом 1956 года — 3-й Всесоюзный математический съезд, собравший более двух с половиной тысяч участников, продемонстрировавший небывалый расцвет математических исследований в самых различных направлениях. (Итог этим исследованиям подводил уже двухтомный труд «Математика в СССР за 40 лет», увидевший свет в 1959 году [2].) В работе съезда приняли участие 70 зарубежных гостей как из стран социалистического лагеря, так и из капиталистических стран, в частности, из Франции и США, а также Италии, Великобритании, ФРГ и др. В 1958 г. А. Н. Колмогоров отправился в длительную командировку в Париж, где в Институте Анри Пуанкаре выступил с серией лекций, посвящённых собственным результатам и достижениям своих учеников (по теории динамических систем, теории вероятностей, суперпозиции функций и теории приближений, теории вероятностей), полученным за последние 10 лет. Так начал подниматься пресловутый «железный занавес», на протяжении почти 20 лет отделявший советскую математику от математики Запада. Советская математика начала открываться миру во всём своём блеске. Её достижения уже нельзя было не заметить [3, 4]. В то же время выяснилось, что за годы вынужденной изоляции в ряде областей — в алгебраической теории чисел, в отдельных направлениях математической логики, гомологической алгебре, алгебраической геометрии и алгебраической топологии — наметилось существенное отставание советской математики. Однако амбиции советских математиков были уже таковы, что мириться с этим отставанием они не хотели. В алгебраической теории чисел, алгебраической геометрии и связанных с ними областями усилиями И. Р. Шафаревича и его учеников (Е. С. Голода, Ю. И. Манина, И. И. Пятецкого-Шапиро и др.) уже в 50-е годы советские математики начали выходить на передовые позиции. В области алгебраической топологии ярко засияла звезда ученика М. М. Постникова С. П. Новикова. Советская математика становилась мировым брендом. С этого времени на долгие десятилетия стало обычной практикой, что каждый молодой учёный, приступавший к самостоятельным математическим исследованиям, должен был учить русский язык.

5. Высшей точкой процесса признания советской математики в качестве одной из ведущих мировых школ стал Международный конгресс математиков, собравшийся в Москве в 1966 году. Этот конгресс

оказался самым многолюдным из всех, когда-либо до того собиравшихся — 4280 участников. Из 89 пленарных докладов, прочитанных на конгрессе, 30 были сделаны советскими учёными. Большинство из них составили московские математики [5]. Это были как маститые учёные, такие как И. М. Виноградов, А. Н. Тихонов, Н. В. Ефимов, так и совсем молодые тогда Д. В. Аносов, А. А. Кириллов, В. И. Арнольд, Ю. И. Манин, С. П. Новиков. И в 1967 году уже с полным правом советские математики могли заявить [6, с. 3]: «Советская математика занимает передовое место в мировой математической науке. Наши учёные имеют блестящие достижения во всех основных областях современной математики, а во многих из них результаты наших математиков играют определяющую роль... По широте охвата рядом с советской математикой можно поставить лишь математику США». Средоточием советской математики была Москва с механико-математическим факультетом Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова, с легендарной Стекловкой — Математическим Институтом им. В. А. Стеклова АН СССР, а также Московским математическим обществом, зачастую бравшим на себя роль общества всесоюзного.

Александр Дмитриевич Соловьёв, по случаю 90-летия которого устроена настоящая конференция, был активным участником этих событий — вначале как студент и аспирант Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, ученик прославленного А. О. Гельфонда, наконец, как профессор этого университета, выдающийся аналитик, один из создателей математической теории надёжности.

Литература

1. Математика в СССР за 30 лет (1917—1947) / Под редакцией А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. — М.: Физматгиз, 1959. — Т. 1—2.
3. История отечественной математики / Под ред. И. З. Штокало. — Киев, Наукова Думка, 1968. — Т. 3. 1970; Т. 4. Кн. 1—2.
4. Development of Mathematics. 1900—1950 / Ed. by J.-P. Pier. — Birkhäuser Verlag: Basel—Boston—Berlin, 1994.
5. Труды Международного Конгресса Математиков (Москва, 1968). — М.: Мир, 1968.
6. Боголюбов Н. Н., Мергелян С. Н. Советская математическая школа. — М.: Знание, 1967.

UDC 51(091)

Mathematics in Moscow in the torrent of the Soviet history

S. S. Demidov^{*†}, S. S. Petrova^{*}

** Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119234, Russia*

*† S. I. Vavilov Institut for the History of Science and Technology,
Baltiyskaya str., 14, Moscow, 125315, Russia*

We consider the development of mathematical research and mathematical institutes in Moscow in the context of the formation of the Soviet mathematical school in the period from the 30s to 60s of the 20th century.

Keywords: Soviet mathematical school, V.A. Steklov Mathematical Institute, Faculty of mechanics and mathematics of the Moscow University, Moscow mathematical society.

УДК 517.925.51

О свойствах системы уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах с учетом силы Кориолиса

М. К. Турцынский*

** Кафедра дифференциальных уравнений,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. Получены первые интегралы системы уравнений двумерной модели движения газа с учетом силы Кориолиса для движений с однородной деформацией. Найдены соответствия между положениями равновесия системы в эйлеровых и лагранжевых координатах. Показано, что задача может быть сведена дифференциальному уравнению первого порядка.

Ключевые слова: газовая динамика, лагранжевы координаты, вихревое движение, устойчивость положения равновесия.

1. Введение

Мы рассматриваем двумерную модель расширения газового облака в вакуум в лагранжевых координатах (т.е. в системе координат, связанной с частицами среды) в присутствии силы Кориолиса для специального класса движений с однородной деформацией. В статье [2] решается аналогичная задача при отсутствии вращения координатной системы. В [2] было показано, что эта модель может быть описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, для элементов матрицы 2×2 была найдена система первых интегралов. В некоторых случаях решение этой системы может быть найдено явно. Мы решаем ту же задачу, принимая во внимание силы Кориолиса.

2. Основная часть

Мы рассматриваем систему уравнений газовой динамики (2), задающую движение политропного Ньютоновского газа в эйлеровых координатах, на плотность $\varrho(t, x)$, скорость $\mathbf{u}(t, x)$ и давление $P(t, x)$ газа:

$$\varrho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathcal{L} \mathbf{u}) + \nabla P = 0,$$

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t P + (\mathbf{u} \cdot \nabla P) + \gamma P \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{L} = lL$, $L = (L_{ij})_{i,j=1..2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \in (1, 2]$ – показатель адиабаты, $l > 0$ – параметр Кориолиса; ∇ и div – градиент и дивергенция по пространственным переменным, $P = C\rho^\gamma$, где $C = \text{const}$.

Введем $\pi = P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, $c_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} C^{\frac{1}{\gamma}}$ и получим:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathcal{L} \mathbf{u} + c_0 \nabla \pi &= 0, \\ \partial_t \pi + (\nabla \pi \cdot \mathbf{u}) + (\gamma - 1) \pi \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем мы рассмотрим специальный класс решений системы (2), соответствующим движению с однородной деформацией. А именно, будем искать решения в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) &= Q\mathbf{x}; \quad Q = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}; \\ \pi(t, \mathbf{x}) &= A(t)x_1^2 + B(t)x_1x_2 + C(t)x_2^2 + K(t). \end{aligned}$$

Тогда они удовлетворяют следующей системе на матрицы Q и

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t) \\ \frac{1}{2}B(t) & C(t) \end{pmatrix}; \\ \dot{R} + RQ + Q^T R + (\gamma - 1) \operatorname{tr} Q R &= 0, \\ \dot{Q} + Q^2 + lLQ + 2c_0 R &= 0, \quad \dot{K} + 2(\gamma - 1) \operatorname{tr} Q K = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Систему (2) можно переписать в лагранжевых координатах, получим:

$$F''_{ik} + \frac{\partial U}{\partial F_{ik}} = \sum_j \mathcal{L}_{ij} F_{jk}, \quad (4)$$

где $F = (F_{ij})_{i,j=1..2}$ - матрица перехода от лагранжевых координат частицы газа x_i к эйлеровым w_i , т.е. $x_i = \sum_k F_{ik} w_k$, U - внутренняя энергия частиц газа, зависящая только от определителя матрицы F , т.е. $U = U(\det F)$, производные берутся по времени. В статье [2] показывается, что в случае $l = 0$ для системы (2) существуют три первых интеграла (2)-(2):

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} (F'_{ik})^2 + U = E; \quad F_{11}F'_{21} + F_{12}F'_{22} - F_{21}F'_{11} - F_{22}F'_{12} = J; \quad (5)$$

$$F_{11}F'_{12} + F_{21}F'_{22} - F_{12}F'_{11} - F_{22}F'_{21} = K. \quad (6)$$

Кроме того, если положить, что $U = U_0(\det F)^{-1}$ (это соответствует случаю $\gamma = 2$), то можно предъявить еще один первый интеграл G системы (2): $G = \sum_{i,k} F_{ik}^2 = 2Et^2 + At + B$. С использованием этих

тождеств систему (2) можно разрешить и выразить ответ через эллиптические интегралы.

В статье [1] показывается, что система (2) в эйлеровых координатах имеет единственную особую точку $a = d = 0, b = -c = b^*, A = C = A^* = \frac{b^*(b^*-l)}{2c_0}, B = 0$. Найдем соответствие между положением равновесия в эйлеровых и лагранжевых координатах. Запишем соотношение связи между эйлеровыми и лагранжевыми координатами: $\vec{w} = F^{-1}\vec{x}$, значит, $\vec{u} = \vec{x}' = F'\vec{w} = F'F^{-1}\vec{x} = Q\vec{x}$ (условие на наш

класс решений), где $F'F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b^* \\ -b^* & 0 \end{pmatrix}$ в положении равновесия и,

значит, $F = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b^*t & \sin b^*t \\ -\sin b^*t & \cos b^*t \end{pmatrix}$ в лагранжевых координатах.

В дальнейшем всюду предполагаем, что $l > 0$.

Утверждение 1. Система (2) обладает тремя первыми интегралами $\frac{1}{2} \sum_{i,k} (F'_{ik})^2 + U = E = \text{const}; J + \frac{1}{2} G = A = \text{const}; K - l \det F = B = \text{const}$. В предположении $U = U_0(\det F)^{-1}$ (это соответствует случаю $\gamma = 2$) существует еще один первый интеграл $G = \tilde{C}_1 \cos lt + \tilde{C}_2 \sin lt + \frac{4E+2lA}{l^2}$.

Доказательство утверждения 1 по сути сводится к дифференцированию первых интегралов и дальнейшему использованию системы (2). Чтобы получить интеграл энергии, достаточно умножить первое уравнение системы на F'_{11} , второе на F'_{12} , третье на F'_{21} , четвертое на F'_{22} и произвести почленное сложение уравнений. Чтобы получить второе соотношение, достаточно продифференцировать J и воспользоваться тем фактом, что в силу $U = U(\det F)$ выражение $-F_{11} \frac{\partial U}{\partial F_{21}} - F_{12} \frac{\partial U}{\partial F_{22}} + F_{21} \frac{\partial U}{\partial F_{11}} + F_{22} \frac{\partial U}{\partial F_{12}}$ равно 0. Из аналогичных соображений получается и третье из указанных соотношений.

Для получения четвертого соотношения достаточно дважды продифференцировать G и воспользоваться для U указанного вида теоремой Эйлера об однородных функциях. В результате приходим к уравнению: $G'' + l^2 G = 4E + 2lA$, решения которого записываются в виде $G(t) = \tilde{C}_1 \cos lt + \tilde{C}_2 \sin lt + \frac{4E+2lA}{l^2}$.

Мы выяснили таким образом, что для исследования системы (2) достаточно рассмотреть систему (2), составленную из 4 найденных первых интегралов, указанных в утверждении 1:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} (F'_{ik})^2 + \frac{U_0}{\det F} = E; \sum_{i,k} F_{ik}^2 = \tilde{C}_1 \cos lt + \tilde{C}_2 \sin lt + \frac{4E + 2lA}{l^2};$$

$$F_{11}F'_{12} + F_{21}F'_{22} - F_{12}F'_{11} - F_{22}F'_{21} - l \det F = B; \quad (7)$$

$$F_{11}F'_{21} + F_{12}F'_{22} - F_{21}F'_{11} - F_{22}F'_{12} + \frac{l}{2} \sum_{i,k} F_{ik}^2 = A.$$

Утверждение 2. Замена вида $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s \cos u & 0 \\ 0 & s \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$ приводит систему (2) к исследованию одного дифференциального уравнения первого порядка на функцию u .

Доказательство утверждения 2. Несложно проверить, что после указанной замены (см. [3]) мы приходим к системе (2):

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{2}((u')^2 + (v')^2 + 2 \sin(2u)v'w' + (w')^2) + \frac{(s')^2}{2} + \frac{2U_0}{s^2 \sin 2u} &= E; \\ v' + \frac{l}{2} + \sin(2u)w' &= \frac{A}{s^2}; \quad \sin(2u)(v' + \frac{l}{2}) + w' = -\frac{B}{s^2}; \\ s^2 &= \tilde{C}_1 \cos lt + \tilde{C}_2 \sin lt + \frac{4E + 2lA}{l^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, s^2 явно находится из последнего соотношения. Разрешая пару уравнений на производные v и w , можно выразить v' и w' через u и $s(t)$. Подставляя указанные соотношения в первое уравнение, получаем требуемое дифференциальное уравнение первого порядка $u'(t) = \pm \sqrt{f(u, t)}$, где $f(u, t) = \frac{2E - (s')^2 + Al}{s^2} - \frac{l^2}{4} - \frac{4U_0}{s^4 \sin 2u} - \frac{A^2 + B^2 + 2AB \sin 2u}{s^4 \cos^2 2u}$.

Утверждение 3. В положении равновесия $\tilde{u}(t) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2B}{(2b^* - l)\tilde{s}^2(t)}$, где $\tilde{s}^2(t) = \tilde{C}_1^* \cos lt + \frac{4E + 2lA}{l^2}$ и $\tilde{C}_1^* = \frac{4Ab^*(l - b^*)}{l^2(l - 2b^*)} + \frac{4U_0(l - 2b^*)}{Bl^2}$.

Отметим основные моменты **доказательства утверждения 3**. В самом деле, считая определитель F в положении равновесия и по определению (через замену, см. утверждение 2), получим: $\det F = \frac{1}{2} \tilde{s}^2 \sin 2\tilde{u} = C_1 C_4 - C_2 C_3 = C$. Тем самым показано, что $\tilde{u} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2C}{\tilde{s}^2}$.

Выразим константу \tilde{C}_2 через начальные условия $F_{ij}(0)$ и $F'_{ij}(0)$, получим $\tilde{C}_2 = \frac{2}{l} \sum_{i,j} F_{ij}(0)F'_{ij}(0)$. Подставляя теперь связь между начальными условиями в положении равновесия $F'_{11}(0) = b^*F_{21}(0)$, $F'_{21}(0) = b^*F_{22}(0)$, $F'_{21}(0) = -b^*F_{11}(0)$, $F'_{22}(0) = -b^*F_{12}(0)$ в выражение для \tilde{C}_2 , получим $\tilde{C}_2^* = 0$.

Аналогично, подстановкой начальных условий в первый интеграл B , проверяется, что $B = (2b^* - l)C$, откуда получаем выражение для константы C , отмеченное в утверждении.

3. Заключение

Предъявлена система первых интегралов для модели, задающей движение газа в лагранжевых координатах, в случае действия силы Кориолиса. Эта система интегралов позволяет значительно упростить решение системы, система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению первого порядка.

Литература

1. *Olga S. Rozanova O. S., Yu J.-L., Turzynsky M. K., Hu Ch.-K.* Nonlinear stability of two-dimensional axisymmetric vortices in compressible inviscid medium in a rotating reference frame // arXiv:1511.07039.
2. *Anisimov S. I., Lysikov Yu. I.* Expansion of a gas cloud in vacuum // PMM — 1970. — Vol. 34, no. 5. — P. 926–929.
3. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — Наука, 1980.

UDC 517.925.51

On the properties of the system of gas dynamics equations in Lagrangian coordinates with Coriolis force

M. K. Turzynsky*

** Department of Differential Equations,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

We obtain first integrals of the system of equations of two-dimensional model of the gas motion taking into account the Coriolis force for motion with uniform deformation. We find correspondence between equilibria in Eulerian and Lagrangian coordinates. It is shown that the problem can be reduced to one differential equation of first order.

Keywords: gas dynamics, Lagrangian coordinates, vortex motion, stability of equilibria.

УДК 519.248: 62–192

Критерии типа Колмогорова – Смирнова проверки гипотез Кокса – Лемана в случае прогрессивно цензурированных выборок — о возможности использования оценок Каплана – Мейера в статистиках критериев

В. И. Тимонин², Н. Д. Тянникова²

² *Кафедра высшей математики,
Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана,
ул. 2-ая Бауманская, д.5, стр.1, Москва, Россия, 105005*

Аннотация. В работе показана возможность применения оценок Каплана – Мейера при проверке гипотез однородности (в общем случае — гипотез Кокса – Лемана) статистиками типа Колмогорова – Смирнова, если выборки являются прогрессивно цензурированными. Доказано, что распределение статистик при справедливости проверяемых гипотез не зависит от распределения элементов выборок. Разработан метод вычисления точных распределений статистик при справедливости проверяемых гипотез. Для частного случая получен критерий типа Колмогорова – Смирнова проверки гипотез Кокса – Лемана о распределении наработок элементов сложных систем. Он основан на сравнении оценок Каплана – Мейера функции надежности элементов систем по результатам испытаний в нескольких режимах последовательных (или параллельных) систем различной кратности. Показано, что предельное распределение его статистики в случае двух выборок является классическим распределением Колмогорова – Смирнова, в случае нескольких выборок — может быть приближено распределением Кифера – Гихмана. Проведено сравнение точных и асимптотических квантилей распределений статистик. Показано, что асимптотическим распределением можно пользоваться, начиная с объемов выборок порядка 70 – 80 единиц.

Ключевые слова: прогрессивное цензурирование, критерий типа Колмогорова – Смирнова, гипотезы Кокса – Лемана, оценка Каплана – Мейера.

1. Введение

В работе используется терминология теории надежности, которая наиболее удобна для изложения результатов статьи.

Пусть в некотором режиме испытывается N изделий. Механизм прогрессивного цензурирования описывается следующим образом [1,2]. При очередном i -м отказе ξ_i ($\xi_{i-1} < \xi_i$, $i = \bar{1}, s$) с испытаний снимаются (цензурируются) r_i случайным образом отобранных изделий. Уточним, что параметры r_i, s известны заранее и не являются случайными величинами. В этом случае непараметрическая оценка Каплана –

Мейера функции надежности $P_\xi(t) = P(\xi > t)$ наработок до отказа изделий имеет вид [3]

$$\widehat{P}_{\text{KM}}(t) = \prod_{\xi_i < t} \left(1 - \frac{1}{R_i}\right), R_i = N - \sum_{j=1}^{i-1} (r_j + 1), i = \overline{2, s-1}, R_1 = N;$$

$$R_s = 1 \text{ при } t > \xi_s; \widehat{P}_{\text{KM}}(t) = 1 \text{ при } t < \xi_1.$$

R_i называется объемом множества риска перед отказом ξ_i .

Частным случаем рассмотренной схемы являются испытания n последовательных систем, составленных из одного и того же количества m одинаковых элементов, $r_i = r = m - 1, N = nm$. Число m будем называть кратностью системы.

2. Основная часть

Обозначим $\lambda_i(t), i = \overline{1, q}$ — интенсивность отказов элемента в режиме эксплуатации (испытаний) ε_i . Требуется проверить гипотезу Кокса

$$H_0^1 : k_1 \lambda_1(t) = k_2 \lambda_2(t) = \dots = k_q \lambda_q(t), \quad (1)$$

где $k_i \geq 1, i = \overline{1, q}$ — известные фиксированные числа, вид $\lambda_i(t)$ полностью неизвестен. Без ограничения общности будем считать, что $k_1 = 1, k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_q$. В дальнейшем для уменьшения объема изложения описывается случай $q = 2$. В этом случае гипотеза (2) имеет вид

$$H_0 : \lambda_1(t) = k \lambda_2(t) \Leftrightarrow P_1(t) = (P_2(t))^k. \quad (2)$$

Общий случай дан ссылками на работы авторов [4,5]. Гипотеза (2) проверяется по двум прогрессивно цензурированным выборкам из наработок до отказа элементов в последовательных системах.

Испытываются n_1 систем кратности m_1 в режиме ε_1 и n_2 систем кратности m_2 в режиме ε_2 . При отказе одного из элементов системы, оставшиеся $(m_j - 1), j = 1, 2$ наработки до отказа элементов системы цензурируются. Тогда имеются две выборки $\Theta_1 = (\theta_1^1, \dots, \theta_1^{n_1}), \Theta_2 = (\theta_2^1, \dots, \theta_2^{n_2})$ где $\theta_i^i = \min\{\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_{m_1}^i\}, i = \overline{1, n_1}, \theta_2^j = \min\{\xi_1^j, \xi_2^j, \dots, \xi_{m_2}^j\}, j = \overline{1, n_2}$ — минимумы наработок до отказа элементов систем, работающих в режимах ε_1 и ε_2 соответственно.

Для проверки гипотезы (2) предлагается статистика вида

$$T = C \max_t \frac{\left(k_2(1-\widehat{F}^1)^{\frac{1}{m_1} + k_1(1-\widehat{F}^2)^{\frac{k}{m_2}}}\right)^{\frac{m_2}{k} - 1}}{k_2 \left(k_2(1-\widehat{F}^1)^{\frac{1}{m_1} + k_1(1-\widehat{F}^2)^{\frac{k}{m_2}}}\right)^{\frac{m_2}{k} - 1} + k_1} \cdot \left| \widehat{P}_{\theta_1}(t) - \left(\widehat{P}_{\theta_2}(t)\right)^k \right|. \quad (3)$$

Здесь $C = \frac{m_1 m_2 \sqrt{\rho n_2}}{\sqrt{k^2 \rho m_1^2 + m_2^2}}$, $\hat{P}_{\theta_1}(t)$, $\hat{P}_{\theta_2}(t)$ — оценки Каплана – Мейера функций надежности элементов систем первой и второй выборок; $F^1(t) = 1 - (P_1(t))^{m_1}$, $F^2(t) = 1 - (P_2(t))^{m_2}$ — функции распределения наработок до отказа систем, $\hat{F}^1(t)$, $\hat{F}^2(t)$ — эмпирические функции распределения выборок Θ_1, Θ_2 , $\rho = \frac{n_1}{n_2}$, $k_2 = \frac{m_2^2}{\rho m_1^2 k^2 + m_2^2}$, $k_1 = 1 - k_2$.

Статистика (2) при $m_1 = m_2 = k = 1$ совпадает с классической статистикой Смирнова проверки однородности двух нецензурированных выборок.

Теорема 1. Точные вероятности $P\{T < h\}$ равны величине π_{n_1, n_2}^h , которую можно получить повторным применением соотношения

$$\pi_{ij}^h = \begin{cases} 1, \text{ если } i = 0, j = 0; \\ \left(\frac{m_2(n_2 - j + 1)}{km_1(n_1 - i) + m_2(n_2 - j + 1)} \pi_{i, j-1}^h \right) \cdot \chi_{ij}^h, \quad i = 0, j = \overline{1, n_2}; \\ \left(\frac{km_1(n_1 - i + 1)}{km_1(n_1 - i + 1) + m_2(n_2 - j)} \pi_{i-1, j}^h \right) \cdot \chi_{ij}^h, \quad i = \overline{1, n_1}, j = 0; \\ \left(\frac{km_1(n_1 - i + 1)}{km_1(n_1 - i + 1) + m_2(n_2 - j)} \pi_{i-1, j}^h + \frac{m_2(n_2 - j + 1)}{km_1(n_1 - i) + m_2(n_2 - j + 1)} \pi_{i, j-1}^h \right) \cdot \chi_{ij}^h, \quad i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}. \end{cases}$$

$$\chi_{ij}^h = \begin{cases} 1, & t_{ij} < h; \\ 0, & t_{ij} \geq h \end{cases};$$

$$t_{ij} = C \cdot \frac{\left(k_2 \left(1 - \frac{i}{n_1} \right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1 \left(1 - \frac{j}{n_2} \right)^{\frac{k}{m_2}} \right)^{\frac{m_2}{k} - 1}}{k_2 \left(k_2 \left(1 - \frac{i}{n_1} \right)^{\frac{1}{m_1}} + k_1 \left(1 - \frac{j}{n_2} \right)^{\frac{k}{m_2}} \right)^{\frac{m_2}{k} - m_1} + k_1} \cdot \Delta_{ij};$$

$$\Delta_{ij} = \left| \prod_{s_1=1}^i \left(1 - \frac{1}{m_1(n_1 - s_1 + 1)} \right) - \left(\prod_{s_2=1}^j \left(1 - \frac{1}{m_2(n_2 - s_2 + 1)} \right) \right)^k \right|.$$

Теорема 2. Асимптотическое распределение T при справедливости (2) является распределением Колмогорова – Смирнова с функцией

распределения

$$K(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

В Таблице 1 приведены рассчитанные точные вероятности $P\{T < h\}$ и их предельные значения для некоторых значений n_1, n_2, k и $m_1 = m_2 = 2$ и квантилей $h = 1, 22; 1, 36; 1, 63$.

Таблица 1
Точные и предельные вероятности $P\{T < h\}$ при $m_1 = 2, m_2 = 2$

$n_1 = n_2$	$P\{T < h\}$					
	$h = 1, 22$		$h = 1, 36$		$h = 1, 63$	
	$k = 1, 5$	$k = 3$	$k = 1, 5$	$k = 3$	$k = 1, 5$	$k = 3$
100	0,9108	0,8916	0,9572	0,9442	0,9913	0,9864
700	0,9041	0,9028	0,9536	0,9530	0,9908	0,9906
1100	0,9029	0,9021	0,9530	0,9528	0,9907	0,9906
1500	0,9020	0,9020	0,9527	0,9525	0,9906	0,9906
∞	0,8981	0,8981	0,9505	0,9505	0,9901	0,9901

В работе [5] для аналогичного вида испытаний систем в q режимах предложен критерий типа Кифера – Гихмана проверки (2). Предельное распределение его статистики может быть приближено распределением статистики Кифера для проверки однородности q полных выборок, точные распределения вычисляются согласно несложному обобщению приведенного в работе алгоритма.

3. Заключение

По результатам испытаний в различных режимах нескольких выборок последовательных систем различной кратности, составленных из однотипных элементов, решена задача проверки непараметрических гипотез (Кокса – Лемана) о распределениях наработок элементов. Для этого разработаны критерии типа Колмогорова – Смирнова и Кифера – Гихмана. Предложен общий метод вычисления точных и асимптотических распределений статистик.

Литература

1. *Balakrishnan N., Cramer E. The Art of Progressive Censoring. Applications to Reliability and Quality.* — New York, Springer, 2014.

2. *Bordes L.* Non-parametric estimation under progressive censoring // *Journal of Statistical Planning and Inference.* — 2004. — Vol. 119, no. 1. — P. 171–189.
3. *Ng N., Balakrishnan N.* Precedence-type test based on Kaplan-Meier estimator of cumulative distribution function // *Journal of Statistical Planning and Inference.* — 2010. — Vol. 140, no. 8. — P. 2295–2311.
4. *Тимонин В. И., Тянникова Н. Д.* Прогрессивное цензурирование — проверка однородности нескольких независимых выборок // *Физические основы приборостроения.* — 2016. — Т. 5, No. 2 (19). — С. 80–87.
5. *Тимонин В. И., Тянникова Н. Д.* Проверка справедливости модели Кокса по нескольким прогрессивно цензурированным выборкам // *Математическое моделирование и численные методы.* — 2017. — No. 1 (13). — С. 102–117.

UDC 519.248: 62–192

The Kolmogorov – Smirnov type tests for the Lehmann – Cox hypotheses in the case of progressively censored samples — about the possibility to use the Kaplan – Meier estimates in test statistics

V. I. Timonin², N. D. Tyannikova²

² *Department of Higher Mathematics,
Bauman Moscow State Technical University,
ul. Baumanskaya 2-ya, 5, Moscow, 105005, Russia*

The paper shows the possibility of using the Kaplan – Meier estimates to test homogeneity hypotheses (in general case — the Lehmann – Cox hypotheses) by the Kolmogorov – Smirnov statistics, when the samples are progressive censored. It is proved that under justice of hypotheses the statistics distribution does not depend on the sample elements distribution. A method for calculating the exact statistics distribution is developed. For the particular case the Kolmogorov – Smirnov type test for the Cox – Lehmann hypotheses about the complex systems elements distribution is presented. It is based on a comparison of the Kaplan – Meier estimates of the system elements reliability function according to the results of the experimental testing of different multiplicity serial (or parallel) systems in several modes. It is shown that when there are two samples the asymptotic distribution of its statistic is a classical Kolmogorov – Smirnov distribution, in the case of multiple samples, its distribution can be approximated by the distribution of the Kiefer – Gihman. The exact and asymptotic quintiles of the statistics distributions were compared. It is shown that

the asymptotic distribution can be used since the sample sizes of the order of 70 – 80 units.

Keywords: progressive censoring, the Kolmogorov – Smirnov type test, the Cox – Lehmann hypotheses, the Kaplan – Meier estimates.

UDC 519.21

Steady state for the critical branching random walk with the general number of offsprings

E. Chernousova*, S. Molchanov^{†‡}

* *Department of Mathematical Basics of Control,
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia*

[†] *Laboratory of Stochastic Analysis and its Applications,
Higher School of Economics,
Shabolovka str. 28/1, Moscow, Russia*

[‡] *Department of Mathematics and Statistics,
University of North Carolina,
Charlotte, NC 28223, USA*

Abstract. We prove the existence of steady state for branching random walk with arbitrary number of offsprings.

Keywords: branching random walk, steady state, Carleman's conditions.

1. Introduction

This paper is natural continuation of the publication [1], where was proposed the new approach to the problem of the steady state for the critical contact process. The very fact of the existence of such state was not new (starting from the works of the German group [2], [3], based on the ideas by R. Dobrushin, see also papers [4] by Yu. Kondratiev with collaborators). Usually the proof of the convergence to the steady state was based on the forward Kolmogorov equation for the correlation functions, but in [?] the analysis was based on the backward equations.

To simplify the calculations all papers mentioned above included assumption on binary birth process: each particle either dies at the time interval $(t, t + dt)$ with probability $\mu dt + o(dt)$ or splits into two particles (or, one can say, the parental particle produces one offspring) with probability $\beta dt + o(dt)$. The criticality corresponds to the equality $\mu = \beta$.

The offsprings either can start its evolution from the position of the parental particle or can make the random jump with some distribution. The situation when there is no migration of the particles but only the random jumps of offsprings (seeds) corresponds to the 'forest' model. Note that in this situation the assumption on the binary splitting looks especially artificially.

We'll consider the general model of the branching random walk on \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, where the evolution of the particles include the migration, death with some mortality rate μ , the splitting with arbitrary member of offsprings (seeds) and their distribution around parental particle with some law.

2. Description of the model. Main results

We use $N(t, y)$ to designate particle field, that is, global population, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{Z}^d$. $n(t, y; x)$ designate a subpopulation generated by a single initial particle at $x \in \mathbb{Z}^d$ at $t = 0$. The subpopulations are independent and

$$N(t, y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} n(t, y; x), N(0, y) \equiv 1.$$

The evolution of each subpopulation includes random walk of each particle with generator:

$$\kappa \mathcal{L}_a \psi = \kappa \sum_{v \neq 0} a(v) [\psi(x + v) - \psi(x)],$$

where $a(v) = a(-v)$ (symmetry) and $\sum_{v \in \mathbb{Z}^d, v \neq 0} a(v) = 1$ (normalization). It also includes the reaction of annihilation or death with rate μ and splitting of the particle into l particles with rates β_l where $l \geq 2$. In such splitting, one offspring (it can be considered as parent particle) remains at the same point and others $l - 1$ particles jump independently from x to $x + v$ with distribution $b(v)$ where $b(v) = b(-v)$ and $\sum_{v \in \mathbb{Z}^d} b(v) = 1$.

Let's introduce the generation function of individual subpopulation $u_z(t, x; y) = \mathbb{E} z^{n(t, y; x)}$. Note the reversal of the start x and destination y in this notation, because we look at this function as the function of t and x variable. For every fixed $y \in \mathbb{Z}^d$ $u_z(t, x; y)$ satisfies the backward Kolmogorov equations:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \kappa \mathcal{L}_a u_z - \left(\mu + \sum_{l=2}^{\infty} \beta_l \right) u_z + \mu + u_z \sum_{l=2}^{\infty} \beta_l (u_z * b)^{l-1} \quad (1)$$

with initial condition: $u_z(0, x; y) = z$ if $x = y$ and $u_z(0, x; y) = 1$ else. Here we designate

$$u_z * b = \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} u_z(t, x + v; y) b(v).$$

From this we can lead the equation for factorial moments

$$m_k(t, x; y) = \mathbb{E} [n(n-1) \cdots (n-k+1)] = \left. \frac{\partial^k u_z}{\partial z^k} \right|_{z=1} (t, x; y),$$

where $n = n(t, y; x)$, $k = 1, 2, \dots$

For the first moment we have:

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} = \left(\kappa \mathcal{L}_a + \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\beta_l \mathcal{L}_b \right) m_1 + \left(\sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\beta_l - \mu \right) m_1$$

$$m_1(0, x; y) = \delta(x - y).$$

In the case $\mu = \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\beta_l$ (which is critical) this equation has a simple form:

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} = \left(\kappa \mathcal{L}_a + \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\beta_l \mathcal{L}_b \right) m_1$$

$$m_1(0, x; y) = \delta(x - y)$$

with fundamental solution $m_1(t, x; y) = p(t, x, y)$, where $p(t, x, y)$ is a conditional probability the particle started from $x \in \mathbb{Z}^d$ during time $t > 0$ go to $y \in \mathbb{Z}^d$ when random walk defines symmetric isotropic generator $\kappa \mathcal{L}_a + \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\beta_l \mathcal{L}_b$.

As is very well known a critical Galton-Watson process,

$$\nu_x(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n(t, y; x)$$

for each $x \in \mathbb{R}^d$, degenerates almost sure with rate $1 - \frac{2}{t \sum_{l=2}^{\infty} l(l-1)\beta_l}$ and with the expected number of particles at $t > 0$:

$$\mathbb{E} \nu_x(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} n(t, y; x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, y) = 1.$$

More accurate (see [5]) the limit law for nondegenerated population has a form:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \frac{2\nu_x(t)}{t \sum_{l=2}^{\infty} l(l-1)\beta_l} > a \mid \nu_x(t) > 0 \right\} = e^{-a}.$$

That is if a population does not vanish then a total number of particles is large.

Our goal is to prove the existence of a stationary limiting distribution in the critical case. For these we will show that the moments meet Carleman conditions, thus, that the moments are sufficient to establish a unique limiting distribution.

In the case $\mu = \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\beta_l$ the equation for generation function (2) has a form:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \kappa \mathcal{L}_a u_z + \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)\beta_l - \left(\sum_{l=2}^{\infty} l\beta_l \right) u_z + u_z \sum_{l=2}^{\infty} \beta_l (u_z * b)^{l-1}$$

For all $k \geq 2$ we can lead the equations for the k -th factorial moments:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_k}{\partial t} &= \left(\kappa \mathcal{L}_a + \sum_{l=2}^{\infty} (l-1) \beta_l \mathcal{L}_b \right) m_k + \\ &\sum_{l=2}^{\infty} \beta_l \sum_{n=1}^{k-1} \frac{m_n}{n!} \sum_{\substack{\sum_{s=1}^{l-1} j_s = k-n, \\ j_s \geq 0}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_l!} (m_{j_1} * b) \cdots (m_{j_{l-1}} * b) + \\ &\sum_{l=2}^{\infty} \beta_l \sum_{\substack{\sum_{s=1}^{l-1} j_s = k, \\ 0 \leq j_s \leq k-1}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_l!} (m_{j_1} * b) \cdots (m_{j_{l-1}} * b) \end{aligned}$$

where it is assumed that $m_0(t, x; y) \equiv 1$ and the initial condition $m_k(0, x; y) = 0$ for $k \geq 2$.

Next without detracton from generality it is assumed that $y = 0$. We will investigate the limiting distribution of the process $N(t, 0)$.

Lemma 1. If for all $l \geq 2$ $\beta_l \leq \beta \delta^l$ for some $\beta > 0$, $\delta \in (0, 1)$, then $m_k(t, x; 0) \leq k! B^{k-1} D_k p(t, x, 0)$ for all $k \geq 1$ where

$$B = \max \left\{ 1, \beta \int_0^{\infty} p(s, 0, 0) ds \right\}$$

and the sequence D_k is recurrently defined as: $D_1 = 1$, for $k \geq 2$

$$\begin{aligned} D_k &= \sum_{l=2}^{\infty} \delta^l \sum_{n=1}^{k-1} D_n \sum_{i=1}^{l-1} \binom{l-1}{i} \sum_{\substack{\sum_{s=1}^i j_s = k-n, \\ j_s \geq 1}} D_{j_1} \cdots D_{j_i} + \\ &\sum_{l=2}^{\infty} \delta^l \sum_{i=2}^{l-1} \binom{l-1}{i} \sum_{\substack{\sum_{s=1}^i j_s = k, \\ j_s \geq 1}} D_{j_1} \cdots D_{j_i}. \end{aligned}$$

Lemma 2. The sequence D_k increases not faster than geometrically.

Corollary. Let's for all $l \geq 2$ it holds the upper bound $\beta_l \leq \beta \delta^l$ for some $\beta > 0$, $\delta \in (0, 1)$. Then $m_k(t, x; 0) \leq c^k k! p(t, x, 0)$ for all $k \geq 1$

To make sure that Carleman's condition is hold we note that due to independence of subpopulations the cumulants κ_k of all population $N(t, y)$ is the sum of cumulants of $n(t, x, y)$ (remind that k -th cumulant of the discrete random value X defines as

$$\kappa_k(X) = \left. \frac{d^k \ln \mathbb{E} z^X}{dz^k} \right|_{z=1},$$

i.e. Taylor expansion of the log-generation function in the neighborhood of $z = 1$ can be expressed as

$$\ln \mathbb{E}z^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\kappa_k(X)}{k!} (z - 1)^k.$$

Moreover we can evaluate the cumulants from factorial moments and moments from cumulants.

The main result is

$$N(t, \cdot) \xrightarrow{Law} N(\infty, \cdot), \quad t \rightarrow \infty,$$

i.e. the probability distribution of the population converges to a limiting or stationary distribution.

3. Conclusions

It is considered branching random walk in \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, satisfying some conditions which mean zero drift of random migration process of particles and symmetric spreading of offsprings about parental particle. We state that if the initial population consists in the single particle at each point of \mathbb{Z}^d , the rate of mortality coincides with average numbers of new particles per time (critical case) and the tail of distribution of numbers of offsprings decreases at least geometrically then the probability distribution of the population converges to a limiting or stationary distribution.

Acknowledgments

The study has been funded by the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01098)

References

1. *Molchanov S., Whitmeyer J.* Stationary distributions in KPP-type models with an infinite number of particles // *Math. Popul. Stud.* (Forthcoming)
2. *Debes H., Kerstan J., Liemant A., Matthes K.* Verallgemeinerungen eines Satzes von Dobruschin. I // *Math. Nachr.* — 1970. — Vol. 47. — P. 183–244.
3. *Liemant A.* Invariante zufällige Punktfolgen // *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena* 19. — 1969. — P. 361–372.
4. *Kondratiev Y., Kutovyi O., Pirogov S.* Correlation functions and invariant measures in continuous contact model // *Inf. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* — 2008. — Vol. 11. — P. 231–258.
5. *Karlin S.* A First course in stochastic processes. — Academic Press, New York, London, 1968.

UDC 519.21

Branching Random Walks with Immigration

D. Han*, Yu. Makarova[‡], S. Molchanov*[†], E. Yarovaya[‡]

* *Department of Mathematics and Statistics,
University of North Carolina at Charlotte,
Charlotte, NC 28223, USA*

[†] *National Research University, Higher School of Economics,
Mysnitskaya str., Moscow, 101000, Russia*

[‡] *Department of Probability Theory,
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. The note contains several results on the existence of limits for the first two moments of the popular model in the population dynamics: branching random walk on multidimensional lattices with immigration and infinite number of initial particles. Additional result concerns the Lyapunov stability of the moments with respect to small perturbations of the parameters of the model such as mortality rate, the rate of the birth of $(k - 1)$ offspring and, finally, the immigration rate.

Keywords: random walks on multidimensional lattices, branching processes with continuous time, contact model, immigration, correlation functions.

1. Introduction

The models we will study below give good description of the demographic situations in such European countries as Germany, Sweden, Denmark etc. However we will use the neutral terminology: particle, reactions, transformations.

2. Main section

The subject of our study is the particle field $n(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$. We assume that $n(0, x)$ are independent identically distributed random variables with the finite exponential moment (say, Poissonian distribution with the parameter $\lambda > 0$). The evolution of the field $n(t, x)$, $t > 0$ includes several independent ingredients.

Migration (random walk). Each particle at the moment $t > 0$ in the point $x \in \mathbb{Z}^d$ spends in this point the random time τ up to the first transformation, at the moment $(t + \tau + 0)$ there are several options:

1. First it can be the jump $x \rightarrow x + z$ with probability $a(z)$. We assume that $a(z) = a(-z)$ and the intensity of the jumps (diffusivity) equals $\kappa > 0$. The generator of the corresponding (underlying) random walk

has the form

$$(\mathcal{L}\psi)(x) = \kappa \sum_{z \neq 0} [\psi(x+z) - \psi(x)]a(z), \quad a(z) = a(-z), \quad \sum_{z \neq 0} a(z) = 1$$

2. Secondly, each particle can die, the **mortality rate** we denote $\mu > 0$ (i.e during time $(t, t+dt)$ particle annihilate with the probability μdt).
3. Each particle (independent on others) can produce n new particles (i.e, if you wish, the parental particle produces $n-1$ new particles and still stays in the point $x \in \mathbb{Z}^d$). Let β_n , $n \geq 0$ is the intensity of the transformation for the single parental particle into n particles. Let's introduce the corresponding **infinitesimal generating function**

$$F(z) = \mu - (\mu + \sum_{n \geq 2} \beta_n)z + \sum_{n \geq 2} \beta_n z^n$$

We will assume that $F(z)$ is an analytic function in the circle $|z| < 1 + \delta$, $\delta > 0$ (i.e the intensities β_n as the functions of n are exponentially decreasing).

We assume that new particles (offsprings) start their evolution from the same birth place independently on others (like in classical Kolmogorov-Petrovski-Piskunov paper [1])

4. The new moment in our model is the **immigration**. For any $x \in \mathbb{Z}^d$ and time interval $(t, t+dt)$ the new particle (independently on the $n(t, x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$) can appear in the site x with probability kdt (k is the rate of immigration).

In the usual case of branching random walk (the contact model in the terminology of [2]) there is no immigration ($k \equiv 0$) and $\beta_2 = \mu$ (critical case). Then under condition of transience of the random walk with generator \mathcal{L} (see [4]) there is the limiting state (steady state) $n(\infty, x)$ for $t \rightarrow \infty$. The study of this state can be based on the direct Kolmogorov equations like in [2] or on the backward equations (which are much simpler), see [4].

But in the presence of the immigration we have to use forward Kolmogorov equations. Their derivation is based on the representations:

$$n(t+dt, x) = n(t, x) + \xi(dt, x)$$

where $\xi(dt, x)$ is the random variable

$$\xi(dt, x) = \begin{cases} n - 1, & \text{with probability } \beta_n n(t, x) dt, n \geq 3 \\ 1, & \text{with probability } \beta_2 n(t, x) dt + k dt + \kappa \sum_{z \neq 0} a(-z) \times \\ & \times n(t, x + z) dt \\ -1, & \text{with probability } \mu n(t, x) dt + \kappa n(t, x) dt \\ 0, & \text{with probability } 1 - \sum_{n \geq 3} \beta_n n(t, x) dt - \\ & - (\beta_2 + \mu + \kappa) n(t, x) dt - k dt - \\ & - \sum_{z \neq 0} a(-z) n(t, x + z) dt \end{cases}$$

Applying the method of the conditional expectations we can derive now the equations for the first two moments $m_1(t, x) = \mathbf{E}n(t, x)$, $m_2(t, x, y) = \mathbf{E}n(t, x)n(t, y)$.

Equation for $m_1(t, x)$ has the form

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} = \mathcal{L}m_1 + (\beta - \mu)m_1 + k, \quad m_1(0, x) = \mathbf{E}n(0, x) \equiv a > 0$$

Here $\beta = \sum_{n \geq 2} (n - 1)\beta_n$. Exactly the same equations cover the case when $\beta = \beta(x)$, $\mu = \mu(x)$, $k = k(x)$ are the bounded functions on the lattice \mathbb{Z}^d .

In the case of constant coefficients β, μ, k the equation for the first moment can be solved:

$$m_1(t, x) = \frac{k}{\beta - \mu} (e^{(\beta - \mu)t} - 1) + e^{(\beta - \mu)t} a.$$

Thus $m_1(t, x) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ for $\beta \geq \mu, k > 0$. And for $\mu > \beta$

$$m_1(t, x) \rightarrow \frac{k}{\mu - \beta}, \quad t \rightarrow \infty$$

independently on the initial conditions.

The next result presents the Lyapunov stability of the first moment.

Theorem 1 *Let coefficients $\beta_n(x), n \geq 2, \mu(x), k(x), x \in \mathbb{Z}^d$ are bounded and $\mu(x) - \beta(x) \geq \delta_1 > 0, k(x) \geq \delta_2 > 0$. Then for the bounded initial condition there exists*

$$m_1(\infty, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_1(t, x)$$

Let's stress that in the co-called contact model (see [1], [4]) the limiting state exists only in the critical case $\mu(x) = \beta(x)$ and this state is unstable

with respect of any sufficiently small in L^∞ -norm perturbations (including random perturbations) of the parameteres of the model.

The equation for the second correlation function

$$m_2(t, x, y) = \mathbb{E}n(t, x)n(t, y)$$

is more complex:

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = \kappa \mathcal{L}_x m_2 + \kappa \mathcal{L}_y m_2 + 2(\beta - \mu)m_2 + 2\kappa a(x - y)\Phi(m_1) + \delta(x - y)\Psi(m_1)$$

The functions $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ depend linearly on the first moment, i.e can be considered as known ones.

The equation for $m_2(t, x, y)$ and the initial data (due to translation invariance of the problem) can be simplified since $m_2(t, x, y) = f(t, x - y)$ and for $z = x - y$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\mathcal{L}_z f + 2(\beta - \mu)f + s(t, z)$$

$s(t, z)$ is the known function (related to the first moment $m_1(t, z)$). If $\mu > \beta$ and $k > 0$ the second moment has a limit if $t \rightarrow \infty$ and

$$f(\infty, z) = \left(\frac{k}{\mu - \beta} \right)^2 + \tilde{f}(z)$$

and the limiting correlation function $\tilde{f}(z)$ is exponentially decreasing.

In the case of the binary branching $\beta = \beta_2$ (i.e $\beta_n = 0, n \geq 3$) equations for the second moment studied in [3].

We already have expression for the limit of the third correlation function $m_3(t, x_1, x_2, x_3) = \mathbb{E}n(t, x_1)n(t, x_2)n(t, x_3)$ and can prove the convergence together with asymptotic formulas for

$$m_3(\infty, x_1, x_2, x_3) = \tilde{m}(x_1, x_2, x_3).$$

3. Conclusions

The proof of all results, formulated above and their developments (including the study of the higher correlation functions and the existence uniqueness theorem for the steady state) will be published in one of the applied probability journals.

Acknowledgments

The research of the authors † is partly supported by RFBR, grant 17-01-00468.

References

1. *Kolmogorov A. N., Petrovskii I. G., Piskunov N. S.* A study of the diffusion equation with increase in the quality of matter, and its application to a biological problem // *Bull. Moscow Univ. Math. Ser. A.* — 1937. — Vol 1. — P. 1–25.
2. *Kondratiev Y., Kutovyi O., Pirogov S.* Correlation functions and invariant measures in continuous contact model // *Infn. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* — 2008. — Vol. 11. — P. 231–258.
3. *Han D., Molchanov S., Whitmeyer J.* Population Processes with Immigration. To appear in 2017.
4. *Molchanov S., Whitmeyer J.* Spatial Models of Population Processes. To appear in 2017.

UDC 519.233

Asymptotic Explicit Optimal Estimators of an Unknown Parameter in One Power Regression Problem

E. N. Savinkina*, A. I. Sakhanenko†

* *Laboratory of Probability Theory and Mathematical Statistics,
Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS,
Koptug avenue 4, Novosibirsk, 630090, Russia*

† *Laboratory of Applied Probability,
Novosibirsk State University,
Pirogova str. 2, Novosibirsk, 630090, Russia*

Abstract. In this work, we consider the task of estimating an unknown parameter in a special nonlinear regression problem. Said problem is a standard example of a nonlinear regression where finding classical ordinary least squares estimators meets considerable computational difficulties. We construct the explicit second-stage estimator of the unknown parameter and also give some examples of the explicit first-stage estimators. Finally, we prove both first-stage and second-stage estimators to be asymptotically normal under wide assumptions and show that under some natural assumptions these estimators have the same precision as the OLS estimator.

Keywords: unknown parameter, explicit asymptotically normal estimator, nonlinear regression.

1. Introduction

Assume we observe random variables $\{Y_i\}$ which can be represented in the following form:

$$Y_i = \sqrt{1 + \alpha x_i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

where $\{x_i > 0\}$ is a known numerical sequence and $\{\varepsilon_i\}$ are some unobserved random errors, which we assume to be identically distributed, and

$$\mathbb{E}\varepsilon_1 = 0, \quad \mathbb{E}\varepsilon_1^4 < \infty, \quad \sigma^2 = \mathbb{D}\varepsilon_1 > 0. \quad (2)$$

Our aim is to estimate an unknown positive parameter α .

The traditional way of solving this problem is to use the least squares method, according to which we find an estimator for α as such $\tilde{\alpha}_n$ that minimizes the sum of the squares of the residuals, i.e.

$$\tilde{\alpha}_n = \arg \min_{\alpha} H_n(\alpha), \quad \text{where} \quad H_n(\alpha) = \sum_{i \leq n} (Y_i - \sqrt{1 + \alpha x_i})^2. \quad (3)$$

However, as noted in the monograph by E.Z. Demidenko [1], the task of finding the minimum point $\tilde{\alpha}_n$ in (1) presents serious computational

difficulties (due to the fact that the number of local minima in the right-hand side of (1) can tend to infinity).

Equation (1) is the third in series of nonlinear regression equations, for which A.I. Sakhanenko and his students have found explicit asymptotically normal estimators of the unknown parameters (see [2]- [5]).

2. Main section

In [2] we introduced a whole class of simple explicit estimators of the parameter α (see the details in Example 1 below). In particular, we can take the following sample statistic as our estimator:

$$\alpha_n^* = \sum_{i \leq n} (x_i - \bar{x}_n) Y_i^2 / \sum_{i \leq n} (x_i - \bar{x}_n)^2, \quad \text{where } \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} x_i. \quad (4)$$

However, all the estimators in [2] have one common drawback: they are less precise than the OLS estimator (1). To solve this problem it seems natural to use Ronald Fisher's idea [6] for improving these estimators.

Suppose we have already obtained a preliminary estimator α_n^* . To find the second-stage estimator Newton's method is typically used:

$$\tilde{\alpha}_n^* = \alpha_n^* - \frac{H'_n(\alpha_n^*)}{H''_n(\alpha_n^*)}, \quad (5)$$

where

$$H'_n(\alpha) = \sum_{i \leq n} \left(x_i - \frac{Y_i x_i}{\sqrt{1 + \alpha x_i}} \right), \quad H''_n(\alpha) = \sum_{i \leq n} \frac{Y_i x_i^2}{2\sqrt{(1 + \alpha x_i)^3}}.$$

But it turns out that the following estimator (2) is better in comparison with the estimator (2):

$$\alpha_n^{**} = \alpha_n^* - \sum_{i \leq n} \left(x_i - \frac{Y_i x_i}{\sqrt{1 + \alpha_n^* x_i}} \right) / \left(\frac{3}{4} \sum_{i \leq n} \frac{x_i^2}{1 + \alpha_n^* x_i} - \frac{1}{4} \sum_{i \leq n} \frac{x_i^2 Y_i}{\sqrt{(1 + \alpha_n^* x_i)^3}} \right). \quad (6)$$

Now we can present our main statement.

Theorem. *Let the following conditions hold:*

$$|\alpha_n^* - \alpha|^3 \sum_{i \leq n} \frac{x_i^4}{(1 + \alpha x_i)^3} / \sqrt{\sum_{i \leq n} \frac{x_i^2}{1 + \alpha x_i}} \xrightarrow{p} 0, \quad (7)$$

$$\frac{\max_{i \leq n} x_i^2 / (1 + \alpha x_i)}{\sum_{i \leq n} x_i^2 / (1 + \alpha x_i)} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Then statistic α_n^{**} is a consistent and asymptotically normal estimator of the parameter α , i.e.

$$\frac{\alpha_n^{**} - \alpha}{d_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{where} \quad d_n = 2\sigma / \sqrt{\sum_{i \leq n} \frac{x_i^2}{1 + \alpha x_i}}. \quad (9)$$

We emphasize that in (2), (2), (2) and further all limits are taken when $n \rightarrow \infty$.

Remark. It can be shown that if the OLS estimator $\tilde{\alpha}_n$ is asymptotically normal, then

$$(\tilde{\alpha}_n - \alpha)/d_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

with d_n defined in (2).

Example 1. When $n \geq n_1 = \min\{i : x_i \neq x_1\}$ we can always find constants $c_{n,1}, \dots, c_{n,n}$ such that

$$\sum_{i \leq n} c_{n,i} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i \leq n} c_{n,i} x_i \neq 0.$$

It poses no difficulties to prove that in this case statistic

$$\alpha_n^* = \sum_{i \leq n} c_{n,i} Y_i^2 / \sum_{i \leq n} c_{n,i} x_i \quad (10)$$

appears to be an unbiased estimator of an unknown parameter α . Moreover, if (1) holds then

$$\mathbb{E}\alpha_n^* = \alpha, \quad \mathbb{D}\alpha_n^* = \sum_{i \leq n} c_{n,i}^2 \mathbb{D}Y_i^2 / (\sum_{i \leq n} c_{n,i} x_i)^2.$$

It is easy to make sure that in this case the following simple condition

$$\mathbb{D}\alpha_n^* \left(\sum_{i \leq n} \frac{x_i^2}{1 + \alpha x_i} \right)^{1/3} \rightarrow 0$$

is sufficient for the validity of assumption (2) in the Theorem.

Example 2. Let us consider the simplest situation when $c_{n,i} = x_i - \bar{x}_n$. In this case the estimator (2) turns into the estimator (2).

Now assume in addition that

$$\sup_n x_n < \infty, \quad n^{-1/3} \sum_{i \leq n} (x_i - \bar{x}_n)^2 \rightarrow \infty. \quad (11)$$

One can make sure that when (2) holds, the estimator α_n^* (see (2)) meets all the conditions in the Theorem.

We shall emphasize that for (2) to be true the validity of the following natural assumptions is enough:

$$\sup_n x_n < \infty, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i \leq n} (x_i - \bar{x}_n)^2 > 0.$$

3. Conclusions

We have constructed a new explicit asymptotically normal estimator of an unknown parameter in one power regression problem. Moreover we have shown its precision to be as good as that of OLS estimator.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 15-01-07460a.

References

1. *Demidenko E. Z.* Optimizacija i regressija [Optimization and Regression]. — Moscow: Nauka, 1989.
2. *Savinkina E. N., Sakhanenko A. I.* Explicit estimators of an unknown parameter in a power regression problem // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2014. — Vol. 11. — P. 725–733.
3. *Linke Yu. Yu., Sakhanenko A. I.* Asymptotically normal estimation of a parameter in a linear-fractional regression problem // Siberian Mathematical Journal. — 2000. — Vol. 41, no. 1. — P. 150–163.
4. *Yermolenko K. V., Sakhanenko A. I.* Explicit asymptotically normal estimators of an unknown parameter in a partially linear regression problem // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2013. — Vol. 10. — P. 719–726.
5. *Kalenchuk A. A., Sakhanenko A. I.* The existence of explicit asymptotically normal estimators of an unknown parameter in a logarithmic regression problem // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2015. — Vol. 12. — P. 874–883.
6. *Fisher R. A.* Theory of statistical estimation // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1925. — Vol. 22. — P. 700–725.

Vertical Handover Time Estimation Method

A. Yu. Grebeshkov*, E. R. Zaripova[†], A. P. Pshenichnikov[‡]

* *Department of Automatic Telecommunications, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
Leo Tolstoy str., 23, Samara, 443010, Russia*

[†] *Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University, Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

[‡] *Department of Communication Networks and Switching Systems, Moscow Technical University of Communications and Informatics. Aviamotornaya st. 8a, Moscow, 111024, Russia*

Abstract. The paper presents a method for vertical handover (VHO) switching time estimation. This method shows a high accuracy of estimation for the session setup procedure and can be applied for vertical handover procedure. Unlike the estimation methods for open queueing network we consider not only the main foreground traffic but the background traffic too. Moreover, the estimation can be obtained for any service time distribution function. The paper shows the switching vertical handover procedure from LTE to Wireless Regional Area Network (WRAN) including authorization and authentication. The sojourn time for customer premise equipment (CPE) at the IEEE 802.22 WRAN is a key performance index for a making decision about from a current wireless access network as 3GPP LTE to the 802.22 WRAN.

Keywords: sojourn time, cognitive radio, customer premise equipment, method, IEEE 802.22, white space, TVWS.

1. Introduction

We introduce an analytical method for vertical handover switching time estimation. In this paper we present a vertical handover procedure from 3GPP Long Term Evolution (LTE) to WRAN. The IEEE 802.22 WRAN is the first wireless officially approved standard [1,2] based on the technology and principles of noninterfering cognitive radio (CR) networks. This standard is the most appropriable radio access technology for a rural or another territory with a low population density, for a vehicular cognitive access at the intelligent transport system. A VHO analytical model can be used as a metric of CPE effectiveness for the VHO in the context of seamless or non-seamless physical connection and IP-session establishment.

2. Vertical handover procedure from 3GPP LTE to IEEE 802.22 WRAN

For this day, there is no analytical method of IEEE 802.22 signaling procedure with focus on the CPE sojourn time on VHO 3GPP LTE – IEEE 802.22. With a proposed analytical method there is a way to make

an objective estimation of CPE’s time period for identification and sojourn time at the IEEE 802.22 WRAN during VHO from the 3GPP LTE.

During VHO CPE (User Equipment) requests Access Network Discovery Service Function (ANDSF) about capabilities of IEEE 802.22 base stations (BS). There is a principal signaling message exchange between CPE (UE) and dedicated servers with support of AAA for IEEE 802.22. We will discuss unicast service time CPE model with a step-by-step initialization procedure. Unlike [3] this procedure will include phase of CPE IP–registration. Discussed procedure can be introduced as show in Fig. 1.

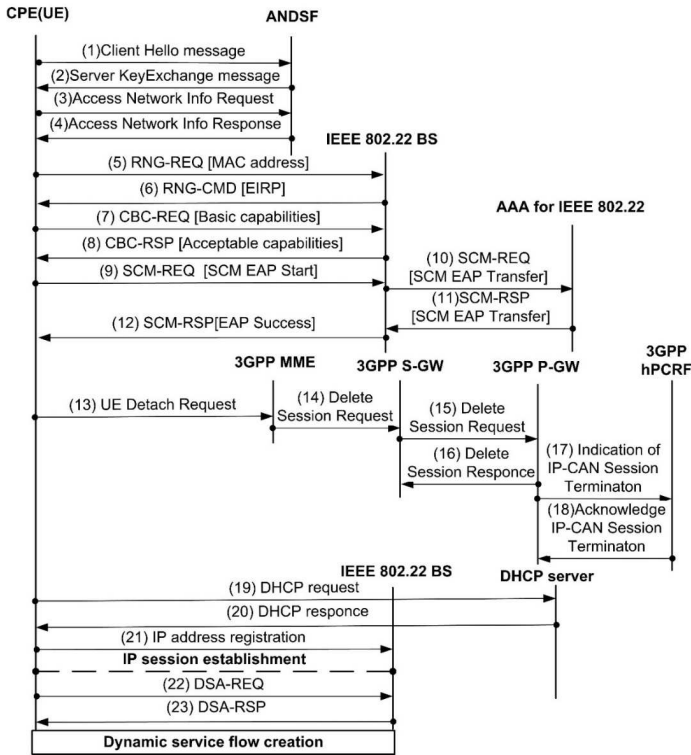


Figure 1. Service flow creation for VHO LTE - IEEE 802.22 WRAN

Let us describe the switching procedure. The CPE (UE) sends a message (1) and has response (2) with a security key. The message (3) is a request to retrieve network discovery. The message (4) is a respond with an information about IEEE 802.22 BS. The messages (5) Ranging Request

is a request Equivalent Isotropically Radiated Power (EIRP) value. Message (6) Ranging Command shall be transmitted by the BS in response to (5). The CPE transmits Basic Capability Requests message (7) with an information elements concerning communication parameters. Message (8) CPE Basic Capability Request is a response to (7). The Security Control Management (SCM) message (9) is an Extensible Authentication Protocol (EAP) request. The message (10) is a message that shall be retransmitted to the AAA server. Message SCM-RSP (11) is an AAA server response. Message (12) is a finish message for the CPE (UE) authentication.

With message (13) a process of detachment is beginning. With message (14) a 3GPP Mobility Management Entity (MME) will deactivate bearers. The Service Gateway (S-GW) is sending request (15) for a bearer release. Message (16) is response to the message (15). The message (17) is an indication at the hPCRF about IP session termination. The hPCRF removes the data concerning terminated IP-Connectivity Access Network (IP-CAN) session and sends acknowledgement (18). From this moment there is no IP-session throw 3GPP EPS for the CPE (UE). With message (19) the CPE (UE) shall invoke DHCP mechanism. The CPE (UE) received the IP address with a message (20). With a message (21) the CPE starts the process of IP address registration. A Dynamic Service Addition Message Request message (22) contains a service flow parameters. The BS responds with a Dynamic Service Addition Response (23) indicating acceptance of parameters which associated with upstream/downstream and QoS rules. There is dynamic service flow creation completed.

3. The method of vertical handover time estimation

We propose the approximate method for sojourn vertical handover switching time estimation in multistage queueing system with background traffic. The accuracy of this method was shown in [6]. Unlike the estimation method for open queueing network [7] we divide incoming flow at each node into foreground and background traffic (see Fig. 2). Signaling messages (1)-(23) construct foreground traffic. Another tasks form at each node background traffic. For our preliminary analysis we use the incoming Poisson flow [8].

The routing chain consists of $K=24$ steps, from the processing of ClientHelloMessage in the 1-node CPE (UE) till the processing of DSA-RSP message in the same node. We denote the arrival rate and the average service time of the foreground customers at k -step as λ_0 and b_k , and the arrival rate and the average service time of the background customers as λ_k and d_k .

The sojourn time Δ of a vertical handover switching time can be find by formula (3).

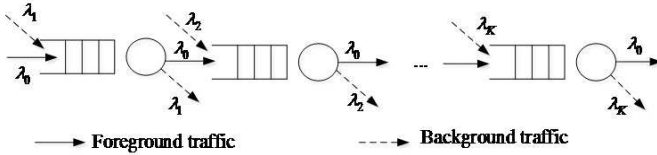


Figure 2. Multistage queueing system with background traffic

$$\Delta = \sum_{k=1}^K (w_k + b_k), \tag{1}$$

where w_k is the average waiting time in the node at k -step, obtained from the Pollaczek-Khinchin's formula (3):

$$w_k \approx \frac{\rho_k^2 (1 + C_k^2)}{2(1 - \rho_k)(\lambda_0 + \lambda_k)}, \tag{2}$$

and $\rho_k = \lambda_0 b_k + \lambda_k d_k$ is the offered load on the node at k -step. The squared CV of service time at k -step is shown by the formula (3):

$$C_k^2 = \frac{(\lambda_0 + \lambda_k)(\lambda_0 b_k^2 + \lambda_k d_k^2)}{(\lambda_0 b_k + \lambda_k d_k)^2} - 1. \tag{3}$$

An analytical method allows to estimate the sojourn swithing time of proposed vertical handover procedure. For a numerical experiment, we used input data from the IEEE 802.22 standard. The amount of transactions per second depends on the network situation and configuration and many random parameters. We assume that a maximum of 10% of 512 subscribers at a regular IEEE 802.22 cell are in service after VHO from the 3GPP LTE. The procedure generates at least 23 signaling messages that have been described above.

4. Conclusions

We propose a method for vertical handover sojourn time estimation in multistage queueing system with background traffic. Vertical handover procedure switches user equipment from 3GPP LTE network to cognitive wireless regional area network. This procedure includes at least 23 signaling messages including authorization and resource allocation. This method has following advantages: possibility of sojourn time cumulative distribution function estimation, accuracy of estimation as compared with the simulation model.

Acknowledgments

The publication was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008) and RFBR (research projects No. 15-07-03051 and No. 16-07-00766).

References

1. *IEEE std. 802.22-2011*. Telecommunications and information exchange between systems Wireless Regional Area Networks (WRAN) – Specific requirements. Part 22: Cognitive Wireless RAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications: Policies and Procedures for Operation in the TV Bands. — IEEE Computer Society, 2011.
2. *Dawood M., Fuhrmann W., Ghita B. V.* Assay of White Space Technology Standards for Vehicular Cognitive Access // INC 2014 (Tenth International Network Conference). — Plymouth University, 2014. — P. 23–34.
3. *Vager S.* Patent RU 2 488 979 C2 Activation time for target cell-based serving cell change for high-speed channel (2009.01).
4. *Cardona N., Monserrat J. F., Cabrejas J.* Enabling Technologies for 3GPP LTE-Advanced Networks (In LTE-Advanced and Next Generation Wireless Networks). — John Wiley and Sons, 2013. — P. 3–34.
5. *Granlund D., Holmlund P., Ahlund C.* Opportunistic Mobility Support for Resource Constrained Sensor Devices in Smart Cities // Sensors. — 2015. — Vol. 15. — P. 5112–5135.
6. *Gaidamaka Yu., Zaripova E.* Session setup delay estimation methods for IMS-based IPTV services / Lecture Notes in Computer Science. — 2014. — Vol. 8638. — P. 408–418.
7. *Grebeshkov A., Zaripova E., Roslyakov A., Samouylov K.* Modelling of vertical handover from untrusted WLAN Network to LTE. Proceedings, 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2017. — P. 694–700.
8. *Wolff R. W.* Poisson arrivals see time averages // Operation Research. — 1982. — Vol. 30, no. 2. — P. 223–231.

UDC 519.2

Anderson-Darling and New Weighted Cramér-von Mises Statistics

G. V. Martynov*

* *Institute for Information Transmission Problems of the RAS,
Bolshoy Karetny per., 19, build.1, Moscow, 127051, Russia*

Abstract. Anderson-Darling statistic modifies the classical empirical process in the interval $[0, 1]$ by multiplying it by a weighting function $\psi(t) = (t(1-t))^{-1/2}$. The weighting function redistributes the test sensitivity to deviations of the alternative distribution function from the hypothetical one between different subsets of $[0, 1]$. In practice, the tests can be of interest with other weighting functions. There a new formulas was proposed for eigenfunctions of the Anderson-Darling statistics. Also, it was analyzed a statistic “inverse” to the Anderson-Darling statistic with the weighting function $\psi(t) = (t(1-t))^{1/2}$. The theory is based on the use of various special functions book [1]. In practice, could be useful the Cramér-von-Mises tests with the weighting functions, belonging to family $\psi(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. The paper contains a table of distribution for statistics with different values of the degrees $\alpha > -1$ and $\beta > -1$. The table was calculated without using the statistical simulation.

Keywords: Cramér-von-Mises test, Anderson-Darling statistic, goodness-of-fit test, weighting function, eigenvalues, eigenfunctions, statistical tables.

1. Introduction: Weighted Cramér-von Mises test

One-dimensional weighted Cramér-von Mises statistic is

$$\omega_n^2 = n \int_0^1 \psi^2(t)(F_n(t) - t)^2 dt,$$

where $F_n(t)$ is the empirical distribution function based on the observations X_1, X_2, \dots, X_n of the uniformly distributed on $[0, 1]$ random variable, and $\psi(t)$ is a weighting function. The statistic (1) designed to test the hypothesis

$$H_0: F(t) = t, \quad \text{against the alternative } H_1: F(t) \neq t, \quad t \in [0, 1],$$

where $F(x)$ is continuous distribution function.

If the condition

$$\int_0^1 \psi^2(t) t(1-t) dt < \infty$$

is fulfilled then the statistic ω_n^2 converges in probability to

$$\omega^2 = \int_0^1 \xi^2(t) dt,$$

where $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$, is the Gaussian process with zero mean and the covariance function

$$K_\psi(t, \tau) = \psi(t)\psi(\tau)(\min(t, \tau) - t\tau).$$

The Gaussian process $\xi(t)$ can be developed in the Karhunen-Loève series

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_k \varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}},$$

where x_k , $k = 1, 2, \dots$, are the independent standard normal random variables, and λ_k and $\varphi_k(t)$, $i = 1, 2, \dots$, are the eigenvalues and eigenfunctions of the linear operator with the kernel $K(t, \tau)$, i.e. solutions of the Fredholm integral equation

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 \psi(t)\psi(\tau)(\min(t, \tau) - t\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Under the contiguous alternatives $H_1 : F_n(t) = t + \delta(t)/\sqrt{n}$, $n = 1, 2, \dots$, the distribution of ω^2 is the distribution of noncentral quadratic form

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x_k + \delta_k)^2}{\lambda_k}, \text{ where } \delta_k = \int_0^1 \delta(t)\varphi_k(t)dt.$$

By twice differentiation (2) respect to t , we obtain differential equation

$$h''(t) + \lambda\psi^2(t)h(t) = 0$$

with the conditions $h(0) = h(1) = 0$. Here, $h(t) = \varphi(t)/\psi(t)$.

Deheuvels and Martynov in article [3] described for $\psi(t) = t^\beta$ the follows result. Let $\{B(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ be the Brownian bridge. Then, for each $\beta = \frac{1}{2\nu} - 1 > -1$, the Karhunen-Loeve expansions of $\{\xi(t) = t^\beta B(t) : 0 < t \leq 1\}$ is given by

$$t^\beta B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k e_{kB}(t)}{\sqrt{\lambda_{kB}}}, \quad e_{B,k}(t) = \frac{t^{\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2}} J_\nu(z_{\nu,k} t^{\frac{1}{2\nu}})}{\sqrt{\nu} J_{\nu-1}(z_{\nu,k})}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Here, $\{\omega_k : k \geq 1\}$ are i.i.d. $N(0, 1)$ random variables, and, for $k = 1, 2, \dots$, the eigenvalues are $\lambda_k = (z_{\nu,k}/2\nu)^2$, $z_{\nu,k}$, $k = 1, 2, \dots$, are zeros of the Bessel functions $J_\nu(z)$.

It is considered also the Cramér-von Mises statistic of the form

$$\omega_n^2(a, b) = n \int_0^1 t^{2a}(1-t)^{2b}(F_n(t) - t)^2 dt$$

with the weighting function $\psi(t) = t^a(1-t)^b, a > -1, b > -1$. The well known case is the Anderson-Darling statistic

$$A_n^2 = \omega_n^2(-0.5, -0.5) = n \int_0^1 \frac{(F_n(t) - t)^2}{t(1-t)} dt$$

with $a = -0.5$ and $b = -0.5$. For the statistic A_n^2 equation (3) is transformed to

$$t(1-t)h''(t) + \lambda h(t) = 0, h(0) = h(1) = 0.$$

Anderson and Darling in article [2] found that their statistic has $\lambda_k = k(k+1)$ and $h_k(t) = \sqrt{t(1-t)}P'_k(2t-1), k = 1, 2, \dots$, where $P_k(t), k = 1, 2, \dots$, are the Legendre polynomials. The information related to the subject of this work can also be found in book [4, 5, 5, 6].

2. New formulas for eigenfunctions for the the Anderson-Darling statistic

At first, we will propose a direct method for deriving expressions for considering eigenfunctions. We will find the possible solutions of the differential equation (4) in the form

$$h_k(t) = t(1-t)(1+a_{1,k}t+a_{2,k}t^2+\dots+a_{k-1,k}t^{k-1}) \equiv t(1-t)V_k(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Here, $h_1(t)$ and $h_2(t)$ are understood to be $h_1(t) = t(1-t)$ and $h_2(t) = t(1-t)(1+a_{1,2}t)$. This solution satisfy to the conditions $h(0) = h(1) = 0$.

Theorem 1 *The solutions of the equation (4) can be represented for each $\lambda = \lambda_k = k(k+1), k = 1, 2, \dots$, as*

$$V_k(t) = 1 + \beta_{1,k}t + \beta_{1,k}\beta_{2,k}t^2 + \beta_{1,k}\beta_{2,k}\beta_{3,k}t^3 + \dots + \beta_{1,k}\dots\beta_{k-1,k}t^{k-1}$$

or

$$V_k(t) = (((\beta_{k-1,k}t + 1)\beta_{k-2,k}t + \dots + 1)\beta_{3,k}t + 1)\beta_{2,k}t + 1)\beta_{1,k}t + 1,$$

where $\beta_{s,k} = 1 - \lambda_k/\lambda_s = 1 - \frac{k(k+1)}{s(s+1)}, s = 1, 2, \dots, k-1$.

The following theorem solution can be represents another solution with using of the hypergeometric functions.

Theorem 2 *The solutions of the equation (4) can be represented for each $\lambda = \lambda_k = k(k+1), k = 1, 2, \dots$, as*

$$h_k(t) = t \cdot {}_2F_1(-k, k+1; 2; t), \quad k = 1, 2, \dots$$

This result can be derived from the fact that the equation (4) is particular case of the equation for hypergeometric function ${}_2F_1$.

Theorem 3 *The following identity is valid:*

$$(1 - t)V_k(t) \equiv {}_2F_1(-k, k + 1; 2; t).$$

Theorem 4 *The normalized eigenfunctions of the covariance operator corresponding to the Anderson-Darling statistic can be written as:*

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= 2\sqrt{k(k + 1)(2k + 1)}\sqrt{t(1 - t)}V_k(t) \\ &= 2\sqrt{k(k + 1)(2k + 1)}\sqrt{\frac{t}{(1 - t)}}{}_2F_1(-k, k + 1; 2; t) = \\ &= 2\sqrt{\frac{2r + 1}{k(k + 1)}}\sqrt{t(1 - t)}P'_k(2t - 1), \\ & \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

3. Statistic with $\psi(t) = \sqrt{t(1 - t)}$

Here, we will consider the statistic Cramér-von Mises with $\psi(t) = \sqrt{t(1 - t)}$. It is “inverse” for Anderson-Darling statistic The equation (3) have the form $h''(t) + \lambda t(1 - t)h(t) = 0$ with the conditions $h(0) = 0$ and $h(1) = 0$. Its solution is

$$\begin{aligned} h(t) &= C_1 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{a}(-1 + 2x)^2}{4}\right) \exp(\sqrt{ax}(1 - x)/2) \\ &+ C_2 \cdot {}_1F_1\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{a}(-1 + 2x)^2}{4}\right) (-1 + 2x) \exp(\sqrt{ax}(1 - x)/2). \end{aligned}$$

Here, ${}_1F_1(a; b; z)$ is the Kummer confluent hypergeometric function. With applying the conditions $h(0) = h(1) = 0$, the following equations can be derived

$$h(0) = C_1 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{a}}{4}\right) - C_2 \cdot {}_1F_1\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{a}}{4}\right) = 0,$$

$$h(1) = C_1 \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{a}}{4}\right) + C_2 \cdot {}_1F_1\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{a}}{4}\right) = 0.$$

Hence, the equation for eigenvalues is the determinant of the previous equation

$${}_1F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{a}}{4}\right) \cdot {}_1F_1\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{a}}{16}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{a}}{4}\right) = 0.$$

This equation can be resolved by numerical methods. First zeros of the left multiplier are:

45.24420524 514.3565172 1495.598597 2988.879509 4994.177419
7511.484585 10540.79747 14082.11420 18135.43367 22700.75517

First zeros of the right multiplier are:

215.7714658 940.9700448 2178.236123 3927.526974 6188.830121
8962.140456 12247.45544 16044.77364 20354.09420 25175.41653

4. Another weighted statistics

The equation (3) with $\psi(t) = (t(1-t))^{3/2}$ has the solution with Heun triconfluent function. The same equation with $\psi^2(t) = 1 - \cos(\pi t)$ has the solution with Mathieu function.

5. Table of the distribution for statistics with $\psi(t) = (t(1-t))^\alpha$

In the Table 1 we present the quantiles of the $\omega^2(\alpha, \beta)$ distribution with $\alpha = \beta$. More detailed tables can be found in article [7].

Quantiles of $\omega^2(\alpha, \alpha)/S$

Table 1

p/α	- 0.70	- 0.50	- 0.25
0.90	4.3776	1.9330	0.7945
0.95	5.4914	2.4924	1.0437
0.99	8.2378	3.8781	1.6606
0.995	9.4680	4.4982	1.9362
S	1	1	1

0	0.5	1	2
3.4731	0.7213	1.5834	0.8245
4.6136	0.9709	2.1479	1.1284
7.4346	1.5872	3.5397	1.8769
<u>8.6939</u>	<u>1.8620</u>	<u>4.1603</u>	<u>2.2105</u>
10	10	100	1000

Acknowledgments

The work was carried out at IITP RAS and supported by Russian Science Foundation (grant RSF No. 14-50-00150).

References

1. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Function. — National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series. — 1972. — Vol. 55.
2. *Anderson T. W., Darling D. A.* Asymptotic theory of certain “Goodness of Fit” criteria based on stochastic processes // The Annals of Mathematical Statistics. — 1952. — Vol. 23, no. 2. — P. 193–212.
3. *Deheuvels P., Martynov G.* Karhunen-Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions // Progress in Probability. — Birkhäuser, Basel/Switzerland, 2003. — Vol. 55. — P. 57–93.
4. *Durbin J., Knott M.* Components of the Cramér-von-Mises statistics. I. // J. R. Statist. Soc., Ser. B, — 1972. — Vol. 34. — P. 290–307.
5. *Martynov G. V.* The Omega Square Tests. — M.: Nauka, 1978. (in Russian).
6. *Martynov G. V.* Statistical tests based on empirical processes and related questions // J. Soviet. Math. — 1992. — Vol. 61. — P. 2195–2271. (Original Russian Text published in Progress in Science and Technology, Series on Probability Theory, Mathematical Statistics, Theoretical Cybernetics (Itogi Nauki i Tekhniki), — VINITI Acad. of Sc. USSR, Moscow, 1990. — Vol. 30. — P. 3–112.)
7. *Martynov G. V.* Anderson–Darling statistic and its “inverse” // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2016. — Vol. 61, no. 6. — P. 709–716. (Original Russian Text published in Informatsionnye Protsessy. — 2015. — Vol. 15, no. 3. — P. 377–388).

UDC 519.218.31

Priority systems with orientation. Analytical and numerical results

Gh. K. Mishkoy*[†]

** Institute of Mathematics and Computer Science,
Academy of Sciences of Moldova,*

Academiei str. 5, Chisinau, MD-2028, Republic of Moldova

† Department of Mathematics and Statistics,

*Free International University of Moldova,
V. Pircalab str. 52, Chisinau, MD-2012, Republic of Moldova*

Abstract. A class of priority queueing systems with non-zero switchover times is considered. Some performance characteristics such as distributions of busy periods, conditions of stationarity, traffic coefficients, etc. are presented. Numerical algorithms for their modelling are developed.

Keywords: priority queueing systems, semi-Markov orientation, busy period, traffic coefficient, numerical algorithm.

1. Introduction

Mathematical models of queueing theory play an important role in the solution of a wide range of topical applied problems, arising from the rational organization of industries, polyclinics and hospitals, resource management, information flows, transport, information sorting and processing, and other branches of human activity. Especially bright and impressive is the application of this theory in the analysis and design of various modern networks and their components that are rapidly developing in recent decades (see, for example, monographs [1-4]). An important class of queueing models is Priority models, models in which requests are endowed with some advantage in service. In this paper we will present some results regarding the analysis of priority models with non-zero switchover time at the service process from one class of priority to another. This time C_{ij} we will call it orientation and we will consider it a random variable with arbitrary distribution function (d.f.) $C_{ij}(x) = P\{C_{ij} < x\}$. Taking into account the orientation time brings about the appearance of new priority laws, more flexible and more advanced compared to classical ones. We'll denote by two indexes IJ the priority laws. The first index will show the future state of interrupted switching, the second - the future state of interrupted service [5]. In this context, we will present some results that can be viewed as multidimensional analogue (in the sense of priority classes) of Kendall functional equation, virtual analogue of Pollaczek-Khintchin equation, etc.

2. System's busy period $M_r|G_r|1|\infty$

Denote by $B_i(x)$ -d.f. of service of the requests of the i -th priority class, $C_j(x)$ -d.f. of orientation for service of the requests of the j class, λ_i -parameter of the Poisson flow of priority i , $\Pi(x)$ -d.f. of the busy period; $i, j = 1, \dots, r$; $i \neq j$, $\sigma_k = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$, $\sigma = \sigma_r$, $\beta_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB_i(x)$, $c_j(s)$, $\pi(s)$ -the Laplace-Stieltjes transform of d.f. $B_i(x)$, $C_j(x)$, $\Pi(x)$.

Statement 1. (Priority policy P12: "resume", "repeat again")

The Laplace-Stieltjes transform $\pi(s) = \pi_r(s)$ of the d.f. of the busy period is determined (at $k = r$) from the system of recurrent functional equations:

$$\begin{aligned} \sigma_k \pi_k(s) &= \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(s + \lambda_k) + \sigma_{k-1} \{ \pi_{k-1}(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]) - \\ &\quad - \pi_{k-1}(s + \lambda_k) \} \nu_k(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]) + \lambda_k \pi_{kk}(s), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\pi_{kk}(s) = \nu_k(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]) \bar{\pi}_k(s), \tag{2}$$

$$\bar{\pi}_k(s) = h_k(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]), \tag{3}$$

where

$$\nu_k(s) = c_k(s + \sigma_{k-1} [1 - \pi_{k-1}(s)]), \tag{4}$$

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) \left\{ 1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}} [1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})] \pi_{k-1}(s) \nu_k(s) \right\}^{-1}. \tag{5}$$

Statement 2. (Priority policy P11: "resume", "resume")

The Laplace-Stieltjes transform $\pi(s) = \pi_r(s)$ of the d.f. of the busy period is determined (at $k = r$) from the system of recurrent functional equations:

$$\begin{aligned} \sigma_k \pi_k(s) &= \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(s + \lambda_k) + \sigma_{k-1} \{ \pi_{k-1}(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]) - \\ &\quad - \pi_{k-1}(s + \lambda_k) \} \nu_k(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]) + \lambda_k \pi_{kk}(s), \end{aligned}$$

$$\pi_{kk}(s) = \nu_k(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]) \bar{\pi}_k(s),$$

$$\bar{\pi}_k(s) = h_k(s + \lambda_k [1 - \bar{\pi}_k(s)]),$$

where

$$\nu_k(s) = c_k(s + \sigma_{k-1} [1 - \pi_{k-1}(s)]),$$

$$h_k(s) = \beta_k(s + \Lambda_{k-1} [1 - \pi_{k-1}(s)] \nu_k(s)).$$

Remark 1. Gnedenko system's busy period.

If $C_j = 0$, $j = 1, \dots, r$, $r > 1$ from relations (1)-(5) follow the result published by Gnedenko et al in "Priority Queueing Systems" (1973)

$$\sigma_k \pi_k(s) = \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(s + \lambda_k (1 - \pi_{kk}(s))) + \lambda_k \pi_{kk}(s),$$

$$\pi_{kk}(s) = h_k(s + \lambda_k (1 - \pi_{kk}(s))),$$

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) \left\{ 1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}} [1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})] \pi_{k-1}(s) \right\}^{-1}.$$

Remark 2. *Kendall - Takacs equation.*

If $C_j = 0$, $r = 1$ the system (1)-(5) represents a single equation

$$\pi_{11}(s) = h_1(s + \lambda_1(1 - \pi_{11}(s))).$$

But if $r = 1$ result that $h_1(s) = \beta_1(s)$ and $\pi_{11}(s) = \pi(s)$. Considering $\lambda_1 = \lambda$ and $\beta_1 = \beta$ the following equation holds: (known as Kendall - Takacs (1953) functional equation for the busy period for $M|G|1$)

$$\pi(s) = \beta(s + \lambda - \lambda\pi(s))$$

Thus, system (1)-(5) can be considered as n -dimensional analog (n is the number of priority classes) of Kendall - Takacs equation.

3. Steady state condition and traffic coefficients

Let us denote by β_{k1} , c_{i1} , $\pi_{k1}, \dots, \nu_{k1}$ the first moment of the d.f. $B_k(x), C_k(x), \Pi_k(x), \dots, N_k(x)$.

Statement 3. (Priority policy P12: "resume", "repeat again")

Let consider $\rho_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$,

where

$$b_1 = \frac{\beta_{11} + c_{11}}{1 + \lambda_1 c_{11}},$$

$$b_i = \Phi_1 \cdots \Phi_{i-1} \frac{1}{\sigma_{i-1}} \left[\frac{1}{\beta_i(\sigma_{i-1})} - 1 \right] (1 + \sigma_{i-1} c_{i1}),$$

$$\Phi_1 = 1, \Phi_i = 1 + (\sigma_i - \sigma_{i-1} \pi_{i-1}(\lambda_i)) c_{i1}, \quad i = 2, \dots, k.$$

If

$$\rho_k < 1 \tag{6}$$

then

$$\sigma_k \pi_{k1} = \frac{\Phi_2 \cdots \Phi_k + \rho_{k-1}}{1 - \rho_k}, \quad \bar{\pi}_{k1} = \frac{b_k}{1 - \rho_k}, \tag{7}$$

$$h_{k1} = \frac{b_k}{1 - \rho_{k-1}}, \quad \nu_{k1} = \frac{\Phi_2 \cdots \Phi_{k-1}}{1 - \rho_{k-1}} c_{k1}.$$

Statement 4. (Priority policy P11: "resume", "resume")

Let $\rho_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$,

where

$$b_1 = \frac{\beta_{11} + c_{11}}{1 + \lambda_1 c_{11}},$$

$$b_k = \Phi_1 \cdots \Phi_{k-1} \beta_{k1} (1 + \sigma_{i-1} c_{i1})$$

$$\Phi_1 = 1, \Phi_i = 1 + (\sigma_i - \sigma_{i-1} \pi_{i-1}(\lambda_i)) c_{i1}, \quad i = 2, \dots, k.$$

If

$$\rho_k < 1$$

then

$$\sigma_k \pi_{k1} = \frac{\Phi_2 \cdots \Phi_k + \rho_{k-1}}{1 - \rho_k}, \quad \bar{\pi}_{k1} = \frac{b_k}{1 - \rho_k},$$

$$h_{k1} = \frac{b_k}{1 - \rho_{k-1}}, \quad \nu_{k1} = \frac{\Phi_2 \cdots \Phi_{k-1}}{1 - \rho_{k-1}} c_{k1}.$$

4. Algorithms

Algorithm P11 (preemptive priority policy: "resume", "resume")

Input: $r, s^*, \epsilon > 0, \{\lambda_k\}_{k=1}^r, \{\beta_k(s)\}_{k=1}^r, \{c_k(s)\}_{k=1}^r$. Output: $\pi_k(s^*)$
 Description: IF ($k == 0$) THEN $\pi_0(s^*) := 0$; RETURN $k := 1$; $q := 1$;
 $\Lambda_0 := 0$; Repeat $\text{inc}(q)$; $\Lambda_q := \Lambda_{q-1} + \lambda_q$; Until $q == r$;
 Repeat

$$\nu_k(s) := c_k(s^* + \Lambda_{k-1} [1 - \pi_{k-1}(s^*)]);$$

$$h_k(s^*) := \beta_k(s^* + \Lambda_{k-1} [1 - \pi_{k-1}(s^*)] \nu_k(s^*));$$

$\pi_{kk}^{(0)}(s^*) := 0$; $n := 1$; Repeat $\pi_{kk}^{(n)}(s^*) := h_k(s^* + \lambda_k - \lambda_k \pi_{kk}^{(n-1)}(s^*))$;
 $\text{inc}(n)$; Until $|\pi_{kk}^{(n)}(s^*) - \pi_{kk}^{(n-1)}(s^*)| < \epsilon$;

$$\pi_k(s^*) := \frac{\Lambda_{k-1} \pi_{k-1}(s^* + \lambda_k)}{\Lambda_k} + \frac{\Lambda_{k-1}}{\Lambda_k} (\pi_{k-1}(s^* + \lambda_k - \lambda_k \pi_{kk}(s^*)) -$$

$$- \pi_{k-1}(s^* + \lambda_k)) \nu_k(s^* + \lambda_k [1 - \pi_{kk}(s^*)]) + \frac{\lambda_k}{\Lambda_k} \nu(s^* + \lambda_k - \lambda_k \pi_{kk}(s^*)) \pi_{kk}(s^*);$$

$\text{inc}(k)$; Until $k == r$;

End of Algorithm P11.

Algorithm P12 (preemptive priority policy: "resume", "repeat again")

Input: $r, s^*, \epsilon > 0, \{\lambda_k\}_{k=1}^r, \{\beta_k(s)\}_{k=1}^r, \{c_k(s)\}_{k=1}^r$. Output: $\pi_k(s^*)$
 Description: IF ($k == 0$) THEN $\pi_0(s^*) := 0$; RETURN $k := 1$; $q := 1$;
 $\Lambda_0 := 0$; Repeat $\text{inc}(q)$; $\Lambda_q := \Lambda_{q-1} + \lambda_q$; Until $q == r$;

$$\text{Repeat } \nu_k(s) := c_k(s^* + \Lambda_{k-1} [1 - \pi_{k-1}(s^*)]); h_k(s^*) := \beta_k(s + \Lambda_{k-1}) \{1 - \frac{\Lambda_{k-1}}{s^* + \Lambda_{k-1}} [1 - \beta_k(s^* + \Lambda_{k-1})] \pi_{k-1}(s^*) \nu_k(s^*)\}^{-1}; \pi_{kk}^{(0)}(s^*) :=$$

$$0; n := 1; \text{Repeat } \pi_{kk}^{(n)}(s^*) := h_k(s^* + \lambda_k - \lambda_k \pi_{kk}^{(n-1)}(s^*)); \text{inc}(n);$$

$$\text{Until } |\pi_{kk}^{(n)}(s^*) - \pi_{kk}^{(n-1)}(s^*)| < \epsilon;$$

$$\pi_k(s^*) := \frac{\Lambda_{k-1}\pi_{k-1}(s^* + \lambda_k)}{\Lambda_k} + \frac{\Lambda_{k-1}}{\Lambda_k} (\pi_{k-1}(s^* + \lambda_k - \lambda_k\pi_{kk}(s^*)) - \pi_{k-1}(s^* + \lambda_k))\nu_k(s^* + \lambda_k[1 - \pi_{kk}(s^*)]) + \frac{\lambda_k}{\Lambda_k}\nu(s^* + \lambda_k - \lambda_k\pi_{kk}(s^*))\pi_{kk}(s^*);$$

inc(k); Until k == r;
End of Algorithm P12.

5. Conclusions

The stationarity conditions how and traffic coefficients can be applied in the management of real systems to avoid the system's overload. But their application requires solving the systems of functional equations for busy period. The elaborated algorithms solve this problem.

References

1. *Alfa A. S.* Queueing Theory for Telecommunication. — Springer, 2010.
2. *Wuyi Y., Yutake T., Takagi H.* Advances in Queueing Theory and Network. — Springer, 2009.
3. *Vishnevsky V. V.* Theoretical bases of design of the communication network. — Moscow, Tehnosfera, 2003.
4. *Vishnevsky V. V., Semenova O. V.* Polling Systems: Theory and Applications for Broadband Wireless Networks. — London, Academic Publishing, 2012.
5. *Mishkoy Gh. K.* Generalized Priority Systems. — Chisinau, Academy of Sciences of Moldova, 2009 (in Russian).

Об асимптотике вероятностей больших уклонений некоторых частично или асимптотически однородных марковских цепей

М. В. Козлов *

* *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. Тематика точной асимптотики вероятностей больших уклонений марковских блужданий изучалась А.А.Боровковым в 1962–63 гг. прошлого столетия и активно разрабатывалась в последующем им самим и его школой. В докладе мы коснемся некоторых частично или асимптотически однородных в терминах Боровкова марковских цепей на прямой в крамеровском случае. В работе А.А. Боровкова, Д.А. Коршунова (2000) для частично однородной эргодической марковской цепи с правосторонним условием Крамера на шаг блуждания выведена точная асимптотика вероятностей больших уклонений. Некоторые дополнения к этому исследованию содержатся в работе [М.В. Козлов, ТВП, т. 58, в.1, 2013]. В серии работ М. В. Козлова, А.В. Шкляева изучалась асимптотика вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов в случайной среде. В докладе будут предложены некоторые возможные направления дальнейшей работы по указанным направлениям.

Ключевые слова: случайное блуждание, процесс ожидания, условие Крамера, большие уклонения максимума, условные предельные теоремы.

Рассмотрим частично однородные в терминологии А.А.Боровкова марковские цепи на прямой, то есть такие, что их переходные вероятности в пределах положительной полуоси такие же, как у случайного блуждания.

Пусть X - общее обозначение для шага блуждания $S(n)$. Предполагается, что преобразование Лапласа $R(h) = \exp(hX)$ конечно в некоторой правой полукрестности точки $h = 0$, а что математическое ожидание $\mathbb{E} X$ отрицательно. Всюду рассматривается так называемый крамеровский случай, когда существует такое H , что $R(h) = 1$.

Для максимума M случайного блуждания $S(n)$ в таком случае имеет место оценка Крамера-Лундберга $\mathbb{P}(M > x) \sim \exp(-Hx)$. Обозначим через $m(h)$ логарифмическую производную от $R(h)$ и через $h(t)$ обратную к ней функцию.

Введем случайный момент $T(x)$ первого пересечения блужданием $S(n)$ высокого уровня x . S.Asmissen [1] доказал, что случайная величина $T(x)$ асимптотически нормальна со средним $x/m(h)$ и дисперсией, пропорциональной x . Им же установлена функциональная предельная теорема с броуновским мостом в качестве предела.

Наряду с большими уклонениями максимума крамеровского блуждания рассматривалась задача большого уклонения конца $S(n)$ на величину tn для $t > \mathbb{E}X$ (при любом знаке $\mathbb{E}X$). Окончательный результат здесь принадлежит В.В. Петрову [2].

А.А. Боровков, Д.А. Коршунов [3] исследовали асимптотику вероятностей больших уклонений для частично однородной марковской цепи в эргодическом случае. В этот класс попадает, в частности, процесс ожидания. Используя подходы этой работы, автор в публикации [3] исследовал асимптотику вероятностей больших уклонений максимума $M(n)$ отрезка процесса ожидания и предельное распределение момента $T(tn)$ первого пересечения процессом ожидания уровня tn . Используемые подходы приложимы и к неэргодическим частично однородным марковским цепям (с отрицательным $\mathbb{E}X$). При отсутствии ограничений на время блуждания оптимальный способ выйти на уровень tn состоит в движении вдоль прямой с угловым наклоном $m(H)$. Таким образом, если $t/m(H) < 1$, то вдоль этого направления (включая флуктуации в виде броуновского моста) и следует достигать уровня tn . В противном случае частично однородная марковская цепь проводит в течение времени, пропорциональном n , в некоторой окрестности точки 0. Тем самым, начинает играть роль части траектории, находящиеся на отрицательной полуоси. Мы проиллюстрируем в сообщении такую ситуацию на примере осциллирующего (а лучше сказать альтернирующего случайного блуждания).

В работе [3] исследована логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений для так называемых асимптотически однородных марковских цепей, то есть, когда по мере удаления от начала координат в положительную сторону переходные вероятности слабо сходятся к таковым для обычного случайного блуждания. Получения точной асимптотики в общем случае асимптотически однородных марковских цепей пока что вызывает затруднения. В этой связи интересны частные модели, для которых ее можно вывести. К ним относятся ветвящиеся процессы в случайной независимой среде (после перехода от процесса к его логарифму). На этот счет за последние годы появилось ряд работ автора и А.В. Шкляева. В сообщении мы остановимся на некоторых результатах для этих процессов.

Литература

1. *Asmussen S.* Conditioned limit theorems relating a random walk to its associate, with applications to risk reserve process and the GI/G/1 queue // *Adv. Appl. Probab.* — 1982. — Vol. 14. — P. 143–170.
2. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // *Теория вероятностей и ее применения.* — 1965. — Т. 10, вып. 2. — P. 310–322.

3. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова, 2. Достаационарные распределения в экспоненциальном случае // Теория вероятностей и ее применения. — 2000. — Т. 45, вып. 3. — Р. 437–468.

UDC 519.2

On the asymptotics of large deviation probabilities for some partly or asymptotically homogeneous Markov chains

M. V. Kozlov*

* *Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

The problem of fine asymptotics for the large probability deviations of Markov random walks were studied in the papers of A.A.Borovkov on the years of 1962-63 and has been afterwards intensively elaborated by himself and his disciples. My report is concerned with partly or asymptotically homogeneous Markov chains (in terms of Borovkov) in Cramer case. In the paper of A. A. Borovkov, D. A. Korshunov (2000) the fine asymptotics of large deviation probabilities for partly homogeneous ergodic Markov chain under the Cramer condition has been derived. Some further results can be found in the paper [Kozlov M.V., TVP, Vol. 58, no. 1, 2013). In a series of works of M.V. Kozlov and A.V. Shklyayev the asymptotics of large deviation probabilities for some Branching Processes in Random Environment has been developed. In my report some further possible generalisations and results on the topic are to be demonstrated.

Keywords: random walk, process of the expectation, the condition of the Cramer large deviations of the maximum, conditional limit theorem.

УДК 519.233.33

Робастные GM-оценки в авторегрессии и тесты типа хи-квадрат Пирсона

М. В. Болдин*, М. Н. Петриев*

* Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992

Аннотация. В работе рассматривается ситуация, когда наблюдения за авторегрессией первого порядка содержат грубые ошибки (выбросы или засорения), причём распределение засорений неизвестно и произвольно. В качестве альтернативы оценке наименьших квадратов неизвестного параметра, которая не применима в данной ситуации, предлагается обобщённая M-оценка. Установлена её асимптотическая качественная робастность в терминах равномерной непрерывности семейства предельных функций распределения. На основании этой оценки строится тест типа хи-квадрат Пирсона для проверки гипотезы о виде распределения инноваций и показывается, что асимптотический уровень значимости такого теста будет устойчив к выбросам.

Ключевые слова: авторегрессия, проверка гипотез, GM-оценки, асимптотическая качественная робастность, тесты хи-квадрат Пирсона.

1. Введение

Рассмотрим авторегрессию первого порядка

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_t\}$ независимые одинаково распределённые случайные величины (н.о.р сл. в.) с неизвестной функцией распределения (ф.р.) $G(x)$ и лебеговой плотностью $g(x)$, $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 < \infty$; $|\beta| < 1$, β - неизвестный параметр. Мы предполагаем, что наблюдения авторегрессии могут содержать грубые ошибки (выбросы или засорения), так что вместо $\{u_t\}$ наблюдаются величины:

$$y_t = u_t + z_t^{\gamma_n} \xi_t, \quad t = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

В (1) $\{z_t^{\gamma_n}\}$ - н.о.р.сл.в., имеющие распределение Бернулли $Br(\gamma_n)$, $\gamma_n = \min(1, \frac{\gamma}{\sqrt{n}})$, $\gamma \geq 0$, γ - неизвестный уровень засорения; $\{\xi_i\}$ последовательность н.о.р. сл.в. с неизвестным и произвольным распределением μ . Последовательности $\{u_t\}$, $\{z_t^{\gamma}\}$, $\{\xi_t\}$ предполагаются независимыми между собой.

Схема засорений (1) является локальным вариантом известной схемы засорения данных во временных рядах из [4].

Целью данной работы является решение двух взаимосвязанных задач. Первая из них - построение робастной обобщенной М-оценки (ГМ-оценки) параметра β по наблюдениям $\{y_t\}$. Робастность оценки будет характеризоваться равностепенной непрерывностью семейства предельных распределений оценки в точке $\gamma = 0$. Подобные оценки уже исследовались ранее, см., например, [3], но лишь при не очень естественных моментных ограничениях на засорения. Подчеркнем еще раз – у нас нет никаких ограничений для μ .

С помощью построенной ГМ-оценки мы решаем вторую задачу – построения теста типа хи-квадрат для проверки гипотезы о виде неизвестной ф.р. $G(x)$. Подобная задача в авторегрессии без засорений решалась в [1] с помощью теста Колмогорова. Мы покажем, что наш хи-квадрат тест теперь уже в схеме с засорениями является асимптотически качественно робастным при гипотезе.

2. Построение робастной ГМ-оценки параметра авторегрессии

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - некоторые *à priori* выбранные вещественнозначные функции. Определим процесс

$$l_n(\theta) := n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \varphi(y_{t-1}) \psi(y_t - \theta y_{t-1}).$$

Обобщённая М-оценка определяется как $n^{1/2}$ -состоятельное решение уравнения

$$l_n(\theta) = 0. \quad (2)$$

Сформулируем необходимые в дальнейшем условия:

- (i) $E\psi(\varepsilon_1) = 0$.
- (ii) Функция $\psi(x)$ дважды дифференцируема, причём сама ψ и обе ее производные ограничены.
- (iii) $\sup |\varphi(x)| < \infty$.
- (iv) $E u_0 \varphi(u_0) \int_{\mathbb{R}} g(x) d\psi \neq 0$.

Для изучения поведения ГМ-оценки нам потребуется асимптотическое разложение процесса $l_n(\theta)$ в $n^{-1/2}$ -окрестности истинного значения параметра β . Это разложение нам даёт следующая

Лемма 1. Пусть выполнены условия (i)–(iv). Тогда для любых $0 \leq \Theta < \infty$, $0 \leq \Gamma < \infty$, $\delta > 0$

$$\sup_{\gamma \leq \Gamma} \mathbf{P} \left(\sup_{|\theta| \leq \Theta} |l_n(\beta + n^{-1/2}\theta) - \tilde{l}_n(\beta) + \theta \Delta_1 - \gamma \Delta_2| > \delta \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\text{где } \Delta_1 = E u_0 \varphi(u_0) \int_{\mathbb{R}} g(x) d\psi, \quad \Delta_2 = E \varphi(u_0) E \psi(\varepsilon_1 + \xi_1) + E \varphi(u_0 + \xi_0) \psi(\varepsilon_1 - \beta \xi_0), \quad \tilde{l}_n(\beta) := n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \varphi(u_{t-1}) \psi(\varepsilon_t).$$

Лемма 1 и стандартная техника (см., например, [1], гл. 6) совместно с асимптотической гауссовостью $\tilde{l}_n(\beta)$ влекут следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (i)–(iv). Тогда с вероятностью, стремящейся к единице при $n \rightarrow \infty$, существует последовательность $\hat{\beta}_{n,GM}$ равномерно по $\gamma \leq \Gamma n^{1/2}$ - состоятельных корней уравнения (2). При этом

$$\sup_{x, \gamma \leq \Gamma} \left| P(n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,GM} - \beta) \leq x) - \Phi\left(\frac{x - \gamma \Delta_1^{-1} \Delta_2}{\sigma} \Delta_1\right) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, а $\sigma^2 := E\psi^2(\varepsilon_1)E\varphi^2(u_0)$.

Очевидно, предельное распределение GM-оценки в схеме без засорений с $\gamma = 0$ - нормальное $N(0, \sigma^2/\Delta_1^2)$ с ф.р. $F^Y(x, 0, \mu) := F(x) = \Phi\left(\frac{x\Delta_1}{\sigma}\right)$. Введём обозначение:

$$F^Y(x, \gamma, \mu) := \lim_{n \rightarrow \infty} P(n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,GM}^Y - \beta) \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \gamma \Delta_1^{-1} \Delta_2}{\sigma} \Delta_1\right).$$

Из Теоремы 1 прямо следует асимптотическая качественная робастность обобщённых M-оценок.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (i)–(iv). Тогда $\hat{\beta}_{n,GM}$ - асимптотически качественно робастна, то есть

$$\sup_{x, \mu} |F^Y(x, \gamma, \mu) - F(x)| \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0.$$

3. Тесты типа хи-квадрат Пирсона

В этом разделе мы построим тест типа хи-квадрат Пирсона для проверки гипотезы $H_0 : G(x) = G_0(x)$, $G_0(x)$ - известная функция распределения. Тест будет основан на наблюдениях y_0, \dots, y_n из (1). Пусть $\hat{\beta}_n$ - любая оценка, являющаяся равномерно по $\gamma \leq \Gamma n^{1/2}$ - состоятельной оценкой β . Например, годится оценка $\hat{\beta}_{n,GM}$ из Теоремы 1. Пусть $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\beta}_n y_{t-1}$, $t = 1, \dots, n$ - остатки, а

$$\hat{G}_n(x) := n^{-1} \sum_{t=1}^n I(\hat{\varepsilon}_t \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\hat{G}_n(x)$ - подобие эмпирической функции распределения

$$G_n(x) = n^{-1} \sum_{t=1}^n I(\varepsilon_t \leq x),$$

которая может быть построена лишь гипотетически. Поскольку остатки $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ зависимы между собой, свойства $\hat{G}_n(x)$ нуждаются в изучении.

Теорема 3. Пусть $\sup |g'(x)| < \infty$. Пусть $\Delta(x, \mu) = EG(x + \beta\xi_1) + EG(x - \xi_1) - 2G(x)$. Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $0 \leq \Gamma < \infty$

$$\sup_{\gamma \leq \Gamma} \mathbb{P}(|\hat{G}_n(x) - G_n(x) - \Delta(x, \mu)\gamma| > \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Доказательство Теоремы 3 весьма кропотливо и основано на идеях [2].

Разобьём числовую ось на m непересекающихся полуинтервалов $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, $\Delta_j = (x_{j-1}, x_j]$, $x_0 = -\infty$, $x_m = \infty$, и пусть при H_0

$$p_j^0 := \mathbb{P}(\varepsilon_1 \in \Delta_j) = G_0(x_j) - G_0(x_{j-1}) > 0.$$

Пусть $\hat{\nu}_j$ есть число отстатков $\{\hat{\varepsilon}_t\}$, попавших в Δ_j . Очевидно,

$$\hat{\nu}_j = n[\hat{G}_n(x_j) - \hat{G}_n(x_{j-1})], j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Интересующая нас статистика хи-квадрат имеет вид

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(\hat{\nu}_j - np_j^0)^2}{np_j^0}.$$

Предельное распределение χ_n^2 при H_0 можно найти с помощью Теоремы 3, соотношения (3) и стандартного доказательства теоремы Пирсона. А именно, пусть $F_k(x, \lambda^2)$ будет функция распределения нецентрального распределения хи-квадрат с k степенями свободы и параметром нецентральности λ^2 .

Теорема 4. Пусть $g_0(x) = G_0'(x)$ и $\sup |g_0'(x)| < \infty$. Тогда при H_0

$$\sup_{x, \gamma \leq \Gamma} |\mathbb{P}(\hat{\chi}_n^2 \leq x) - F_{m-1}(x, \lambda^2(\gamma, \mu))| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

где $\lambda^2(\gamma, \mu) = \sum_{j=1}^m \delta_j^2(\mu)/p_j^0$, а $\delta_j(\mu) = \Delta(x_j, \mu) - \Delta(x_{j-1}, \mu)$.

Обозначим $\chi_k(\alpha)$ квантиль уровня α распределения хи-квадрат с k степенями свободы. Будем отвергать H_0 , если $\hat{\chi}_n^2 > \chi_{m-1}(1 - \alpha)$. Асимптотический уровень значимости такого теста равен

$$\hat{\alpha}(\gamma, \mu) = 1 - F(\chi_{m-1}(1 - \alpha), \lambda^2(\gamma, \mu)).$$

Разумеется, в схеме без засорений с $\gamma = 0$ имеем $\hat{\alpha}(0, \mu) = \alpha$. Следующая теорема утверждает, что асимптотический уровень значимости $\hat{\alpha}(\gamma, \mu)$ качественно асимптотически устойчив к выбросам.

Теорема 5. $\sup_{\mu} |\hat{\alpha}(\gamma, \mu) - \alpha| \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0$.

Легко убедиться, что наш тест хи-квадрат состоятелен против стандартной (т.е. $p_j^0 \neq p_j^1$ хоть при одном j) фиксированной альтернативы.

4. Заключение

Исследование авторегрессионных схем с выбросами (засорениями) в наблюдениях – актуальная для приложений задача, она совершенно нетривиальна для теоретического исследования. Приведенные выше результаты – пример ее решения, допускающий многочисленные обобщения. В частности, на многопараметрические линейные и нелинейные авторегрессионные схемы. Мы сделаем это в отдельных публикациях.

Литература

1. Болдин М. В., Симонова Г. И., Тюрин Ю. Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей. — М.: Наука, Физматлит, 1997.
2. Boldin M. V. On empirical processes in heteroscedastic time series and their use for hypothesis testing and estimation // *Mathematical Methods of Statistics*. — 2000. — Vol. 9, no. 1. — P. 65–89.
3. Esaulov D. M. Residual empirical processes and their application to GM-testing for the autoregression order // *Mathematical Methods of Statistics*. — 2013. — Vol. 22, no. 4. — P. 333–349.
4. Martin R. D., Yohai V. J. Influence functionals for time series // *Ann. Statist.* — 1986. — Vol. 14, no. 3. — P. 781–818.

UDC 519.233.33

Robust GM-estimators in the autoregression and Pearson's chi-square tests

M. V. Boldin*, M. N. Petriev*

* *Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

This paper considers the situation where observations of the first-order autoregression contain gross errors (outliers or contaminations), and the distribution of the outliers is unknown and arbitrary. As an alternative to the least-squares estimator, which is not applicable in this situation, the generalized M-estimator for unknown parameter is proposed. The asymptotic qualitative robustness of this estimator in terms of limiting distribution functions equicontinuity is established. On the basis of GM-estimator the Pearson's chi-squared test for hypotheses about the distribution of the innovations is constructed and qualitative robustness of the asymptotic significance level is obtained.

Keywords: autoregression, hypotheses testing, GM-estimators, asymptotic qualitative robustness, Pearson's chi-squared tests.

УДК 519.872

Исследование неоднородной двухфазной системы обслуживания с неограниченным числом приборов, класс заявок в которой определяется состоянием входящего МАР-потока

А. Н. Моисеев*[†], М. А. Шкленник*

* *Институт прикладной математики и компьютерных наук,
Томский государственный университет,
пр. Ленина, д.36, Томск, Россия, 634050*

[†] *Институт прикладной математики и телекоммуникаций,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

Аннотация. В работе представлено исследование двухфазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов на фазах и входящим МАР-потоком. Продолжительность обслуживания на первой фазе и вероятность перехода на вторую фазу зависят от типа заявки, который определяется состоянием МАР-потока в момент ее поступления в систему. Исследование проводится в асимптотических условиях высокой интенсивности входящего потока. Показано, что двумерное совместное распределение вероятностей числа заявок на фазах рассматриваемой системы в указанных асимптотических условиях является гауссовским. В работе получены параметры этого гауссовского распределения.

Ключевые слова: многофазная система обслуживания, разнотипные заявки, неоднородное обслуживание, асимптотический анализ.

1. Введение

В работе исследуется система массового обслуживания (СМО) с двумя фазами, на вход которой поступает МАР-поток заявок [1]. Поступающие заявки типизируются в соответствии с состоянием, в котором находится управляющая цепь МАР в момент поступления заявки. Каждая фаза системы имеет неограниченное число обслуживающих приборов, длительность обслуживания на первой фазе и вероятность перехода заявки на вторую фазу зависят от типа заявки. Решается задача получения совместного стационарного распределения вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования. Задача решена в условиях высокой интенсивности входящего потока аналогично подходу [2].

Исследование, выполненное в работе, по смыслу близко к моделям обслуживания с разнотипными заявками [3]. Однако в настоящей работе применяется немного другой подход к представлению и исследованию моделей с разнотипными заявками, который больше напоминает моделирование систем, функционирующих в случайной среде [4]. В отличие от работ по данной тематике, представленных в научной литературе, в настоящей статье рассматриваются многофазные системы

обслуживания. Кроме того, входящий поток является не простейшим, интенсивность которого меняется в случайной среде, а представляет собой более сложную модель.

2. Математическая модель

Рассматривается двухфазная СМО с входящим МАР-потокком и неограниченным числом приборов на каждой фазе. Закон, определяющий продолжительность обслуживания на первой фазе, а также вероятность перехода на вторую фазу определяются состоянием МАР-потока в момент поступления заявки. МАР задается представлением [1] $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$, где \mathbf{D}_0 и \mathbf{D}_1 – квадратные матрицы размера $L \times L$. Обозначим через $l(t) \in \{1, \dots, L\}$ состояние управляющей цепи МАР, а через θ – вектор-строку ее стационарного распределения вероятностей.

Время обслуживания на первой фазе есть случайная величина, которая определяется одной из функций распределения $A_1(x), \dots, A_L(x)$. Выбор функции распределения $A_l(x)$ производится по значению процесса $l(t) = l$ в момент поступления заявки и не меняется до конца обслуживания. По окончании обслуживания заявка переходит на вторую фазу с вероятностью r_l , либо покидает систему с вероятностью $1 - r_l$. Обслуживание заявок на второй фазе осуществляется в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. По окончании этого обслуживания заявка покидает систему. Будем предполагать, что функции $A_1(x), \dots, A_L(x)$ и $B(x)$ непрерывны, и существуют конечные первые моменты соответствующих распределений.

Ставится задача получения совместного распределения вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования.

3. Уравнения Колмогорова

Обозначим $i_1(t)$ и $i_2(t)$ – число заявок на первой и второй фазах системы в момент времени t . Процесс $\{i_1(t), i_2(t), l(t)\}$ не является марковским и его прямая марковизация не даст полезных результатов для решения задачи. Поэтому воспользуемся методом многомерного динамического просеивания [5], который для данной задачи можно сформулировать следующим образом. Построим два так называемых просеянных потока событий под номерами 1 и 2, которые будут соответствовать фазам исследуемой СМО. Зафиксируем некоторый момент времени T в будущем. Будем генерировать в первом потоке события, соответствующие моментам времени поступления заявок из входящего потока, которые в момент T будут находиться на обслуживании на первой фазе системы. Аналогично установим соответствие второго просеянного потока со второй фазой системы. Обозначим вероятности просеивания заявок в первый и второй потоки соответственно как $S_l(t)$

и $V_l(t)$, где t – момент поступления заявки, l – состояние МАР в этот момент времени. Вероятности $S_l(t)$ и $V_l(t)$, очевидно, зависят также от выбранного момента T , но для простоты не будем обозначать это в явном виде. В работе [6] получены выражения для $S_l(t)$ и $V_l(t)$ в случае, когда все $r_l = 1$. Для рассматриваемой же задачи эти выражения примут вид:

$$S_l(t) = 1 - A_l(T - t), \quad V_l(t) = r_l \cdot [A_l(T - t) - (A_l * B)(T - t)],$$

где $(A_l * B)(x)$ – свертка функций $A_l(x)$ и $B(x)$.

Обозначим через $n_1(t)$ и $n_2(t)$ число событий, наступивших соответственно в первом и втором просеянных потоках до момента $t < T$. Тогда, если в некоторый начальный момент времени $t_0 < T$ система была пуста, имеют места равенства [5]:

$$P \{i_1(T) = m_1, i_2(T) = m_2\} = P \{n_1(T) = m_1, n_2(T) = m_2\}$$

для всех $m_1, m_2 \in 0, 1, 2, \dots$. Случайный процесс $\{l(t), n_1(t), n_2(t)\}$ является марковским. Для его распределения вероятностей $P_l(n_1, n_2, t) = P \{l(t) = l, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2\}$, переходя к характеристическим функциям $H_l(u_1, u_2, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1 + ju_2 n_2} P_l(n_1, n_2, t)$ (здесь $j = \sqrt{-1}$),

можно записать в векторном виде следующую систему дифференциальных уравнений с начальным условием:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1, u_2, t) \{ \mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \cdot [(e^{ju_1} - 1)\mathbf{S}(t) + (e^{ju_2} - 1)\mathbf{V}(t)] \}, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, t_0) = \theta. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$, $\mathbf{S}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$ – диагональные матрицы с элементами $S_l(t)$ и $V_l(t)$ соответственно, $\mathbf{H}(u_1, u_2, t)$ – вектор-строка из элементов $H_l(u_1, u_2, t)$. Так как элементы матриц $\mathbf{S}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$ непрерывны на интервале $[t_0, T]$ в виду свойств функций $A_1(x), \dots, A_L(x)$ и $B(x)$, то на этом интервале задача Коши (3)–(3) имеет единственное решение.

4. Асимптотический анализ

Поскольку прямое решение задачи (3)–(3) не представляется возможным, будем его искать в асимптотическом условии высокой интенсивности входящего потока [2]. Для достижения этого результата МАР зададим представлением $(N\mathbf{D}_0, N\mathbf{D}_1)$, где числовой параметр $N > 0$ будет определять высокую интенсивность входящего потока. Асимптотический анализ будем проводить в условии $N \rightarrow \infty$.

В результате процедуры асимптотического анализа, построенной аналогично [2], получаем следующее решение поставленной задачи:

характеристическая функция асимптотического в условиях высокой интенсивности входящего потока стационарного совместного распределения вероятностей числа заявок на фазах рассматриваемой СМО имеет вид

$$h(u_1, u_2) = \exp \left\{ ju_1Ns + ju_2Nv + \frac{(ju_1)^2}{2}Ns + \frac{(ju_2)^2}{2}Nv + \frac{(ju_1)^2}{2}Ns_2 + \frac{(ju_2)^2}{2}Nv_2 + ju_1ju_2[Nw_{12} + Nw_{21}] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} s &= \theta \mathbf{D}_1 \mathbf{A} \mathbf{e}, & v &= b \theta \mathbf{D}_1 \mathbf{R} \mathbf{e}, \\ s_2 &= -2\theta \mathbf{D}_1 \cdot \int_{-\infty}^T \mathbf{S}(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{S}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}, & v_2 &= -2\theta \mathbf{D}_1 \cdot \int_{-\infty}^T \mathbf{V}(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{V}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}, \\ w_{12} &= -\theta \mathbf{D}_1 \cdot \int_{-\infty}^T \mathbf{S}(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{V}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}, & w_{21} &= -\theta \mathbf{D}_1 \cdot \int_{-\infty}^T \mathbf{V}(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{S}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{e} – единичный вектор-столбец, $\mathbf{R} = \text{diag}\{r_l\}$, $b = \int_0^{\infty} (1 - B(t)) dt$,

$\mathbf{Q} = \mathbf{G} \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{D}_1$, $\mathbf{A} = \text{diag}\{a_l\}$, где $a_l = \int_0^{\infty} (1 - A_l(t)) dt$, а матрица \mathbf{G}

является решением линейного матричного уравнения $\mathbf{G} \mathbf{D} = \mathbf{e} \theta - \mathbf{I}$. Можно показать, что значения интегралов в правых частях выражений для s_2, v_2, w_{12} и w_{21} не зависят от значения T .

Таким образом искомое распределение является асимптотически гауссовским с соответствующими вектором средних и матрицей ковариации, которые могут быть получены из выражения (4).

5. Заключение

В работе показано, что стационарное совместное распределение вероятностей числа заявок в двухфазной СМО с неограниченным числом приборов на фазах и входящим МАР-поток, в которой продолжительность обслуживания заявки на первой фазе и вероятность ее перехода на вторую фазу зависят от типа заявки, определяемого состоянием МАР-потока в момент ее поступления, в условиях высокой интенсивности входящего потока имеет вид двумерного гауссовского распределения. В работе получены параметры этого распределения.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ (Соглашение № 02.а03.21.0008).

Литература

1. *Chakravarthy S. R.* Markovian arrival processes. — Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, 2010.
2. *Moiseev A., Nazarov A.* Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process // Communications in Computer and Information Science. — 2016. — Vol. 601. — P. 323–333.
3. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing system $M\bar{A}P/M/\infty$ with n types of customers // Communications in Computer and Information Science. — 2014. — Vol. 487. — P. 356–366.
4. *O’Cinneide C. A., Purdue P.* The $M/M/\infty$ queue in a random environment // Journal of Applied Probability. — 1986. — Vol. 23, no. 1. — P. 175–184.
5. *Моисеев А. Н., Назаров А. А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. — Томск: Изд-во НТЛ, 2015.
6. *Моисеев А. Н., Назаров А. А.* Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. — 2014. — Т. 50, № 2. — P. 67–76.

UDC 519.872

Heterogeneous infinite-server queueing tandem with customers’ type defined by state of Markovian arrival process

A. N. Moiseev*[†], M. A. Shklennik*

* *Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
Tomsk State University,
Lenin ave. 36, Tomsk, 634050, Russia*

[†] *Institute of Applied Mathematics and Communications Technology,
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University),
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

This paper presents an investigation of an infinite-server queueing tandem with the Markovian arrival process. The service time at the first stage and the probability of customers transition to the second stage are determined by the type of the customer that corresponds to the state of the arrival process at the time when the customer arrived. A study of the system was performed under an asymptotic condition of high rate of arrivals. It is shown that under the condition, the joint stationary probability distribution of the number of customers at the stages of the tandem is two-dimensional Gaussian. Parameters of the Gaussian distribution are also obtained.

Keywords: queueing tandem, multi-type customers, heterogeneous service, asymptotic analysis.

UDC 517.958:530.145

Quantum-semiclassical approach for treating excitation and ionization of hydrogen-like atoms and ions in collisions with heavy particles

V. S. Melezhik*†

* *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics,
Joint Institute for Nuclear Research,
Dubna, Moscow region, 141980, Russia*

† *Peoples' Friendship University of Russia
(RUDN University)*

Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

Abstract. We have developed a quantum-semiclassical approach for treating dynamics of few-dimensional quantum systems. In this approach the problem is reduced to Schrödinger-like equations for some degrees of freedom which integrated symphoniously with the classical equations describing the remaining part. This approach was successfully applied for treating self-ionization of hydrogen-like ions in magnetic fields, break-up of some halo nuclei and for excitation and ionization of helium ions by protons. Here we present the method application to calculation of ionization and excitation/deexcitation of helium ions by slow antiprotons. The calculated cross sections are important for experimental investigations in antiproton physics and provide a strong challenge to theory. The method can be applied for other actual problems in few body physics.

Keywords: computational methods, transition probabilities.

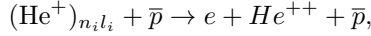
1. Introduction

The idea to simultaneously treat quantum and classical degrees of freedom goes back to Refs. [1, 2] where it was applied to the collisional dynamics of molecular processes. One can also note the similar self-consistent classical-quantal treatment of muon capture by the hydrogen atoms [3] and time-dependent calculations of the atomic hydrogen ionization by antiproton impact [4].

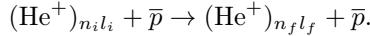
Following this idea we have developed quantum-semiclassical approach for treating different quantum dynamics in three-body collisions and two-body charged systems in magnetic fields [5, 6]. Key element of the approach is the integration of the arising time-dependent 3D Schrödinger equation for which we have developed an efficient computational split-operator scheme with non-direct product discrete-variable approximation (npDVR) for angular variables [7–9]. Here, we apply this scheme to calculation of ionization and excitation/deexcitation of helium ions by slow antiprotons - an actual problem of antiproton physics.

2. Computational scheme

We present here the key elements of the computational scheme in application to the reactions



and



These transitions are effected by the time-dependent Coulomb field between the He^+ and the antiproton.

We describe the collisions by the 3D time-dependent Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = [H_0(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}, \mathbf{R}(t))] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

coupled with the classical Hamiltonian equations for the antiproton degrees of freedom $\mathbf{R}(t)$. Here, the wave packet $\psi(\mathbf{r}, t)$ corresponds to the relative motion of the electron and the helium nucleus. In the above expression,

$$H_0 = -\frac{1}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} - \frac{2}{r}$$

is the internal Hamiltonian of He^+ with reduced mass $\mu = m_e m_{\text{He}}/M$, where m_e and m_{He} are the masses of the electron and helium nucleus, respectively, and $M = m_e + m_{\text{He}}$. The interaction of the projectile \bar{p} with the target He^+ is given by

$$V(\mathbf{r}, t) = -\frac{2}{|\mathbf{R}(t) + m_e \mathbf{r}/M|} + \frac{1}{|\mathbf{R}(t) - m_{\text{He}} \mathbf{r}/M|}, \quad (2)$$

where $\mathbf{R}(t)$ is the relative coordinate between the projectile and the center-of-mass of the target. The Schrödinger equation (1) is integrated simultaneously with the classical Hamilton equations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} H_{cl}(\mathbf{P}(t), \mathbf{R}(t)), \\ \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} H_{cl}(\mathbf{P}(t), \mathbf{R}(t)), \end{aligned}$$

where

$$H_{cl}(\mathbf{P}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2M_0} \mathbf{P}^2 + H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \langle \psi(\mathbf{r}, t) | V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

with $M_0 = m_p M / (m_p + M)$. The computational scheme includes the coupling $\langle \psi(\mathbf{r}, t) | V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle$ between the electron and antiproton variables and conserves the total energy of the system.

We use npDVR on the subspace grid (θ_i, ϕ_i) for the angular variables of the electron coordinate \mathbf{r} [9]. This yields a diagonal representation for the interaction $V(r, \theta_i, \phi_i, t)$ between the projectile and the target. As a consequence, the problem is reduced to the Schrödinger-type time-dependent radial equations coupled only through the nondiagonal angular part of the kinetic energy operator. This equation is propagated using a split-operator method, which permits fast diagonalization of the remaining nondiagonal part [8, 9]. For discretizing with respect to the radial variable r , a sixth-order finite-difference approximation on a quasi-uniform grid is used. The scheme is unconditionally stable, maintains unitarity, and has the same order of accuracy as the conventional Crank-Nicolson algorithm [9]. It allows a full 3D quantal treatment of the electronic motion during the collisions. The only additional simplification is the use of the classical approximation for the relative projectile-target trajectory $\mathbf{R}(t)$, which is

Table 1

Excitation/deexcitation $\sigma_{ex}(n_i l_i, n_f)$ and ionization $\sigma_{ion}(n_i l_i)$ cross sections from the initial states $n_i l_i = 1s, 2s, 2p$ of the He^+ for a few antiproton energies

$E_{\bar{p}}$ (in units of 10^{-18} cm^2). The cross sections are calculated for final $n_f = 1, \dots, 10$ and summed over final quantum numbers l_f and m_f of the He^+ .

$E_{\bar{p}}$	100 keV			10 keV			1 keV		
	1s	2s	2p	1s	2s	2p	1s	2s	2p
1		0.68	2.46		0.67	1.07		1.18	0.16
2	8.03			3.99			1.65		
3	1.59	186.	233.	0.927	190.	202.	0.451	144.	122.
4	0.580	34.4	41.0	0.370	57.8	59.9	0.155	41.4	35.8
5	0.279	12.8	15.1	0.188	24.0	24.1	0.120	29.8	24.9
6	0.156	6.37	7.42	0.108	12.6	12.5	0.066	15.3	13.0
7	0.096	3.67	4.27	0.067	7.53	7.42	0.045	9.88	8.47
8	0.064	2.35	2.73	0.045	4.90	4.82	0.031	6.55	5.61
9	0.044	1.58	1.82	0.031	3.34	3.28	0.023	4.55	3.89
10	0.032	1.12	1.30	0.023	2.40	2.35	0.016	3.26	2.77
<i>ion</i>	9.76	93.6	103.	4.73	180.	162.	1.64	90.0	73.1

physically well-justified for the range of the velocities considered in the present work.

Our scheme has principal advantage as compared with the previous classical-quantal approaches [1–4]. In previous calculations, the Schrödinger equation was solved with an expansion in spherical harmonics. Therefore it requires analytical treatment of the angular part of the necessary integrals. In such a scheme, the matrix elements H_{cl} can be calculated only with a multipole expansion of the time-dependent potential (2) [1,2], which in some kinematical regions can be a challenging computational problem. Our approach is free from this drawback since in npDVR the matrix (2) is diagonal, and the diagonal elements are simply the values of the potential $V(\mathbf{r}, t)$ at the angular grid points.

3. Ionization and excitation/deexcitation of hydrogen and helium in slow collisions of antiprotons

We apply here our scheme for computation of the ionization and excitation/deexcitation cross sections of He^+ in slow collisions with antiprotons: see Table 1. Particularly, we have calculated for the first time the excitation cross sections from the initial states $n_i = 1, 2$ to all possible excitations up to $n_f=10$.

There has been done a large number of theoretical studies of the \bar{p} -H and \bar{p} -He⁺. However, more or less convergent results were obtained only for ionization in the collisions \bar{p} -H(1s) and \bar{p} -He⁺(1s) from the ground states and also some attempts were done for collisions \bar{p} -He⁺(2s) from 2s excited state (see [10–12] and Refs. therein).

4. Conclusions

We have calculated cross sections of ionization and excitation/deexcitation of helium ions by slow antiprotons. The cross sections are in demand in experimental investigations in antiproton physics. The developed quantum-semiclassical approach opens, thanks to its efficiency and flexibility, unique possibilities for treating different cascade processes and other actual problems of few-body physics.

Acknowledgments

The work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Agreement No. 02.a003.21.0008).

References

1. *McCann K. J., Flannery M. R.* A multistate semiclassical orbital treatment of heavy-particle collisions with application to $He - H_2$ rotational transitions // *Chem. Phys. Lett.* — 1975. — Vol. 35, no. 1. — P. 124–130.
2. *Billing G. D.* Semi-classical calculations of rotational/vibrational transitions in $He - H_2$ // *Chem. Phys.* — 1975. — Vol. 9, no. 3. — P. 359–369.
3. *Kwong N. H., Garcia J. D., Cohen J. S.* Classical-quantal coupling in the capture of muons by hydrogen atoms // *J. Phys. B.* — 1989. — Vol. 22. — P. L633–L638.
4. *Tong X. M., Watanabe T., Kato D., Ohtani S.* Ionization of atomic hydrogen by antiproton impact: A direct solution of the time-dependent Schrödinger equation // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Vol. 64. — Article ID 022711.
5. *Melezhik V., Schmelcher P.* Quantum energy flow in atomic ions moving in magnetic fields // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 84, no. 9. — P. 1870–1873.
6. *Melezhik V. S., Cohen J. S., Chi-Yu Hu.* Stripping and excitation in collisions between p and He^+ ($n \leq 3$) calculated by a quantum time-dependent approach with semiclassical trajectories // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Vol. 69. — Article ID 032709.
7. *Melezhik V. S.* Polarization of harmonics generated from a hydrogen atom in a strong laser field // *Phys. Lett. A.* — 1997. — Vol. 230. — P. 203–208.
8. *Melezhik V. S., Baye D.* Nonperturbative time-dependent approach to breakup of halo nuclei // *Phys. Rev. A.* — 1999. — Vol. 59. — P. 3232–3239.
9. *Melezhik V. S.* Mathematical modeling of ultracold few-body processes in atomic traps // *EPJ Web of Conf.* — 2016. — Vol. 108. — Article ID 01008.
10. *Abdurakhmanov I. B., Kadyrov A. S., Bray I.* Wave-packet continuum-discretization approach to ion-atom collisions: Nonrearrangement scattering // *Phys. Rev. A* — 2016. — Vol. 94. — Article ID 022703.
11. *Kirchner T., Knudsen H.* Current status of antiproton impact ionization of atoms and molecules: theoretical and experimental perspectives // *J. Phys. B.* — 2011. — Vol. 44. — P. 49–68.
12. *Sahoo S, Mukherjee S. C., Walters H. R. J.* Ionization of atomic hydrogen and He^+ by slow antiprotons // *J. Phys. B.* — 2004. — Vol. 37. — P. 3227–3233.

О численных исследованиях точности аппроксимаций в центральной предельной теореме

В. В. Сенатов*

** Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. Рассматриваются вопросы, связанные с точностью аппроксимации в ЦПТ. Приводятся численные и графические иллюстрации.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, точность аппроксимации, асимптотические разложения.

Цель данной работы — изучение аппроксимаций, которые строятся с помощью асимптотических разложений в центральной предельной теореме (ЦПТ). Для них будут указаны явные оценки точности, которые они гарантируют, и мы сравним их с реальной точностью для тех исключительных случаев, когда многократные свёртки $F^{*n}(x)$ функции распределения $F(x)$ исходных случайных величин вычисляются в явном виде. Интерес к таким аппроксимациям связан с тем, что в ЦПТ аппроксимация “чистым” нормальным законом оказывается слишком грубой.

Пусть X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределённые случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и функцией распределения $F(x)$. Обозначим $F_n(x) = F^{*n}(\sqrt{n}x)$ функцию распределения нормированной суммы

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

и $G(x)$ — функцию распределения нормального закона с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Мы рассмотрим локальную форму ЦПТ для плотностей гладких распределений. Здесь мы называем гладкими функции распределения $F(x)$, для которых при некотором $\nu > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^\nu dt < \infty, \quad (1)$$

где $f(t)$ — характеристическая функция для $F(x)$. Выполнение этого условия гарантирует существование непрерывных и ограниченных плотностей $p_n(x) = F'_n(x)$ при $n \geq \nu$ и справедливость локальной формы ЦПТ: $p_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$, $-\infty < x < +\infty$. Нам понадобятся моменты α_k и абсолютные моменты β_k функции распределения $F(x)$. Мы будем использовать многочлены Чебышева — Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)}$$

и моменты Чебышева — Эрмита

$$\theta_k = \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(x) dF(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

функции распределения $F(x)$. Отметим, что $H_4(x) = x^3 - 3x$, $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$, $H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$, $H_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 - 105$ и для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией $\theta_3 = \alpha_3$, $\theta_4 = \alpha_4 - 3$.

Теорема 1. *Если для функции распределения $F(x)$ выполнено условие (1) и её пятый момент конечен, то*

$$\begin{aligned} & \left| p_n(x) - \left(1 + \frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \right) \varphi(x) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{\theta_4}{4! n} H_4(x) \varphi(x) + \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} \left(\frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} \right)^2 H_6(x) \varphi(x) \right| + O\left(\frac{1}{n^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} & O\left(\frac{1}{n^{3/2}} \right) \leq \\ & \leq \frac{\|\theta_5\|}{5! n^{3/2}} B_{5,n} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\theta_3|}{3! \sqrt{n}} \frac{|\theta_4|}{4! n} + \frac{|\theta_3|}{3! \sqrt{n}} \frac{\|\theta_4\|}{4! n} \right) B_{7,n} + \frac{1}{6} \left| \frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} \right|^3 B_{9,n} + \\ & + \left(\frac{|\theta_4|}{4! 2} + \frac{1}{48} \right) \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_4|}{4! n} \frac{\|\theta_4\|}{4! n} B_{8,n} + \frac{1}{6} \left(\frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} \right)^2 \frac{\|\theta_4\|}{4! n} B_{10,n} + \\ & + \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi} \int_T^{+\infty} |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{\pi T} e^{-T^2 n/2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее $T > 0$ — число, выбор которого находится в нашем распоряжении,

$$B_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt,$$

$\mu(t) = \max\{|f(t)|, e^{-t^2/2}\}$ и существует $T > 0$ такое, что

$$B_{k,n} \rightarrow B_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \varphi(x) dx \quad n \rightarrow \infty,$$

$\alpha(T) = \sup\{|f(t)| : t \geq T\} < 1$, $\|\theta_4\| = \alpha_4 + 3$, $\|\theta_5\| = \beta_5 + 10|\alpha_3|$.

Величина $\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x)$ является первым членом асимптотического разложения разности $p_n(x) - \varphi(x)$, она эквивалентна этой разности при $n \rightarrow \infty$ для всех x , где $H_3(x)$ не обращается в нуль. Функция, стоящая под знаком модуля в правой части (2) является вторым членом разложения Грама – Шарлье разности $p_n(x) - \varphi(x)$, она эквивалентна функции

$$\left| p_n(x) - \left(1 + \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x) \right) \varphi(x) \right|$$

при $n \rightarrow \infty$ для всех x , где она не обращается в нуль. Нас будет интересовать вопрос о том, при каких значениях n левая часть (2) не превосходит 10^{-3} и связанные с этим величины.

Рассмотрим функцию распределения $F(x)$ с плотностью $p(x) = e^{-(x+1)}$, $x \geq -1$, и $p(x) = 0$, $x < -1$. Хорошо известно, что многократные свёртки плотности $q(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, и $q(x) = 0$, $x < 0$, вычисляются в явном виде, для натуральных n они суть

$$q^{*n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x}, \quad x \geq 0; \quad q^{*n}(x) = 0, \quad x < 0,$$

это — плотности распределений Эрланга. Отсюда легко следует, что

$$p_n(x) = \sqrt{n} \frac{n^n}{n!e^n} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}x}, \quad x \geq -\sqrt{n}; \quad p_n(x) = 0, \quad x < -\sqrt{n}.$$

Вычисления по этой формуле не представляют труда, более того, с помощью пакета программ, который доступен на сайте ru.numberempire.com, в котором есть графопостроитель, легко нарисовать график функции $p_n(x)$, равно как и графики других функций, участвующих в формуле (2). При этом следует учесть, что для указанной функции $F(x)$ величины $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 9$, поэтому $\theta_3/3! = 1/3$, $\theta_4/4! = 1/4$. При использовании упомянутого графопостроителя следует учесть, что он не понимает, что такое $n!$, поэтому величину $\sqrt{n} \frac{n^n}{n!e^n}$ нужно вычислять отдельно, например, при $n = 100$ её значение приблизительно равно 0.39861.

Для указанной функции распределения легко вычислить все величины из (2). Нетрудно проверить, что $|f(t)| = 1/\sqrt{1+t^2}$, поэтому

можно взять $\nu = 2$ легко понять, что $\mu(T) = 1/\sqrt{1+T^2}$ для любого $T > 0$,

$$B_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \frac{|t|^k}{(1+t^2/n)^{(n-1)/2}} dt,$$

максимальное значение $k = 10$ и для $n > 12$ можно переходить к пределу по $T \rightarrow \infty$, при этом $B_{k,n} \rightarrow B_k, n \rightarrow \infty$. Последние интегралы можно выразить через бета-функции. Числа B_k при нечётных $k = 2l + 1$ суть $2^l l!/\pi$, при чётных k они суть $(k-1)!/\sqrt{2\pi}$. Учитывая сказанное, и заменяя $B_{k,n}$ на B_k , нетрудно проверить, что в (2) при больших n

$$O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \leq \frac{4.03}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^2},$$

при этом мы учли, что $\beta_5 < 44.5$.

Для нашей функции распределения $F(x)$ левая часть (2) не превосходит 10^{-3} при $n \geq 114$, для этого n максимум первого слагаемого в правой части (2) равен 0.00088 и величина $O(1/n^{3/2})$ меньше 0.0039. Оценку последней величины можно существенно улучшить, привлекая третий член асимптотического разложения разности $p_n(x) - \varphi(x)$ (см. например, [1]). Отметим, что для нашего распределения при $n = 114$ величина $\max_x |p_n(x) - \varphi(x)|$ равна 0.018, она становится меньше 10^{-3} лишь при $n > 34000$.

Оценка величины $O(1/n^{3/2})$ из правой части (2) является довольно громоздкой. Для левой части (2) справедлива более простая оценка, справедливая, к тому же, для функций распределения $F(x)$ с конечным четвёртым моментом. Эта оценка имеет вид

$$\begin{aligned} & \left| p_n(x) - \left(1 + \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x) \right) \varphi(x) \right| \leq \\ & \leq \frac{\|\theta_4\|}{4!n} B_{4,n} + \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} \left(\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} \right)^2 B_{6,n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \leq \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!n^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_3|}{3!\sqrt{n}} \frac{\|\theta_4\|}{4!n} + \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi} \int_T^{+\infty} |f(t)|^\nu dt + \frac{e^{-T^2 n/2}}{\pi T},$$

$$\|\theta_5^{(3)}\| = 10|\alpha_3|.$$

Сумма двух первых слагаемых из правой части (3) оценивает первое слагаемое из правой части (2), однако, эта сумма почти в десять раз больше первого слагаемого из правой части (2). То есть, в оценке (2) мы, усилив (по сравнению с оценкой (3)) условие на моменты $F(x)$, улучшили величину в правой части, убывающую при росте n

как $1/n$ и сделали её эквивалентной оцениваемой величине. При этом ухудшилась оценка величины, убывающей при росте n как $1/n^{3/2}$. Отметим, что в отмеченном улучшении решающую роль сыграло то, что функции под знаком модуля в (2) таковы, что в точках локальных экстремумов одной из них другая имеет противоположные знаки и при сложении они компенсируют друг друга.

Заканчивая обсуждение теоремы 1, отметим, что распределения нормированных сумм независимых случайных величин с указанной функцией распределения очень плохо приближаются «чистым» нормальным законом и это связано с тем, что указанное распределение очень асимметрично.

Рассмотрим теперь случай симметричных распределений.

Теорема 2. *Если для симметричной функции распределения $F(x)$ выполнено условие (1) и её восьмой момент конечен, то*

$$\begin{aligned} & \left| p_n(x) - \left(1 + \frac{\theta_4}{4!n} H_4(x) \right) \varphi(x) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{\theta_6}{6!n^2} H_6(x) \varphi(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_4}{4!n} \right)^2 H_8(x) \varphi(x) \right| + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Величина $\frac{\theta_4}{4!n} H_4(x) \varphi(x)$ является первым членом асимптотического разложения разности $p_n(x) - \varphi(x)$, она эквивалентна этой разности при $n \rightarrow \infty$ для всех x , где $H_4(x)$ не обращается в нуль. Функция, стоящая под знаком модуля в правой части (4) является вторым членом разложения функции Эджворта – Крамера разности $p_n(x) - \varphi(x)$, она эквивалентна функции

$$\left| p_n(x) - \left(1 + \frac{\theta_4}{4!n} H_4(x) \right) \varphi(x) \right|$$

при $n \rightarrow \infty$ для всех x , где она не обращается в нуль. Нас вновь будет интересовать вопрос о том, при каких значениях n левая часть (4) не превосходит 10^{-3} и связанные с этим величины.

Мы не будем выписывать явную оценку величины $O(1/n^3)$, её можно найти в [2]. Мы ограничимся её оценкой для равномерного распределения на $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Для этого распределения (при больших n) $O(1/n^3) < 2.94/n^3$. Для этого распределения известны явные формулы для $p_n(x)$, которые можно найти, например, в [2]. Вычисления по этим формулам показывают, что при $n = 5$ максимальное значение левой части (4) есть $0.9 \cdot 10^{-3}$ (при $n = 4$ оно равно $1.56 \cdot 10^{-3}$). При $n = 5$ максимальное значение первого слагаемого в правой части (4) есть $0.683 \cdot 10^{-3}$, оно существенно меньше (в 34 с лишним раза) величины $O(1/n^3)$. Отметим, что максимальное значение первого слагаемого в правой части (4) сравнимо с величиной $O(1/n^3)$ при n порядка 170.

Отметим также, что при $n = 5$ максимальное значение $|p_n(x) - \varphi(x)|$ чуть больше 0.0123 и оно становится меньше 10^{-3} при $n > 60$.

Оценка величины $O(1/n^3)$ из правой части (4) является довольно громоздкой, поэтому мы её и не выписали. Для левой части (4) справедлива более простая оценка, справедливая, к тому же, для функций распределения $F(x)$ с конечным шестым моментом. Эта оценка имеет вид

$$\left| p_n(x) - \left(1 + \frac{\theta_4}{4!n} H_4(x) \right) \varphi(x) \right| \leq \frac{\|\theta_6\|}{6!n^2} B_{6,n} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_4|}{4!n} \frac{\|\theta_4\|}{4!n} B_{8,n} + K, \quad (5)$$

где

$$\frac{\|\theta_6\|}{6!} = \frac{\alpha_6}{6!} + \frac{\alpha_4}{4!2} + \frac{1}{12}$$

и K является суммой трёх слагаемых, убывающих при росте n экспоненциально быстро, сейчас они для нас не интересны. Нетрудно понять, что сумма двух первых слагаемых из правой части (5) оценивает первое слагаемое из правой части (4), но эта оценка примерно в 56 раз грубее оцениваемой величины. То есть, в оценке (4) мы, усилив (по сравнению с оценкой (5)) условие на моменты $F(x)$, улучшили величину в правой части, убывающую при росте n как $1/n^2$ и сделали её эквивалентной оцениваемой величине. При этом в оценке (4) появилась величина, убывающая при росте n как $1/n^3$.

Отметим, что и здесь в отмеченном улучшении решающую роль сыграло то, что функции под знаком модуля в (4) таковы, что в точках локальных экстремумов одной из них другая имеет противоположные знаки и при сложении они компенсируют друг друга.

Литература

1. *Senatov V. V.* On quasi-nonuniform estimates for asymptotic expansions in the central limit theorem // *J. Math. Sci.* — 2016. — Vol. 218, no. 3. — P. 335–353.
2. *Сенатов В. В.* О реальной точности аппроксимаций в центральной предельной теореме. II // *Математические труды.* — 2016. — Т. 19, вып. 2. — С. 170–199.

On numerical studies of the accuracy of approximations in the central limit theorem

V. V. Senatov*

** Department of Probability Theory,
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

We consider the questions connected with accuracy of approximations in the CLT. Numerical and graphic illustrations are given.

Keywords: central limit theorem, accuracy of approximation, asymptotic expansions.

UDC 519.2

A probability model for Assessments of system loads

S. A. Alawadhi

*Department of Statistics and OR,
Kuwait University,
Kaldiya SAFAT 13060, Kuwait*

Abstract. Let X_1, X_2, \dots be a sequence of i.i.d random variable representing successive loads on a system. A system is over loaded by X_n , off target, if the moving average exceeds a critical level. By introducing a two states Markov chain, a formula is established to measure the stationary distribution and the return period of the state of the overload. Closed forms for the return period are provided when loads follow exponential, normal or Poisson distribution. A system design policy is introduced to meet a prescribed *on target percentage*. A case study on law violations reported to police stations in some districts in Kuwait is also included.

Keywords: Markov chain, computational methods, stationary distributions.

1. Introduction

Let X_1, X_2, \dots be a sequence of independent and identically distributed random variables, and let Y_n be the corresponding left sided moving average, as defined in the abstract. In practice, the input sequence $\{X_n\}$ may represent successive loads, excess loads, rain falls, water supply in successive periods, service time to the n^{th} arrival, etc; and the moving averages are processes indicating accumulations of certain number of immediate prior inputs. Thus by taking into account $K - 1$ immediate prior inputs to the n^{th} input, the cumulative value corresponding to the n^{th} input is $\sum_{i=0}^{K-1} X_{n-i}$, $n = K, K + 1, K + 2, \dots$, and $Y_n = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} X_{n-i}$, $n = K, K + 1, K + 2, \dots$ is a sequence of moving averages. The process Y_n is off or on target at the commencement of the arrival of the $(n + 1)^{\text{th}}$ input if $Y_n > L$ or $Y_n \leq L$ respectively. The threshold L is non-random and is considered as a parameter. Our aim in this article is to specify, or estimate, L so that the moving averages remains $(1 - a)\%$, $0 < a < 1$, of times on target.

We prove that the status, off or on target, is indeed a two state Markov chain, and derive formulas for the transition probabilities in terms of the distribution of the inputs. This allows to define a prescribed "on target significant level" for the moving averages, and then proceed to introduce a method to achieve the aim. We have examined our method for exponential or normal inputs. Interestingly in these cases L turns out to be linear in the mean of the distribution of the inputs, μ_{X_1} . Point estimation and interval estimation can be easily established using the derived linear relationships.

The methodology and results presented in this article, we believe, can be applied in Reliability, Control Theory, System Assessments, and Hydrology. Moving averages are classical tools in time series, stochastic processes and scan statistics; and are basis for many linear and nonlinear models. Moving averages, in the content presented here, had not been treated in other works, to the best of the authors' knowledge. The threshold of moving averages, considered in this article, is different from the threshold moving average which is a nonlinear model, De Gooijer (1998). Two-state Markov chains, in contents different from the one presented in this article, have been employed by different authors as underlying probability models of various hydrology events, Vogel (1987). The works Bonifacio and Salas (1999) and references therein are rich in providing applications of these types of probability techniques to hydrology data.

2. A Markov Chain

Let X_1, X_2, \dots , and Y_n be as defined in the Introduction. Define

$$V_n = \begin{cases} 0, & Y_n > L \\ 1, & Y_n \leq L \end{cases}, n = K, K + 1, \dots$$

We recall that the situation $V_n = 0$ indicates that Y_n is off target by X_n , while $V_n = 1$ indicates that it is not. We prove below that $\{V_n\}$ is indeed a Markov chain and provide its transition probabilities.

Lemma 1. The process V_n , $n = K, K + 1, \dots$, is a Markov chain with transition probabilities.

$$P_{00} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F(KL - t)]^2 f_{T_{K-1}}(t) dt}{1 - F_{T_K}(KL)}, \quad K \geq 1, \quad (2.1)$$

$$P_{11} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [F(KL - t)]^2 f_{T_{K-1}}(t) dt}{F_{T_K}(KL)}, \quad K \geq 1, \quad (2.2)$$

where F is the distribution of X_1 , and $T_K = X_1 + X_2 + \dots + X_K$, $T_0 = 0$.

By using the transition probabilities, the stationary distribution of the Markov Chain $\{V_n\}$ is easily given by

$$\pi_0 = \frac{P_{10}}{P_{10} + P_{01}}, \quad \pi_1 = \frac{P_{01}}{P_{10} + P_{01}}, \quad (2.3)$$

Karlin and Taylor (1998). The return period of the state 0 and state 1 are respectively

$$m_{00} = \frac{1}{\pi_0}, \quad m_{11} = \frac{1}{\pi_1},$$

which specify the duration of successive visits to these states. Other duration are measured by

$$m_{01} = \frac{1}{1 - P_{00}}, \quad m_{10} = \frac{1}{1 - P_{11}}.$$

Now we are in a position to define “on target significant level”.

Definition 1.1. We call the $(1 - a)\%$ the “on target significant level” of the moving average process $\{Y_n\}$, where $a = \pi_0$ is the stationary probability of the state 0 of the Markov chain $\{V_n\}$.

3. Exponential And Normal Inputs

In this section we establish a relationship between the threshold L and the mean of the distribution of inputs, whenever the distribution is exponential or normal. Let us assume loads X_1, X_2, \dots are i.i.d. exponentially distributed with parameter λ , $E(X_1) = 1/\lambda$. The following theorem specifies the appropriate threshold for the moving average to possess the on target $(1 - a)\%$ significant level. **Theorem 3.1.** If inputs X_1, X_2, \dots follow exponential distribution with parameter λ , then the least value L for the threshold to ensure $(1 - a)\%$ on target significant level for the moving average Y_n is given by

$$L = \frac{\theta(a, K)}{K} \left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{3.1}$$

where $\theta(a, K)$ is the positive solution to the equation

$$\pi_1(\theta, K) = 1 - a, \tag{3.2}$$

and $\pi_1(\theta, K)$ is given by (2.3) with

$$P_{00} = (K - 1) \frac{N(\theta, K - 2)}{(K - 1)! - G(\theta, K - 1)}, \quad \theta = \lambda KL, \tag{3.3}$$

and

$$P_{11} = (K - 1) \frac{G(\theta, K - 2) + N(\theta, K - 2) - \frac{2}{K-1} e^{-\theta} \theta^{K-1}}{G(\theta, K - 1)}, \quad \theta = \lambda KL, \tag{3.4}$$

where

$$G(\theta, K) = \int_0^\theta x^K e^{-x} dx, \quad N(\theta, K) = \int_0^\theta (\theta - x)^K e^{-(\theta+x)} dx.$$

Remark 3.1. For $K = 7$, we solved (3.2) for the $\theta(a, K)$ with different values of $1 - a$, using Mathematica 3.0, Wolfram (1991). The solutions are

given in Table 1. We notice from Fig. 2 that $\pi_1(\theta, 7)$ is strictly increasing, providing a unique solution for $\theta(a, 7)$.

Table 1: Exponential Distribution; Significant Levels and Corresponding $\theta(a, 7)$ in (3.2).

$1 - a$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$\theta(a, 7)$	8.197	5.651	3.507	1.625	0

Normal Distribution. Suppose the inputs X_1, X_2, \dots are i.i.d normally distributed with mean μ and standard deviation σ . Interestingly, in this case also L is linear in μ . Details are given below.

Theorem 3.2. If inputs X_1, X_2, \dots follow normal distribution with mean μ and standard deviation σ , then the least value L for the threshold to ensure $(1 - a)\%$ on target significant level for the moving average Y_n is given by

$$L = \mu + \eta(a, K)\sigma, \quad (3.5)$$

where $\eta(a, K)$ is the solution to the equation

$$\pi_1(\eta, K) = 1 - a, \quad (3.6)$$

and $\pi_1(\eta, K)$ is given by (2.3) with

$$P_{00} = \frac{C(\eta, K)}{1 - \Phi(\sqrt{K}\eta)}, \quad \eta = \frac{L - \mu}{\sigma}, \quad (3.7)$$

and

$$P_{11} = \frac{B(\eta, K)}{\Phi(\sqrt{K}\eta)}, \quad \eta = \frac{L - \mu}{\sigma} \quad (3.8)$$

where

$$C(\eta, K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(K-1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Phi(x)]^2 e^{-\frac{1}{2(K-1)}(x-K\eta)^2} dx,$$

and

$$B(\eta, K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(K-1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(x)]^2 e^{-\frac{1}{2(K-1)}(x-K\eta)^2} dx,$$

Remark 3.2. For $K = 4$, the (3.6) is solved for $\eta(a, K)$ with different values for $1 - a$, using Mathematica. The version of Mathematica that we used did not solve the (3.6) directly, so we had to bypass this barrier

 Table 2: Normal Distribution; Significant levels and corresponding $\eta(a)$ in (3.6)

$1 - a$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$\eta(a)$	0.65	0.47	0.28	0.14	0

by approximating the integrals involved in the equation by corresponding summations. The solutions are given in Table 2. The threshold L in (3.1) is also plotted in terms of the mean μ for $\sigma = 1$

Remark 3.3. The (3.1) and (3.5) can also be used estimation purposes when L is considered as an unknown parameter. It easily follows that for exponential and normal inputs, respectively

$$\hat{L} = \frac{\theta(a, K)}{K} \bar{x},$$

$$\hat{L} = \bar{x} + \eta(a, K)s.$$

Remark 3.4. Although the exponential and normal distributions were treated explicitly, the method, nevertheless, can be carried out for other distributions in order to identify or estimate the threshold parameter.

References

1. *Bonifacio F., Salas G. D.* Return Period and risk of hydrologic events // Journal of Hydrologic Engineering. — 1999. — Vol. 4, no. 4. — P. 297–315.
2. *De Gooijer J.* On threshold moving-average models // J. Time Ser. Anal. — 1998. — Vol. 19, no. 1. — P. 1–18.
3. *Karlin S., Taylor H. M.* An Introduction Stochastic Modeling. — Academic Press, New York, 1998.
4. *Vogel R. M.* Reliability indices for water supply and generation of droughts // Proc. 89 Nat. Conf. on Hydr. Engrg., ASCE, New York, 1987. — P. 50–57.
5. *Wolfram S.* Mathematica 3.0. — Adison Wesley, California, Reaward City, Second Edition, 1991.

Bivariate Teissier Distribution

N. Kolev*, N. Ngo*, Y. T. Ju*

* *Department of Statistics, University of Sao Paulo, Brazil*

Abstract. We first give historical remarks about the forgotten univariate Teissier model. We introduce a bivariate version of the Teissier distribution and outline its basic properties. The corresponding copula is obtained and applications are discussed.

Keywords: Bivariate mean residual life time vector, Copula, Failure rate, Lambert W function, Teissier distribution, Proportional mean residual life model, Simulation and data analysis.

1. Introduction and historical remarks

The baseline model under consideration has been first introduced by the French biologist Teissier (1934) considering a mortality of several domestic animal species protected from accidents and disease, i.e., dying as a result of a "pure aging". Specifically, for a non-negative random variable X , the model is defined by the survival function

$$S_X(x) = P(X > x) = \exp\{x + 1 - e^x\}, \quad x \geq 0.$$

It is direct to check that the corresponding mean residual life function (MRLF hereafter) defined by $m_X(x) = E[X - x | X > x]$ is given by e^{-x} .

Teissier's distribution is motivated by the empirical fact that many vital functions are decaying exponentially. In reliability terms, relation $m_X(x) = e^{-x}$ means that one should consider a scenario where the breakdown of an used item deteriorate "through wear alone" adopting unit exponential law of depletion.

By using a simple transformation, Laurent (1975) obtained an alternative distribution with a parameter $c \in (0, 1]$, written as

$$S_X(x; c) = P(X > x) = \exp\left[cx - \frac{e^{cx} - 1}{c} \right], \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Later on, Rinne (1985) used model (1) to estimate lifetime distribution (with lifetime expressed in kilometers) for a German data set based on prices of used cars. The Teissier's distribution and its location version (1) have been forgotten after that and we did not find any further reference in available literature.

Although the survival function, its hazard rate and MRLF are in one-to-one correspondence with each other, Muth (1977) justified the MRLF

to be a superior concept than the failure (mortality) rate. Postulating MRLF of the form

$$m_X(x) = \exp\{-cx\} \quad \text{for } c \in (0, 1] \quad \text{and all } x \geq 0,$$

Muth (1977) introduced via his Model 3 a continuous probability distribution with survival function given exactly by relation (1).

Let $c \rightarrow 0$ in (1) to get the unit exponential distribution, the fact reported by Leemis and McQueston (2008). Muth (1977) outlined few properties of model (1) observing that it displays heavier tail in comparison than commonly used unimodal right-skewed distributions (gamma, lognormal and Weibull). Recently, Jodra et al. (2015) rediscovered the distribution specified by (1) and named it "Muth distribution". One can find careful analysis and additional properties expressed by Lambert W function: its moment generating function, corresponding mode-median-mean inequality, moments of order statistics, its quantile function and parameter estimation. Most of these characteristics have been listed by Laurent (1975) already, but in terms of Gamma function.

Jodra et al. (2015) noted that $E(X) = 1$ and classified this fact as a strong restriction if one wishes to use model (1) for real data analysis. The authors applied a scaling transform $Y = bX$ for some $b > 0$ of (1) yielding

$$S_Y(x; c, b) = S_X(bx; c) = \exp\left[\frac{cx}{b} - \frac{e^{cx/b} - 1}{c}\right], \quad x \geq 0.$$

The last expression can be found in Laurent (1975) as well, see his Model II.

Let us introduce a parametrization $\frac{c}{b} = \alpha$ and $c = \alpha\theta$ in the last relation to get the *scaled Teissier distribution*

$$S_Y(x; \alpha, \theta) = \exp\left[\alpha x - \frac{1}{\alpha\theta}(e^{\alpha x} - 1)\right], \quad x \geq 0 \quad (2)$$

with parameters $\alpha > 0$ and $\theta > 0$ such that $\alpha\theta \leq 1$. The expression of the inverse function of (2) is given by

$$S_Y^{-1}(u) = \frac{1}{\alpha} \log\left[-\alpha\theta W_{-1}\left(\frac{-u}{\alpha\theta e^{1/\alpha\theta}}\right)\right], \quad u \in [0, 1], \quad (3)$$

where $W_{-1}(\cdot)$ is the real negative branch of Lambert W function solving equation $W(z) \exp(W(z)) = z$ and taking values in $(-\infty, -1]$ for $z \in [-\exp^{-1}, 0)$, consult Corollary 2 and Proposition 5 in Jodra et al. (2015).

In Section 2 we generate a bivariate version of scaled Teissier distribution corresponding to (2) using the bivariate proportional mean residual life approach following Sreeja and Sankaran (2007). Several basic properties are presented and we obtain the corresponding survival copula. We finish with a brief discussion regarding usefulness of the bivariate Teissier model and related simulation study.

2. Construction of bivariate Teissier distribution

We first introduce necessary notations and the bivariate proportional mean residual life model. Its particular version is a base and our motivation to generate a bivariate analog of the scaled Teissier distribution (2).

To proceed, let X_i be non-negative continuous random variables representing remaining lifetimes with survival functions $S_{X_i}(x_i) = P(X_i > x_i)$, $i = 1, 2$, and denote their joint survival function by $S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$.

Let $m_i(x_i) = E[X_i - x_i | X_i > x_i]$ be the MRLF of X_i , which can be interpreted as the expected remaining gap time of X_i , given that X_i is larger than x_i , $i = 1, 2$. For the recurrent events, the occurrence of the second event depends on the occurrence of the first one. Thus, one can consider conditional MRLF $m_i(x_1, x_2)$ of X_i given $\{X_j > x_j\}$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. For example,

$$m_2(x_1, x_2) = E[X_2 - x_2 | X_1 > x_1, X_2 > x_2] = \frac{\int_{x_2}^{\infty} S_{X_1, X_2}(x_1, u) du}{S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)} \quad (4)$$

for all $x_1, x_2 \geq 0$. By analogy, $m_1(x_1, x_2) = E[X_1 - x_1 | X_1 > x_1, X_2 > x_2]$. The bivariate MRLF vector $(m_1(x_1, x_2), m_2(x_1, x_2))$ uniquely determine the joint distribution of X_1 and X_2 . In fact,

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{m_1(0)}{m_1(x_1)} \frac{m_2(x_1, 0)}{m_2(x_1, x_2)} \exp \left[- \int_0^{x_1} \frac{du}{m_1(u)} - \int_0^{x_2} \frac{du}{m_2(x_1, u)} \right]. \quad (5)$$

Following Sreeja and Sankaran (2007) we define a bivariate proportional mean residual life model for the vector (X_1, X_2) as

$$m_1(x_1; \theta_1) = \theta_1 m_{10}(x_1) \quad \text{and} \quad m_2(x_1, x_2; \theta_2) = \theta_2 m_{20}(x_1, x_2), \quad (6)$$

for some appropriate positive parameters θ_1 and θ_2 . In model (6), $m_1(x_1; \theta_1)$ is the MRLF at time x_1 where θ_1 is a given constant and $m_{10}(x_1)$ is a baseline MRLF. The interpretation of $m_2(x_1, x_2; \theta_2)$ is similar.

Using (5) and (6), we obtain

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{m_{10}(0)}{m_{10}(x_1)} \frac{m_{20}(x_1, 0)}{m_{20}(x_1, x_2)} \exp \left[- \int_0^{x_1} \frac{du}{m_1(u; \theta_1)} - \int_0^{x_2} \frac{du}{m_2(x_1, u; \theta_2)} \right].$$

Apply (6) in the last formula for $\theta_1 = \theta_2 = \theta > 0$ and assume that the baseline MRLFs are specified by $m_{10}(x_1) = \exp\{-\alpha x_1\}$ and $m_{20}(x_1, x_2) = \exp\{-\alpha(x_1 + x_2)\}$ with $\alpha \in (0, 1]$, yielding

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \exp \left\{ \alpha(x_1 + x_2) - \frac{1}{\theta \alpha} \left[e^{\alpha(x_1 + x_2)} - 1 \right] \right\}, \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad (7)$$

i.e., we got our *bivariate Teissier distribution*. Note that its marginal survival functions are identical with univariate Teissier distribution (2).

In order $S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ given by (7) to be a proper joint survival function, the condition $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq 0$ must be satisfied, implying

that $\theta\alpha \leq \frac{2}{3+\sqrt{5}}$. Thus, the parameter space Ω_1 of the bivariate Teissier distribution (7) is

$$\Omega_1 = \Omega_1(\theta, \alpha) = \left\{ \theta > 0 \quad \text{and} \quad \alpha > 0, \quad \text{such that} \quad \theta\alpha \leq \frac{2}{3+\sqrt{5}} \right\}.$$

One might conclude that the bivariate Teissier distribution (7) is *exchangeable*, i.e., having the same marginal distributions represented by (2). They can serve as a marginal distribution of (7), only if their parameter space is given by Ω_1 .

Now, let us consider the ratio $\frac{S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{S_{X_1}(x_1)S_{X_2}(x_2)}$, where $S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ is given by (7) and marginal survival functions are of the form (2). A simple substitution implies

$$\frac{S_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{S_{X_1}(x_1)S_{X_2}(x_2)} = \exp \left\{ -(\alpha\theta)^{-1} [e^{\alpha x_1} - 1][e^{\alpha x_2} - 1] \right\}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

The right hand side in the last equation is no larger than 1, i.e., the bivariate Teissier model (7) is *negative quadrant dependent*.

The expressions of the correlation coefficient of bivariate Teissier distribution and corresponding survival copula are given in the following two statements.

Lemma 1. *Let the random vector (X_1, X_2) follows the bivariate Teissier distribution (7). Its correlation coefficient can be expressed as*

$$\text{Corr}(X_1, X_2) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right) E_1\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right) - \alpha\theta}{2 \exp\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right) E_1\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right) - \alpha\theta},$$

where $E_1(\cdot)$ is the exponential integral.

Lemma 2. *The Teissier's survival copula function corresponding to (7) is given by*

$$C(u, v) = uv \exp \left\{ -a^{-1} \left[aW_{-1} \left(\frac{-u}{ae^{1/a}} \right) + 1 \right] \left[aW_{-1} \left(\frac{-v}{ae^{1/a}} \right) + 1 \right] \right\}$$

for $u, v \in [0, 1]$, where $W_{-1}(\cdot)$ is the real negative branch of Lambert W function and $a = \alpha\theta$.

3. Discussion

In many survival studies, each subject can potentially experience a series of events, which may be repetitions of essentially the same event or may be events of entirely different natures. Such outcomes have been termed recurrent events. To analyze recurrent event data, the focus can be placed on two types of time scale: the time since entering the study and the time since the last event (gap time). For the situation where the time since study entry is of interest, a variety of statistical methods have been proposed in literature.

The bivariate Teissier model (7) is a new contribution to the bivariate distribution theory and can serve as an alternative to the existing one for analysis of recurrent events which typically occur in Insurance, Finance, Reliability, Engineering, Medicine, etc. We will present a simulation study and will compare our analysis of real bivariate data set studied by other authors as well.

References

1. *Jodra P., Jimenez-Gamero M., Alba-Fernandez M.* On the Muth Distribution // *Mathematical Modelling and Analysis*. — 2015. — Vol. 20. — P. 291–310.
2. *Leemis L., McQueston, J.* Univariate distribution relationships // *American Statistician*. — 2008. — Vol. 62. — P. 45–53.
3. *Laurent A.* Failure and mortality from wear and aging. The Teissier model // *Statistical Distributions in Scientific Work - Model Building and Model Selection*. Vol. 2 (Patil, G., Kotz, S. and Ord, H., eds.). — 1975. — P. 301–320.
4. *Muth J.* Reliability models with positive memory derived from the mean residual life function // *The Theory and Applications of Reliability*. Vol. 2, (Tsokos, C. and Shimi, I., eds.). — Academic Press Inc., New York, 1977. — P. 401–435.
5. Rinne H. (1985). Estimating the lifetime distribution of private motor-cars using prices of used cars: The Teissier model // *Statistiks Zwischen Theorie und Praxis* (Buttler, G. et al., eds.). — Gottingen (in German), 1985. — P. 172–184.
6. *Sankaran P., Sreeja V.* Proportional hazards model for multivariate failure time data // *Communications in Statistics. Theory and Methods*. — 2007. — Vol. 36. — P. 1627–1642.
7. *Teissier G.* Recherches sur le vieillissement et sur les lois de mortalite // *Annales de Physiologie et de Physicochimie Biologique*. — 1934. — Vol. 10. — P. 237–284.

УДК 51 (091)

Краткая история изучения распределения осколков по размерам

П. Н. Антонюк

*МГТУ им. Н. Э. Баумана,
ул. 2-ая Бауманская, д. 5, стр. 1, Москва, Россия, 105005*

Аннотация. Называются девять ученых, сыгравших важную роль в изучении распределения осколков.

Ключевые слова: осколки, распределение, скорость, размер, смещение, молекула.

1. Введение. Эмпирические формулы

Рассматривается задача о быстром распаде однородной и изотропной трехмерной сплошной среды на большое число осколков. Будем считать, что распад происходит практически мгновенно, то есть можно говорить о взрыве сплошной среды. Основной вопрос заключается в нахождении функции распределения осколков по размерам.

В 1933 году немецкие инженеры Пауль Отто Розин (1890–1967) и Эрих Раммлер (1901–1986) предложили эмпирическую формулу

$$F(R) = 1 - \exp[-(R/\alpha)^\beta]$$

для функции распределения частиц угля по размерам. Уголь использовался в различных технологических процессах. Позднее эта формула стала широко применяться для описания распределения по размерам капель жидкости, распыливаемой форсункой. На выходе из форсунки образуются осколки жидкости, которые под действием сил поверхностного натяжения очень быстро превращаются в капли. Здесь $F(R)$ — вероятность того, что капля имеет радиус, меньший R (эта вероятность пропорциональна числу молекул, образующих такие капли); α, β — положительные параметры распределения; $f(R) = F'(R)$ — плотность распределения.

В 1939 году шведский инженер Эрнст Яльмар Валодди Вейбулл (1887–1979) предложил эмпирическую формулу

$$F(m) = 1 - \exp[-(m/\mu)^\Lambda],$$

которая хорошо описывает распределение осколков твердого тела по массам. Здесь $F(m)$ — вероятность того, что осколок имеет массу меньшую m (эта вероятность пропорциональна числу таких осколков); μ, Λ — положительные параметры распределения; $f(m) = F'(m)$ — плотность распределения. Последняя формула широко применяется в теории прочности материалов.

Английский физик Невилл Франсис Мотт (1905–1996), лауреат Нобелевской премии по физике 1977 года, предполагал, что в формуле Вейбулла $\Lambda = 1/2$. Сегодня известно, что, в зависимости от свойств твердого тела, параметр Λ может принимать значения в некоторой окрестности $1/2$.

Математическая эквивалентность формул Розина-Раммлера и Вейбулла (формулы связаны соотношением $\beta = 3\Lambda$) указывает на универсальный характер процесса быстрого распада сплошной среды: распределение осколков по размерам не зависит от физико-химических свойств среды. Другими словами, предполагается существование универсальной функции распределения осколков по размерам, одинаково подходящей как для жидкости, так и для твердого тела. Свойство универсальности предполагает, что твердое тело есть хрупкое тело (разрушается при небольших деформациях), а жидкость есть идеальная жидкость (невязкая и несжимаемая). При мгновенном распаде идеальная жидкость ведет себя как хрупкое тело.

Вейбулл не знал о формуле Розина-Раммлера и получил похожую формулу независимо. За последние сто лет было предложено много других эмпирических формул для распределения осколков, но формулы Розина-Раммлера и Вейбулла наиболее точно подтверждаются экспериментами.

2. Распределение радиус-векторов молекул

Будем считать, что хрупкое тело состоит из одинаковых молекул, равномерно распределенных в трехмерном пространстве. После распада хрупкого тела образуются осколки произвольной формы. Сопоставим каждой молекуле радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Начало вектора совпадает с центром масс осколка, содержащего данную молекулу. Конец вектора указывает пространственное положение молекулы. Пусть функция $h(x, y, z)$ будет означать плотность распределения вероятностей для радиус-векторов молекул. Задача нахождения этой функции и задача нахождения плотности распределения вероятностей для скоростей молекул идеального газа эквивалентны. Последнюю задачу сформулировал и решил в 1859 году английский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879) [1, 2]. Вместо вектора скорости молекулы (в задаче Максвелла) рассмотрим радиус-вектор молекулы. Следуя Максвеллу, предположим, что существуют такие функции p и q , для которых

$$h(x, y, z) = p(x)p(y)p(z) = q(x^2 + y^2 + z^2).$$

Здесь второе равенство задает функциональное уравнение, решив которое найдем функцию

$$h(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\alpha)^3} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\alpha^2}\right], \quad (1)$$

где α — положительная константа. Правая часть равенства (1) определяет так называемое трехмерное нормальное распределение

3. Распределение радиус-векторов характеризуется максимальной энтропией

Математическое ожидание радиус-векторов молекул определяется нулевым радиус-вектором. Важно отметить, что если выполнены два условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y, z) dx dy dz = 1 \quad (\text{условие нормировки}), \text{ и}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + y^2 + z^2) h(x, y, z) dx dy dz = \text{const}$$

(задана дисперсия радиус-векторов молекул или задан средний размер осколков), то функция $h(x, y, z)$ обеспечивает максимальное значение информационной энтропии Шеннона

$$H(h) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y, z) \ln h(x, y, z) dx dy dz$$

тогда, и только тогда, когда выполняется равенство (1), то есть в случае нормального распределения. Последнее утверждение о максимуме энтропии для нормального распределения, впервые сформулировал (в терминах идеального газа) австрийский физик Людвиг Больцман (1844-1906) [3]. То, что Больцман называл мерой перестановочности, сегодня называется энтропией Шеннона. Максимальность энтропии является важнейшим основанием для представления распределения радиус-векторов в виде нормального распределения

4. Распределение смещений молекул

Модуль радиус-вектора молекулы назовем смещением молекулы и обозначим буквой R . Очевидно, что $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Пусть функция $g(R)$ характеризует вероятность сопоставления произвольной молекуле смещения R . Распределение молекул по смещениям эквивалентно распределению молекул идеального газа по модулям скорости в задаче Максвелла. Таким образом, получаем плотность распределения вероятностей смещений молекул

$$g(R) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} R^2 e^{-R^2/\alpha^2}. \quad (2)$$

Заметим, что в задаче о распределении смещений молекул все осколки имеют произвольную, часто достаточно сложную, форму. При этом взаимное расположение большого числа молекул характеризуется симметричным распределением их смещений.

5. Преобразование распределения смещений молекул в распределение размеров осколков

Предположим теперь для простоты, что все осколки имеют форму шара, как в случае распада жидкости на капли. Пусть буква R одновременно обозначает смещение молекулы и радиус шарового осколка. Пусть плотность распределения вероятностей радиусов осколков задается функцией $f(R)$. Вероятность того, что радиус осколка лежит между R и $R+dR$ пропорциональна числу молекул, образующих такие осколки. Установим связь смещений молекул, определяемых функцией $g(R)$, с радиусами осколков, определяемых функцией $f(R)$. Из геометрических соображений вытекает интегральное соотношение

$$\int_0^{R_0} g(R) dR = \int_0^{R_0} f(R) dR + \int_{R_0}^{+\infty} f(R) \frac{R_0^3}{R^3} dR,$$

связывающее функции $g(R)$ и $f(R)$ для любого неотрицательного значения R_0 . Перепишем соотношение в виде

$$\int_0^{R_0} g(R) dR = \int_0^{R_0} f(R) dR + R_0^3 \int_0^{+\infty} \frac{f(R)}{R^3} dR - R_0^3 \int_0^{R_0} \frac{f(R)}{R^3} dR.$$

Дифференцируя последнее выражение дважды по R_0 , получаем два равенства

$$g(R_0) = 3R_0^2 \int_0^{+\infty} \frac{f(R)}{R^3} dR - 3R_0^2 \int_0^{R_0} \frac{f(R)}{R^3} dR,$$

$$g'(R_0) = 6R_0 \int_0^{+\infty} \frac{f(R)}{R^3} dR - 6R_0 \int_0^{R_0} \frac{f(R)}{R^3} dR - \frac{3f(R_0)}{R_0}.$$

Исключая интегралы из этих равенств, находим формулу преобразования функции $g(R)$ в функцию $f(R)$:

$$f(R) = \frac{1}{3} [2g(R) - g'(R) \cdot R]. \quad (3)$$

Согласно этой формуле,

$$\int_0^{\infty} g(R) dR = \int_0^{\infty} f(R) dR,$$

то есть $\int_0^\infty g(R)dR = 1$ тогда, и только тогда, когда $\int_0^\infty f(R)dR = 1$. Формулы (2) и (3) сразу дают плотность распределения вероятностей радиусов осколков:

$$f(R) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}\alpha^5} R^4 e^{-R^2/\alpha^2}. \quad (4)$$

Это — плотность хи-распределения с пятью степенями свободы. Среднее значение радиуса осколка (математическое ожидание радиуса) равно $8\alpha/(3\sqrt{\pi})$, а мода радиуса осколка (точка максимума плотности распределения) равна $\sqrt{2}\alpha$. Следовательно, среднее значение радиуса больше моды радиуса.

6. Совпадение теории и эксперимента

Перепишем функцию плотности $f(R)$ в координатах “абсцисса — масса осколков, ордината — число осколков”, тогда получим $f(m)$, и рассмотрим функцию распределения:

$$F(m) = 1 - \exp[-(m/\mu)^\Lambda], \quad \Lambda = 2/3. \quad (5)$$

Функция $F(m)$, полученная теоретически, в точности совпадает с распределением Вейбулла, полученным из многочисленных экспериментов! Более того, значение $\Lambda = 2/3$, полученное в предположении хрупкости твердого тела, согласуется с экспериментальными значениями для хрупких тел: $0,6 \leq \Lambda \leq 0,7$.

7. Заключение

Формулы (1)–(5) описывают осколки хрупкого тела. Формулы (3)–(4) найдены автором в 2007 году. Английский физик Джон Уильям Стретт (лорд Рэлей) (1842–1919), лауреат Нобелевской премии по физике 1904 года, изучая произвольное распределение фаз в рамках теории колебаний, вывел формулу для амплитуд колебаний, математически совпадающую с формулой (2), и это совпадение не случайно. Французские физики Жан Батист Перрен (1870–1942), лауреат Нобелевской премии по физике 1926 года, и Поль Ланжевен (1872–1946), изучая броуновское движение, применили математический аппарат Максвелла к анализу смещений броуновской частицы. Это позволило Перрену в 1908–1909 гг. найти точное значение числа Авогадро и окончательно доказать атомно-молекулярную теорию строения вещества. Таким образом, скорость молекулы газа, амплитуда колебания, смещение броуновской частицы и смещение молекулы осколка описываются одной и той же формулой (2).

Литература

1. *Максвелл Дж. К.* Пояснения к динамической теории газов // Основатели кинетической теории материи. Л. Кар, Д. Бернулли, М.В. Ломоносов, Д.П. Джоуль, Р. Клаузиус, Дж. К. Максвелл. Сб. ст. / Под ред. А.К. Тимирязева. — М.; Л.: ОНТИ, 1937. — С. 185–220.
2. *Максвелл Дж. К.* Труды по кинетической теории. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 406 с.
3. *Больцман Л.* Избранные труды. Молекулярно-кинетическая теория газов. Термодинамика. Статистическая механика. Теория излучения. Общие вопросы физики. — М.: Наука, 1984. — 590 с.
4. *Антонюк П. Н.* Распределение по размерам капель распыливаемой жидкости // Сб. научн. трудов по материалам Международной конф. Двигатель-2007. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. — С. 135–139.
5. *Антонюк П. Н.* Страницы истории фракталов // Историко-математические исследования. Вторая серия. — М.: Янус-К, 2014. — Вып. 15 (50). — С. 196–212.

UDC 51 (091)

A brief history of the study of the fragment size distribution

P. N. Antonyuk

*Bauman Moscow State Technical University,
2-ya Baumanskaya st., 5, b. 1, Moscow, 105005, Russia*

Nine scientists are recalled which have played an important role in studying the distribution of fragments.

Keywords: fragments, distribution, speed, size, displacement, molecule.

УДК 51(091)

Зачем индийцу математика? (Размышления над вводящей главой трактата Махавиры, IX в. н. э.)

Г. Г. Хмуркин*

** Кафедра вычислительной математики и математической физики,
Московский государственный технический университет
имени Н.Э.Баумана,
Рубцовская наб., 2/18, Москва, Россия, 105005*

Аннотация. Приводится авторский перевод с санскрита фрагмента сочинения Махавиры “Собрание основных положений науки о вычислениях” (IX в. н.э.), даются комментарии к нему.

Ключевые слова: индийская математика, Махавира.

Трактат индийского математика IX века н.э. Махавиры «Собрание основных положений науки о вычислениях» (**gaNitasArasaGgrahaH**) является первой в истории индийской мысли работой, посвященной исключительно математике как независимой (прежде всего, от астрономии) дисциплине. Она написана на санскрите, метрическим текстом и содержит практически все математические достижения того времени. Спектр затрагиваемых в сочинении вопросов весьма обширен: арифметические операции, действия с дробями, арифметическая и геометрическая прогрессии, правило трех величин, экономические задачи, задачи на движение, комбинаторика, суммирование конечных рядов, неопределенные уравнения 1-ой степени, решение систем уравнений с несколькими переменными, планиметрия, стереометрия и многое другое. Махавира приводит классификации исследуемых объектов, дает правила вычислений (без доказательств) и снабжает текст многочисленными упражнениями.

Автор трактата Махавира (**mahAvIra**, букв. “великий герой”) или Махавирачарья (**mahAvIrAcArya**, букв. “учитель Махавиры”) — представитель дигамбарской ветви джайнизма. По всей видимости, он работал при дворе Амогхаварши (годы правления: ок.815 – ок.877 гг.), царя из средневековой династии Раштракутов — правителей крупной империи (VIII–X вв.), располагавшейся на территории современных южноиндийских штатов Карнатака и Махараштра. «Собрание...» — единственная известная работа Махавиры.

Первая глава указанного сочинения носит вводный характер. Здесь автор возносит хвалу своему «тезке» — Махавире, основателю джайнизма, и царю Амогхаварше. Кроме того, здесь же вводится базовая терминология трактата: единицы измерения длины, времени и др., наименования арифметических операций, названия разрядов десятичной

системы. Сюда же включены основополагающие правила действия с положительными, отрицательными числами и нулем.

Наиболее значительным по объему фрагментом первой главы является группа двустий (ст. 9–16), посвященных важности математики (**gaNita**, **gaNitazAstra**). Приведем перевод этого фрагмента на русский язык (осуществлен по изданию [1]):

«Во [всех] делах — касаются ли [они] повседневных забот, или же [священных] Вед, или [любой другой] подобной [сферы жизни], — всюду используются вычисления. /9/ В науке любви и в науке политического управления, в музыке и в сценическом искусстве, в кулинарном деле, медицинской практике, архитектуре и др. областях, /10/ в науке о поэтических метрах [и] украшениях [текста], в художественной литературе, в логике, в языкознании и пр., во всех видах искусств наука о вычислениях в большом почете. /11/ Когда речь идет о движении Солнца и др. планет, о затмении, соединении планет, о “трех вопросах”¹ и вращении Луны — всегда происходит то же самое [т.е. обращение к науке о вычислениях]. /12/ Численность, протяженность и обхват островов, океанов, гор, [различных] обителей, богов из промежуточной сферы, небесных светил, людей, обитателей Кальпы² /13/ и всех обитателей [ада] Наракы, [а также] выстроенные в ряды многочисленные залы для собраний, разнообразные замеры и т.д. — [все] они описываются с помощью науки о вычислениях. /14/ Внешний вид, продолжительность жизни, восемь качеств-аспектов и т.п. живых существ, [их] движение и т.п., [их] объединение [в группы] и т.д. — все эти [проявления] характеризуются вычислениями. /15/ К чему [заниматься] долгими рассуждениями? В трех мирах, наполненных живым [и] неживым, какую вещь [ни возьми], воистину, ничто не [может существовать] в отрыве от вычислений. /16/»

Приведенные дифирамбы математике не были чем-то уникальным в индийской математико-астрономической традиции. Подобные пассажи, различные по длине и содержанию, характерны и для других индийских математиков. Их наличие в тексте обуславливалось не только и, во всей вероятности, не столько восхищением «мощью науки», которую брался излагать автор, сколько данью определенной традиции и отчасти — практической необходимостью. Дело в том, что математики зачастую работали при дворах, и обоснование, как принято выражаться в диссертациях, «актуальности темы», важности предлагаемого материала в повседневной жизни была залогом профессиональной востребованности.

¹ В оригинальном санскритском тексте **triprazna** — название главы в индийских астрономических трактатах, посвященной трем кинематическим характеристикам движения небесных светил (местоположение, направление движения, временные параметры).

² В джайнизме — особая обитель богов.

Следует отметить и тот факт, что большинство указанных Махавирой областей применения математики не отражены ни в теоретических положениях трактата, ни в многочисленных упражнениях. Таким образом, перечисление сфер приложения математического знания во вводной главе «Собрания...» не имело непосредственного отношения к содержанию сочинения, хотя и могло в какой-то степени отражать придворные обязанности Махавиры. Несомненно и то, что излагаемые им математические закономерности действительно использовались и в астрономии, архитектуре и пр., о чем можно судить по сочинениям других индийских авторов (более ранним и синхронным Махавире).

Литература

1. The **gaNita-sAra-saGgraha** of **mahAvIrAcArya**. With English translation and Notes by **m.raGgAcArya**. — Government Press, Madras, 1912.

UDC 51(091)

Why do Indians need mathematics? (Reflections on the introductory chapter of Mahavira's treatise, 9th century A.D.)

G. G. Khmourkin*

* *Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics
Bauman Moscow State Technical University,
Rubtsovskaya emb., 2/18, Moscow, Russia, 105005*

The author's translation from Sanskrit of the fragment of Mahavir's treatise "Collection of the basic propositions of computational science" (IX century AD) and commentary to it are given in the article.

Keywords: Indian mathematics, Mahavira.

Модифицированная модель Крамера-Лундберга с релейным управлением и произвольными объемами потребления ресурса

А. А. Назаров*[†], В. И. Бронер*[†]

* *Томский государственный университет,
пр. Ленина, 36, Томск, Россия, 634050*

[†] *Российский университет дружбы народов,
ул. Миклуто-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

Аннотация. В данной работе рассматривается математическая модель системы управления запасами в виде модифицированной модели Крамера-Лундберга с релейным управлением и произвольным распределением объемов потребления. Найдено точное выражение для стационарного распределения вероятностей значений процесса уровня запасов, накопленных в системе.

Ключевые слова: модель Крамера-Лундберга, управление запасами, релейное управление, преобразование Фурье.

1. Введение

Существуют различные классификации моделей управления запасами. В соответствии с классификацией по исследуемым периодам различают однопериодные и многопериодные модели. Newsvendor problem (модель разносчика газет) одна из классических однопериодных моделей теории управления запасами [1–4, 8, 9].

Обобщением однопериодных моделей являются многопериодные, являющиеся более сложными, поскольку в многопериодных моделях предполагается использование оставшихся в конце предыдущего периода запасов [5, 10]. Многопериодные модели управления запасами с релейным управлением рассмотрены в [6, 7].

В данной работе строится и исследуется модифицированная модель Крамера-Лундберга с релейным управлением и произвольным распределением объемов потребления, которая имеет широкое применение в теории управления запасами, экономике, страховании и других областях.

2. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель управления запасами (Рис. 1).

Обозначим объем накопленных ресурсов в системе к моменту времени t через $s(t)$. На вход системы с непрерывной постоянной скоростью ν в единицу времени поступают некоторые ресурсы. Запросы на

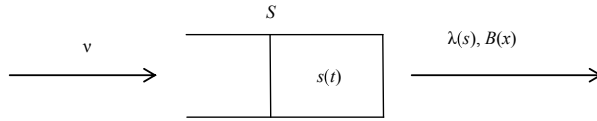


Рис. 1. Система управления запасами

потребление ресурса поступают в систему в случайные моменты времени. Моменты поступления запросов на потребление ресурса образуют пуассоновский поток с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, которая зависит от значений $s(t) = s$ величин запасов, накопленных к моменту времени t поступления заявки на потребление ресурса

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, & s < S, \\ \lambda_2, & s \geq S, \end{cases}$$

здесь S – некоторое пороговое значение ресурса, при превышении которого происходит смена интенсивности пуассоновского потока. Будем считать, что величины запросов на потребление – независимые, одинаково распределенные случайные величины, имеющие произвольную функцию распределения $B(x)$.

Будем полагать, что процесс $s(t)$ может принимать отрицательные значения, интерпретируя это как отложенное исполнение запроса на потребление, то есть если для исполнения заявки на потребление недостаточно ресурса, то заявка ожидает накопления требуемого объема ресурса.

Условие существования стационарного режима имеет вид

$$\lambda_1 b < \nu < \lambda_2 b,$$

где b – первый момент функции $B(x)$. Таким образом, если условия $\lambda_1 < \nu/b < \lambda_2$ и $s < S$ выполняются, то ресурс накапливается в системе, в противном случае при $s \geq S$ объем ресурса в системе будет уменьшаться, поскольку интенсивность потребления увеличится.

3. Постановка задачи

Исходя из определения процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством состояний $-\infty < s < \infty$.

Обозначим плотность распределения вероятностей значений процесса $s(t)$

$$P(s, t) = \frac{\partial P \{s(t) < s\}}{\partial s},$$

и запишем следующее равенство

$$P(s + \nu\Delta t, t + \Delta t) = P(s, t)(1 - \lambda(s)\Delta t) + \\ + \Delta t \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x, t)dB(x) + o(\Delta t),$$

тогда имеет место следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} + \nu \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} = -\lambda(s)P(s, t) + \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x, t)dB(x).$$

Рассматривая функционирование системы в стационарном режиме и обозначая стационарную плотность распределения $P(s)$ вероятностей значений уровня запасов накопленных в системе, полагая $\nu = 1$, предыдущее уравнение перепишем в виде

$$P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x), \quad (1)$$

где $P(s)$ удовлетворяет граничным условиям $P(-\infty) = P(\infty) = 0$. Будем полагать, что решение уравнения (3) существует и единственно. Ставится задача нахождения вида функции $P(s)$.

4. Решение $P(s)$ уравнения (1)

Введем обозначения

$$\int_{-\infty}^s P(s)ds = R_1, \quad \int_s^{\infty} P(s)ds = R_2.$$

Сформулируем утверждение о вероятностях R_1 и R_2 .

Утверждение 1 *Вероятности R_1 и R_2 имеют вид*

$$R_1 = \frac{\lambda_2 b - 1}{\lambda_2 b - \lambda_1 b}, \quad R_2 = \frac{1 - \lambda_1 b}{\lambda_2 b - \lambda_1 b}.$$

Сформулируем теорему о решении $P(s)$ уравнения (3).

Теорема 1 Решение $P(s)$ уравнения (3) имеет вид

$$P(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jus} P_1^*(u) du, & s \leq S, \\ Ce^{-\gamma(s-S)}, & s > S, \end{cases}$$

где γ - единственный положительный корень уравнения $\lambda_2 - \gamma = \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x)$, $j = \sqrt{-1}$. $P_1^*(u)$ - преобразование Фурье функции

$$P_1(s) = \begin{cases} P(s), & s \leq S, \\ 0, & s > S, \end{cases}$$

определяемое выражением $P_1^*(u) = \frac{\lambda_2 \left\{ 1 - \int_0^{\infty} e^{jux} dB(x) \right\} - ju}{\lambda_1 \left\{ 1 - \int_0^{\infty} e^{jux} dB(x) \right\} - ju} \frac{C}{ju - \gamma} e^{juS}$, константа C определяется равенством

$$C = \gamma R_2.$$

Сформулированная теорема определяет стационарное распределение вероятностей значений процесса $s(t)$.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ (Соглашение No. 02.а03.21.0008 от 24 июня 2016 г.).

Литература

1. *Kitaeva A., Subbotina V., Zmeev O.* The Newsvendor Problem with Fast Moving Items and a Compound Poisson Price Dependent Demand // 15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2015 / Elsevier (IFAC-PapersOnLine). — 2015. — No. 48. — P. 1375–1379.
2. *Kitaeva A., Subbotina V., Stepanova N.* Estimating the Compound Poisson Demand's Parameters for Single Period Problem for Large Lot Size // 15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2015 / Elsevier (IFAC-PapersOnLine). — 2015. — No. 48. — P. 1357–1361.
3. *Choi T.-M.* Handbook of Newsvendor Problems: Models, Extensions and Applications / Choi Tsan-Ming (ed.). — Springer, 2012.

4. *Khouja M.* The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research // OMEGA-INT J. — 1999. — Vol. 27, no. 5. — P. 537–553.
5. *Mousavia S. M., Hajipoura V., Niakib S. T. A., Alikar N.* Optimizing multi-item multi-period inventory control system with discounted cash flow and inflation: Two calibrated meta-heuristic algorithms // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 37, no. 4. — P. 2241–2256.
6. *Nazarov A., Broner V.* Inventory Management System with Erlang Distribution of Batch Sizes // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science. — Springer, 2012. — Vol. 678. — P. 273–280.
7. *Nazarov A. A., Broner V. I.* Resource Control for Physical Experiments in the Cramer-Lundberg Model // Russian Physics Journal. — 2016. — Vol. 59, no. 7. — P. 1024–1036.
8. *Silver E. A.* Inventory Management and Production Planning and Scheduling // Silver E. A., Pyke D. F., Peterson R. — Wiley, New York, 1998.
9. *Qin Y., Wang R., Vakharia A., Chen Y., Hanna-Seref M.* The newsvendor problem: review and directions for future research // European Journal of Operational Research. — 2011. — Vol. 213. — P. 361–374.
10. *Zhang D., Xu H., Wu Y.* Single and multi-period optimal inventory control models with risk-averse constraints // European Journal of Operational Research. — 2009. — Vol. 199. — P. 420–434.

UDC 519.2

Modified Kramer-Lundberg model with On/Off control and arbitrary distribution of demand purchases values

A. A. Nazarov*[†], V. I. Broner*[†]

* *Tomsk State University,
36 Lenina ave., Tomsk, 634050, Russia*

[†] *RUDN University,
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

In this paper, we consider the modified Cramer-Lundberg model of inventory management system with On/Off control and arbitrary distribution of demand purchases values. Exact expression for the steady-state probability distribution of the inventory level accumulated in the system is obtained.

Keywords: modified Kramer-Lundberg model, inventory management, On/Off control, Fourier transform.

UDC 519.2

On a multi-server priority queue with preemption in crowdsourcing

A. Krishnamoorthy*, Dh. Shajin*, A. S. Manjunath†

* *Department of Mathematics
Cochin University of Science and Technology
Cochin-682022, India.*

† *Department of Mathematics
Govt. Victoria College Palakkad-678001, India.*

Abstract. A c -server queueing system providing service to two types of customers, say, Type 1 and Type 2 to which customers arrive according to a marked Poisson process is considered. A Type 1 customer has to receive service by one of c servers while a Type 2 customer may be served by a Type 1 customer (with probability p) who is available to act as a server soon after getting own service or by one of c servers. Upon completion of a service a free server will offer service to a Type 1 customer on a FCFS basis. However, if there is no Type 1 customer waiting in the system, that server will serve a Type 2 customer if one of that type is present in the queue. The service time is exponentially distributed for each category. We consider preemptive service discipline. Condition for system stability is established. Crucial system characteristics are computed.

Keywords: crowdsourcing, queueing system, preemptive service, matrix-analytic method.

1. Introduction

In this paper we analyze the impact of preemptive priority in the context of crowdsourcing. For a detailed discussion on crowdsourcing one may refer to Chakravarthy and Dudin [1]. That is the first reported work on crowdsourcing modelled in the queueing context. They analyze the problem as a priority queue with non-preemption.

We consider a multi-server priority model in the context of crowdsourcing with two types of customers – Type 1 and Type 2 to which customers arrive according to Poisson process of rates λ_1 and λ_2 respectively. Type 1 has priority over Type 2, which is of preemptive nature. Type 1 and Type 2 customers are to be served by one of c servers and the service times are assumed to be exponential with respective parameters μ_1 and μ_2 . Services are offered in the order of the arrivals of the customers. Type 2 customers may be served by a Type 1 customer who has been served out and also available to act as a server immediately after his service completion. At the time of opting to serve there should be at least one Type 2 customer waiting to get a service. We assume that a served Type 1 customer will be available to serve a waiting Type 2 customer with probability p , $0 \leq p \leq 1$. With probability $q = 1 - p$, the served Type 1 customer will leave the system. If a Type 1 customer decides to serve a Type 2 customer, for our analysis purposes that Type 2 customer will be removed from the system

immediately. This is due to the fact that the system no longer needs to track that Type 2 customer. Type 2 customers are taken for service one at a time from the head of the queue whenever the queue of Type 1 customers are found to be empty at a service completion epoch. The service of such customers is according to a preemptive service discipline, that is the arrival of a Type 1 customer interrupts the ongoing service of any one of Type 2 customers if any in service, and hence this preempted customer joins back as the head of the Type 2 queue. Type 1 customers have a limited waiting space L , $1 \leq L < \infty$, while Type 2 customers have unlimited waiting space. The above described service is found in what is referred to as “crowdsourcing” (see Howe [2]).

The rest of the paper is arranged as follows. In Section 2 the model under study is described. Section 3 provides the steady state analysis of the model, including key performance measures.

2. Mathematical formulation

Let $N_1(t), S(t)$ and $N_2(t)$ be the number of Type 1 customers in the system, the number of servers busy with Type 2 customers and the number of Type 2 customers in the queue respectively.

Then $\Omega = \{(N_2(t), S(t), N_1(t)), t \geq 0\}$ is a continuous time Markov chain with state space

$$\{(0, 0, k), 0 \leq k \leq c + L\} \cup \{(i, 0, k), i \geq 1, c \leq k \leq c + L\} \cup \{(0, j, k), 1 \leq j \leq c, 0 \leq k \leq c - j\} \cup \{(i, j, k), i \geq 1, 1 \leq j \leq c, k = c - j\}.$$

Now we define the set of states as follows:

$$\hat{\mathbf{O}} = \{(0, 0, k), 0 \leq k \leq c + L\} \cup \{(0, j, k), 1 \leq j \leq c, 0 \leq k \leq c - j\}$$

and for $i \geq 1$,

$$\hat{i} = \{(i, 0, k), i \geq 1, c \leq k \leq c + L\} \cup \{(i, j, k), i \geq 1, 1 \leq j \leq c, k = c - j\}.$$

Through the state space merger, the infinitesimal generator of this CTMC is of the form

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} B_1 & \tilde{B}_0 & & & \\ \tilde{B}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & & \\ & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Theorem 2.1. *The system under study is stable if and only if*

$$\lambda_2 - p\lambda_1 a < cp\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$$

where

$$\begin{aligned}
 a &= \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i \pi_c(0), \\
 a_1 &= \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^c \sum_{i=1}^L \left(\frac{\lambda_1}{c\mu_1}\right)^i \pi_c(0), \\
 a_2 &= \sum_{i=0}^{c-1} \frac{c-i}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i \pi_c(0)
 \end{aligned}$$

$$\text{where } \pi_c(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^c \sum_{i=0}^L \left(\frac{\lambda_1}{c\mu_1}\right)^i \right]^{-1}.$$

3. Steady state analysis

Let $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots)$ be the steady state probability vector of the generator \tilde{Q} . That is,

$$\mathbf{y}\tilde{Q} = 0, \text{ and } \mathbf{y}\mathbf{e} = 1.$$

Note that $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$ and $\mathbf{y}_i = (\mathbf{x}_{2i-1}, \mathbf{x}_{2i})$ for $i \geq 1$ where $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$ is the steady state probability vector of Q .

Under the stability condition given in (2.1) the steady-state probability vector \mathbf{y} is obtained as

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_1 R^{i-1}, \quad i \geq 2$$

where R is the minimal non-negative solution to the matrix quadratic equation (see Neuts [4] and Latouche and Ramaswami [3])

$$R^2 \tilde{A}_2 + R \tilde{A}_1 + \tilde{A}_0 = \mathbf{0}.$$

The normalizing condition of (3) results in

$$\mathbf{y}_0 \mathbf{e} + \mathbf{y}_1 (I - R)^{-1} \mathbf{e} = 1.$$

Define the $(c + L + 1)$ -dimensional vector $\boldsymbol{\xi}$ as

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{y}_i \mathbf{e} = \mathbf{y}_1 (I - R)^{-1} (\mathbf{e} \otimes I) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 (I - R_2)^{-1} (I + R_1).$$

3.1. System Performance Measures

1. Probability that the system is idle $P_{idle} = x_0(0, 0)$

2. Probability that j servers are busy is

$$b_j = \begin{cases} x_0(0, 0) & j = 0 \\ \sum_{k=0}^j x_0(k, j-k) & 1 \leq j \leq c-1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{k=c}^{c+L} x_i(0, k) + \sum_{k=1}^c x_i(k, c-k) \right] & j = c \end{cases}$$

3. Probability that j servers are busy with Type 1 customers is

$$b_j^{(1)} = \begin{cases} x_0(0, 0) + \sum_{k=1}^c x_0(k, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i(c, 0) & j = 0 \\ x_0(0, j) + \sum_{k=1}^{c-j} x_0(k, j) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i(c-j, j) & 1 \leq j \leq c-1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=c}^{c+L} x_i(0, k) & j = c \end{cases}$$

4. Probability that j servers are busy with Type 2 customers is

$$b_j^{(2)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{c+L} x_0(0, k) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=c}^{c+L} x_i(0, k) & j = 0 \\ \sum_{k=0}^{c-j} x_0(j, k) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i(j, c-j) & 1 \leq j \leq c \end{cases}$$

5. Probability that an arriving customer is lost due to lack of buffer space is

$$P_{lost} = x_0(0, c+L) + \xi(0, c+L)$$

6. Mean number of Type 1 customers in the queue is

$$\mu_{N_1} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=c+1}^{c+L} (k-c)x_i(0, k)$$

7. Mean number of Type 2 customers in the queue is

$$\mu_{N_2} = \sum_{i=1}^{\infty} i \left[\sum_{k=c}^{c+L} x_i(0, k) + \sum_{j=1}^c x_i(j, c-j) \right]$$

8. Rate of Type 2 customers leaving with Type 1 customers denoted by $R_{T_2 \rightarrow T_1}$ upon service completion of Type 1 customers is

$$R_{T_2 \rightarrow T_1} = p\mu_1 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=c}^{c+L} cx_i(0, k) + \sum_{j=1}^{c-1} (c-j)x_i(j, c-j) \right]$$

9. Rate of Type 2 customers leaving the system denoted by $R_{T_2 \rightarrow S}$ upon getting service by one of c -servers is

$$R_{T_2 \rightarrow S} = \mu_2 \left[\sum_{j=1}^c \sum_{k=0}^{c-j} j x_0(j, k) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^c j x_i(j, c-j) \right]$$

4. Conclusions

The main advantage with the problem we analyzed in this paper in comparison with that of Chakravarthy and Dudin [1] is that the loss of Type 1 customers is reduced due to preemption. The rate of loss of Type 1 in our case is probability of $c + L$ Type 1 customers in the system whereas that in Chakravarthy and Dudin [1] is $\sum_{i=0}^c \text{Prob.}(c - i \text{ Type 1 in service and } L \text{ in waiting})$. This results in a larger number of Type 2 customers being served by Type 1 customers. However, preemption of a Type 2, sometimes even more than once, may lead to its longer waiting time in the system. Nevertheless if suitable incentives is provided to Type 1 customers who serve a Type 2 customers on leaving the system, then p may become close to 1, if not equal to 1.

Acknowledgments

Research of the first and second authors is supported by Kerala State Council for Science, Technology & Environment (No. 001/KESS/2013/CSTE). Research of the third author is supported by the University Grants Commission, Government of India, under Faculty Development Programme (Grant No. F. FIP / 12th Plan / KLMG003TF05).

References

1. *Chakravarthy S. R., Dudin A. N.* A Queueing Model for Crowdsourcing. — Journal of the Operational Research Society —2016.
2. *Howe J.* Crowdsourcing: A definition. <http://www.crowdsourcing.com>.
3. *Latouche G., Ramaswami V.* An Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling // SIAM, Philadelphia, 1999.
4. *Neuts M. F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach. — The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981 [1994 version is Dover Edition].

MAP/PH/1 retrial queueing-inventory system with orbital search and renegeing of customers

A. Krishnamoorthy*, Dh. Shajin*

** Department of Mathematics
Cochin University of Science and Technology
Cochin-682022, India.*

Abstract. A single server retrial queueing-inventory is considered in which customers join directly to the orbit according to a Markovian arrival process (MAP). Service time of customers are independent and identical distributed phase-type distributed (PH) random variables. Inter retrial times are exponentially distributed with parameter $n\eta$ when n customers are in the orbit. Unsuccessful retrial customers tend to leave the system (impatience) with positive probability. In addition we also introduce search of orbital customers for next service with state dependent probability, immediately on current service completion. This system is shown to be always stable. We compute the long run system state probability.

A particular case of the above system is considered in which all underlying distributions are exponential. Under certain stringent conditions we prove this special case to have a product form solution.

Keywords: queueing-inventory, stochastic decomposition, retrial, orbital search, renegeing.

1. Introduction

In this paper we first discuss a general queueing-inventory model with correlated inter arrival time (Markovian arrival process (MAP)) and phase type distributed service time. Primary customers are directed to an orbit of infinite capacity from where they try to access the server. Impatience of such customers is taken into account. In addition we introduce search for orbital customers at the end of a service, provided there is at least one item left in inventory and the orbit is nonempty. First we analyse this system, which we establish to be always stable. Next we proceed to a special case of the system described above, for which we produce a stochastic decomposition.

Blocking sets (more aptly partial blocking sets) have been discussed in Krenzler and Daduna [4], among several other researchers, to produce product form solution (see for example Schwarz et al. [8], Safari et al. [7]).

Investigation on stochastic decomposition of retrial - queueing - inventory had not produced the desired result for the past one decade. This could be basically attributed to the fact that an appropriate blocking set was evading the researchers. One of the objectives of this paper is to produce such a blocking set and thereby achieve the desired result. In

Since the model described is an LDQBD, we use an algorithmic solution based on Neuts - Rao Truncation processes (see Neuts and Rao [6]) for further analysis. Application of this method modifies the process Ω' into the process $\tilde{\Omega}'$ with infinitesimal generator \tilde{Q}' where

$$\tilde{B}_1 = \tilde{B}_{1,N} \text{ and } \tilde{B}_2 = \tilde{B}_{2,N} \text{ for } n \geq N$$

system state probabilities of n and $n + 1$ differ by less than ϵ for $n \geq N$.

Let ς be the steady state probability vector of \tilde{Q}' . Then $\varsigma\tilde{Q}' = \mathbf{0}, \varsigma\mathbf{e} = 1$. From the repeating part of \tilde{Q}' we can write $\varsigma_{N+k-1} = \varsigma_{N-1}R^k, k \geq 1$ where R is the minimal non-negative solution of the matrix quadratic equation $R^2\tilde{B}_2 + R\tilde{B}_1 + \tilde{B}_0 = \mathbf{0}$. Again $\varsigma\tilde{Q}' = \mathbf{0}$ leads to

$$\varsigma_n = \varsigma_{n-1}R_n, \quad 1 \leq n \leq N - 1$$

where

$$R_n = -\tilde{B}_0 \left[\tilde{B}_{1,n} + R_{n+1}\tilde{B}_{2,n+1} \right]^{-1}, \quad 1 \leq n \leq N - 2$$

and

$$R_{N-1} = -\tilde{B}_0 \left[\tilde{B}_{1,N-1} + R\tilde{B}_2 \right]^{-1}.$$

Now from the normalizing condition we have

$$\varsigma_0 \left[I + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=1}^i R_j + \prod_{j=1}^{N-1} R_j(I - R)^{-1} \right] \mathbf{e} = 1.$$

Next we proceed to compute some system state characteristics.

2.1. Performance measures

- Expected number of customers in the orbit $N_O = \sum_{n=1}^{\infty} n\varsigma_n\mathbf{e}$.
- Probability that the server is idle $P_{idle} = \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma_n(0)\mathbf{e}$.
- Probability that the server is busy $P_{busy} = \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma_n(1)\mathbf{e}$.
- Fraction of time inventory is empty $P_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma_n(0,0)\mathbf{e}$.
- Expected number of customers renegeing per unit time due to no item in the inventory $E_{loss} = \frac{\eta}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n\varsigma_n(0,0)\mathbf{e}$

- Expected rate of successful retrial $E_{SR} = \eta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^S n \varsigma_n(0, i) \mathbf{e}$.
- Expected number of items in the inventory

$$E_I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^S i [\varsigma_n(0, i) \mathbf{e} + \varsigma_n(1, i) \mathbf{e}].$$

- Expected replenishment rate

$$E_{RR} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^s \varsigma_n(0, i) \mathbf{e} + \sum_{i=1}^s \varsigma_n(1, i) \mathbf{e} \right].$$

3. Special Case

This special case provides product form solution to the system state. The MAP in Section 2 is now replaced by a Poisson process of rate λ . The service time is exponentially distributed with parameter μ . For the purpose of producing a stochastic decomposition of the system state, we restrict the arrival of customers as follows: All primary arrivals (external customers) must join an orbit of infinite capacity on arrival, from where, through retrial alone, they can access the server (as in Neuts and Rao [6]). Further if the server is busy at the time an external arrival takes place, then that external customer does not join the system. The customer at the head of the orbit alone accesses the server through retrial (see Gomez-Corral [3]). The interval between two successive repeated attempts is exponentially distributed with parameter η . Another crucial assumption that when inventory level is zero, no primary customer joins orbit or orbital customers retry (even if they do so, they return to orbit). Then with notations provided in the indication $\Omega = \{(N(t), C(t), I(t)), t \geq 0\}$ forms a CTMC with state space $\{(n, 0, i); n \geq 0, 0 \leq i \leq S\} \cup \{(n, 1, i); n \geq 0, 1 \leq i \leq S\}$ which is an LIQBD process.

Lemma 3.1. *The system under study is stable if and only if $\lambda < \eta$.*

Theorem 3.2. *Under the necessary and sufficient condition $\lambda < \eta$, for stability, we get*

$$x_n(k, i) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{\eta}\right) \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^n \xi(k, i), & k = 0, 0 \leq i \leq S, \\ \left(1 - \frac{\lambda}{\eta}\right) \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^n \xi(k, i), & k = 1, 1 \leq i \leq S \end{cases}$$

where $\xi(k, i)$ are inventory level probabilities.

4. Conclusions

In this paper a $MAP/PH/1$ queueing-inventory problem with exponentially distributed lead time was considered. We introduced impatience of orbital customers, which in turn resulted in the system being stable always. Search for orbital customers, immediately on completion of a service resulted in shorter expected waiting time than that in models without this search. In a special case we produced explicit product form solution for a retrieval - queueing - inventory problem.

Acknowledgments

This research is supported by Kerala State Council for Science, Technology & Environment (No.001/KESS/2013/CSTE).

References

1. *Artalejo J. R., Joshua V. C., Krishnamoorthy A.* An $M/G/1$ retrieval queue with orbital search by the server, in J. R. Artalejo and A. Krishnamoorthy (Eds.): *Advance in Stochastic Modelling*. — 'Notable Publications, Inc., New Jersey, USA, 2002.
2. *Chakravarthy S. R.* The batch Markovian arrival process: a review and future work / A. Krishnamoorthy et al. (Eds.): *Advances in Probability Theory and Stochastic Process*. — Notable Publications, New Jersey, USA, 2001. — P. 21–49.
3. *Gomez-Corral A.* Stochastic analysis of a single server retrieval queue with general retrieval times. // *Naval Research Logistics*. — 1999. — Vol. 46, no. 5. — P. 561–581.
4. *Krenzler R., Daduna H.* Loss systems in a random environment steady-state analysis // *Queueing System*. — 2014. — Vol. 80, no. 1–2. — P. 127–153.
5. *Neuts M. F.* *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. — The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981 [1994 version is Dover Edition].
6. *Neuts M. F., Rao B. M.* Numerical investigation of a multi-server retrieval model // *Queueing System*. — 1990. — Vol. 7. — P. 169–190.
7. *Saffari M., Asmussen S., Haji R.* The $M/M/1$ queue with inventory, lost sale and general lead times // *Queueing System*. — 2013. — Vol. 75. — P. 65–77.
8. *Schwarz M., Sauer C., Daduna H., Kulik R., Szekli R.* $M/M/1$ queueing systems with inventory // *Queueing System*. — 2006. — Vol. 54. — P. 55–78.
9. *Tweedie R. L.* Sufficient conditions for regularity, recurrence and ergodicity of Markov processes // *Proc. Camb. Phil. Soc.* — 1975. — Vol. 78, no. 1. — P. 125–136.

УДК 519.2, 51(091)

**Вероятностная школа Бориса Владимировича
Гнеденко: выдающийся вклад
Александра Дмитриевича Соловьева**

И. Н. Коваленко*

** Отдел математических методов теории надежности
сложных систем,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ,
пр-т академика Глушкова 40 Киев, Украина, 03680*

Аннотация. Александр Дмитриевич Соловьев является виднейшим ученым в области теории надежности сложных восстанавливаемых систем. Он ввел понятие систем с быстрым восстановлением и установил принципы их асимптотического анализа в «треугольной» схеме. Ключом к получению простых асимптотических формул явилось соотношение $q \sim q_0$, где q - вероятность отказа системы на периоде регенерации, q_0 - то же при монотонном пути достижения отказа. Другим направлением был поиск оптимальной дисциплины восстановления отказавших элементов, в частности, обоснование оптимальности дисциплины Шрага (Schraga). А.Д. Соловьев воспитал многих учеников, применивших его методы к различным классам систем. А.Д. Соловьев – лауреат Государственной премии СССР в коллективе авторов, возглавляемом Б.В. Гнеденко (1979).

1. Основная часть

Предметом моей гордости и источником множества счастливых воспоминаний служит моя причастность к научной школе академика АН УССР Бориса Владимировича Гнеденко (1.01.1912 – 25.12.1995) – всемирно известного ученого и педагога, прекрасного, душевно щедрого человека. Кроме него – моего главного учителя – считаю своими близкими учителями университетских преподавателей академика АН СССР и НАН Украины Владимира Сергеевича Михалевича (1930-1994), академика НАН Украины Владимира Семеновича Королюка (р. 1925), профессора Льва Аркадьевича Калужнина (1914-1990). Б.В. Гнеденко жил и работал на Украине 15 лет (1945-1960) – 5 лет во Львове и 10 лет в Киеве. В связи со своей годичной командировкой в ГДР (1953-1954) Б.В. Гнеденко, по договоренности с А.Н. Колмогоровым, отправил своих аспирантов В.С. Королюка, В.С. Михалевича и Анатолия Владимировича Скорохода для дальнейшей подготовки в Москву (Королюка и Михалевича к академику А.Н. Колмогорову, Скорохода – к профессору Е.Б. Дынкину. [“Я – ученик Дынкина” – всегда говорил Скороход.]

Вернувшись потом в Киев, остепененные стажеры щедро делились с научной молодежью интересными задачами. Помню, первая задача, привезенная Михалевичем от Колмогорова, состояла в следующем.

Пусть X_{ik} , $1 \leq i \leq r$, $1 \leq k < \infty$ - независимые наблюдения с распределением $F(x - a_k)$, где ни a_k , ни $F(x)$ неизвестны. Можно ли при некотором r восстановить функцию $F(x - a)$ с точностью до неизвестного a ?

Я получил ответ: такого r , общего для всех F , не существует.

Стажер В.С. Михалевич писал своей жене М.М. Диесперовой в Киев, как они однажды возвращались от Колмогорова и все трое сошлись на мысли, что еще не встречали такого хорошего и душевного человека, как Борис Владимирович Гнеденко. В 1960 году Гнеденко возвратился в Москву, в МГУ – вначале профессором, а потом на долгие годы, до самой смерти (1995) заведующим кафедрой теории вероятностей.

Вслед за своим учителем в январе 1962 г. переехал в Москву и я. Мне, кандидату наук, очень хотелось узнать новые задачи, чтобы расти в науке дальше. Работал я в оборонном институте 10 лет. Начальником института был Иван Макарович Пенчуков, позднее генерал-лейтенант, а его замом по науке – профессор Николай Пантелеймонович Бусленко, позднее член-корреспондент АН СССР.

Среди гражданских сотрудников отдела был выпускник МГУ Виктор Аронович Ивницкий – мой способнейший московский ученик. Как и я, он теперь доктор технических наук и доктор физ.-мат. наук, заслуженный деятель науки и техники РФ.

Приступив к работе на кафедре, Б.В. Гнеденко организовал при ней семинар по теории массового обслуживания и теории надежности. Вначале он пригласил меня в качестве соруководителя. Вскоре он выбрал еще двух соруководителей Юрия Константиновича Беляева и Александра Дмитриевича Соловьева. Семинар посещало много участников. Среди тех, кто потом стал известным ученым, укажу Гелия Павловича Башарина, Геннадия Павловича Климова, Виктора Алексеевича Каштанова, Владимира Вячеславовича Калашникова, Владимира Васильевича Рыкова,

Михаила Андреевича Федоткина, Екатерину Вадимовну Булинскую, Ларису Григорьевну Афанасьеву, Александра Владимировича Макаричева. Много было прикладных специалистов: военных, связистов, транспортников и других. Евгений Юрьевич Барзилович, впоследствии мой хороший друг, занимался оптимизацией эксплуатации летательных аппаратов (он сам служил в ВВИА им. Н.Е. Жуковского), Л.Г. Афанасьева занималась теорией управления потоком гражданских самолетов в аэропорту. М.А. Федоткин исследовал закономерности потоков на автомобильных дорогах. Было много запросов со стороны инженеров в области надежности радиоэлектронной аппаратуры, механических и других систем.

Мне на моем новом месте работы была поставлена задача построить модель надежности крупнейшего технического комплекса и подобрать эффективный вычислительный метод.

В киевском Институте математики издавна развивался метод малого параметра для применения к системам самого различного назначения. Одним из создателей метода был знаменитый академик Н.Н. Боголюбов. (Кстати, именно он посоветовал Б.В. Гнеденко переехать для работы на Украину.) Я удачно применил этот метод к решению поставленной мне задачи. В результате был разработан асимптотический метод анализа надежности сложных систем. Источником введения в модель малого параметра была высокая надежность элементов систем. Довольно быстро я написал и защитил диссертацию на степень доктора технических наук.

После моего возвращения в Киев (1971) семинар эффективно функционировал много лет под руководством Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляева и А.Д. Соловьева.

Борис Владимирович Гнеденко насчитал двадцать участников семинара, благодаря которому они выросли до докторов наук.

В 60-х годах А.Н. Колмогоров организовал Проблемную статистическую лабораторию при МГУ. Выдающийся статистик Ю.К. Беляев был главной научной силой в лаборатории.

Основное научное направление А.Д. Соловьева – теория массового обслуживания и теория надежности систем. С уверенностью скажу, что именно он создал асимптотические методы в теории надежности.

В этой теории особую роль играет исследование моделей систем с «быстрым восстановлением» (термин ввел А.Д. Соловьев). Первые две задачи такого рода решил Б.В. Гнеденко (ТК 1964: 4, ТК 1964: 5). [Здесь и далее ТК означает журнал «Техническая кибернетика»], привнеся в них методы суммирования независимых случайных величин. Принципы нахождения асимптотики надежности для сложных систем даны А.Д. Соловьевым (ТК 1971: 6). После этой статьи появилась целая серия работ Соловьева и его учеников о конкретных схемах резервирования: Д.Б. Гнеденко, А.Д. Соловьев (ТК 1974: 6, ТК 1975: 3); А.Д. Соловьев, В.А. Зайцев (ТК 1975:1); В.А. Зайцев, А.Д. Соловьев (ТК 1975:4); В.Н. Овчинников, А.Д. Соловьев (Тр. III Всес. шк.-совещ. по теории массового обслуживания. Изд-во Московск. ун-та, 1976); О. Сахобов, А.Д. Соловьев (ТК 1977:4); А.Д. Соловьев, Д.Г. Константинович (Теория вероятностей и ее применения, 1992: 37, вып. 1); И.В. Брыгина, А.Д. Соловьев (ТК 1983: 3) и другие. В каждой работе требовались свои тонкости анализа, общее же состоит в нахождении асимптотики надежности в «треугольной» схеме и рассмотрении монотонной траектории процесса до отказа.

Другое важное направление исследований А.Д. Соловьева и его учеников – нахождение оптимальной дисциплины обслуживания. Данной проблеме посвящены работы: А.Д. Соловьев (ТК 1970: 5); В.В. Козлов, А.Д. Соловьев (ТК 1978: 3, ТК 1978: 4); А.В. Печинкин, А.Д. Соловьев, С.Ф. Яшков (ТК 1979: 5). В частности, изучались вопросы оптимальности (в разных смыслах) дисциплины Шрага (L. Schrage),

при которой первым восстанавливается тот элемент, у которого остаточное время восстановления наименьшее.

В статье А.Д. Соловьева (Теория массового обслуживания. Труды Всесоюзной школы-семинара, Москва, 1981) предлагается обобщенная схема оптимизации: в ней возможные дисциплины зависят от X_i^- и X_i^+ - соответственно, накопленных и остаточных «длин» обслуживания.

А.В. Макаричев выполнил большой цикл работ по данной тематике; из них работы А.В. Макаричев (ТК 1982: 3; Автоматика и телемеханика 1988:9; Электронное моделирование 1993: 1; Теория вероятностей и ее применение 1995: 40:1; Теория на возможности и математическая статистика. Математика. Материалы за 8-а международна научна практична конференция, «Научният потенциал на света - 2012», - София, 2012.

О научно-техническом резонансе отечественных работ по надежности говорит присуждение нашему коллективу (математики и прикладные исследователи) Государственной премии СССР за 1979 год. Председателем коллектива был Б.В. Гнеденко.

Существенную роль сыграло то, что в коллектив вошли ведущие ученые прикладных направлений, в особенности Игорь Алексеевич Рябинин и Николай Алексеевич Северцев.

Я работаю в отделе математических методов теории надежности сложных систем Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины с 1971 года.

На выбор нашей тематики и методы решения задач всегда сильное влияние оказывают труды таких корифеев, как Андрей Николаевич Колмогоров, Борис Владимирович Гнеденко, и, конечно, ученого огромного таланта, педагога удивительного мастерства Александра Дмитриевича Соловьева.

Приведу пять примеров.

1. После решения задачи А.Н. Колмогорова о булевом определителе: И.Н. Коваленко (Теория вероятностей и ее применения, 1972:ХVII:2), А.А. Левитская развила асимптотический анализ случайных линейных систем уравнений над некоммутативным кольцом: А.А. Левитская (Кибернетика и системный анализ, 2010:3).

2. Н.Ю. Кузнецов (Кибернетика и системный анализ, 2016:1) применил метод ускоренного моделирования к оценке комбинаторных чисел (задача, давно известная в школе А.Н. Колмогорова).

3. Е.В. Коба (Koba E.V. Theory of Stochastic Processes, 2002, 24:8) исследовала условия эргодичности систем с повторением заявок, продолжив авиационную тематику Л.Г. Афанасьевой.

4. И.Н. Коваленко (Украинский математический журнал, 2000:52:9) несколько улучшил результат Д.Б. Гнеденко и А.Д. Соловьева (ТК 1964:4).

5. В теории надежности, в том числе в работах А.Д. Соловьева, характеристики системы часто представляются дробно-линейным функционалом I от некоторого распределения G . Л.С. Стойкова (Л.С. Стойкова, С.П. Красников, Кибернетика и системный анализ, 2016:6) построила метод нахождения границ изменения I в условиях неопределенности.

Отмечая 90-летие со дня рождения Александра Дмитриевича Соловьева (23 октября 2017 года), мы ценим его выдающиеся научные результаты, неутомимую педагогическую деятельность и лучшие человеческие качества нашего друга Саши Соловьева.

UDC 519.2, 51(091)

**Probabilistic school of Boris Vladimirovich Gnedenko:
outstanding contribution of
Alexander Dmitrievich Soloviev**

I. N. Kovalenko*

** Department of mathematical methods of the theory of reliability of
complex systems,
Institute of Cybernetics them. VM Glushkov National Academy of Sciences,
Academician Glushkov Ave 40 Kiev, Ukraine, 03680*

Alexandr D. Soloviev is an outstanding scholar in the theory of complex renewable systems. He introduced the term “system with a fast repair” and established principles towards asymptotical analysis of such systems, in a “triangle” approach. The key goal was in the proof of a relation $q \sim q_0$ where q is the failure probability in a renewal cycle whereas q_0 is the reduction of to monotonic type failures. Another topic of Soloviev’s research related the optimization of the queueing discipline. In particular the optimality of Schrage discipline was established in some cases. A.D. Soloviev guided many disciples. A.D. Soloviev was awarded the State Prize of USSR in a collective led by Boris V. Gnedenko (1979).

UDC 519.24

Adapted statistical experiments with random change of time

D. Koroliouk*, V. S. Koroliuk†

* *Institute of Telecommunications and Global Information Space,
Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, Ukraine*

† *Institute of Mathematics,
Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, Ukraine*

Abstract. We study statistical experiments with random change of time, which transforms a discrete stochastic basis in a continuous one. Adapted stochastic experiments are studied in continuous stochastic basis in the series scheme. The transition to limit by the series parameter generates an approximation of adapted statistical experiments by a diffusion process with evolution.

The average intensity parameter of renewal times are estimated in three different cases: the Poisson renewal process, stationary renewal process with delay and the general renewal process with Weibull-Gnedenko renewal time distribution.

Keywords: statistical experiment, random change of time, special semimartingale, triplet of characteristics, limit theorem, statistic parameter estimation.

Adapted statistical experiments with random change of time are realized by a counting renewal process $\nu(t)$, $t \geq 0$, with the Markov renewal moments:

$$\tau_k := \inf\{t : \nu(t) \geq k\}, \quad k \geq 0.$$

The renewal intervals $\theta_{k+1} := \tau_{k+1} - \tau_k$, $k \geq 0$, $\tau_0 = 0$ are determined by the distribution function $\Phi(t) = \mathbf{P}\{\theta_{k+1} < t\}$.

The normalized counting renewal process $\nu_N(t)$, $t \geq 0$, in the series scheme with $N \rightarrow \infty$, is defined by the time stretching: $\nu_N(t) := \nu(tN)$, $t \geq 0$.

The random change of time in a discrete stochastic basis

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{N}} = (\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_k, k \in \mathbb{N}), \mathcal{P})$$

is given by the filtration $\mathfrak{G}_t^N = \mathfrak{F}_{\nu_N(t)}$, $t \geq 0$.

The adapted statistical experiments with random change of time is determined by a solution of the following difference stochastic equation:

$$\Delta \alpha_N(\tau_{k+1}^N) = -V_0(\alpha_N(\tau_k^N))/N + \Delta \mu_N(\tau_{k+1}^N)/\sqrt{N}, \quad k \geq 0,$$

with the normalized regression function of increments:

$$V_0(c) = V(1 - c^2)(c - \rho), \quad |c| \leq 1, \quad |\rho| < 1, \quad V > 0.$$

Using the notations

$$\alpha_k^N := \alpha_N(\tau_k^N), \quad \mu_k^N := \mu_N(\tau_k^N),$$

the adapted statistical experiment $\alpha_N(t)$, $t \geq 0$, is characterized, as a special semimartingale, by three predictable characteristics [1, ch.2]:

— evolutionary component

$$V_t^N = -\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\nu_N(t)-1} V_0(\alpha_k^N), \quad t \geq 0; \tag{1}$$

— variation of the stochastic component

$$\sigma_t^N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\nu_N(t)} \sigma^2(\alpha_k^N), \quad \sigma^2(c) := 1 - V^2(c), \quad t \geq 0,$$

— compensating measure of jumps

$$\Gamma_t^N(g) := \sum_{k=0}^{\nu_N(t)-1} \mathbb{E}[g(\Delta\alpha_{k+1}^N) | \mathfrak{F}_k^N], \quad t \geq 0. \tag{2}$$

The limit theorem for the adapted statistical experiments is based on the canonical representation for semimartingales by the triplet of predictable characteristics (5) – (7). It is implemented in two stages.

Stage 1. The compactness of adapted statistical experiments (2) by $N \rightarrow \infty$ is established by using the approach [4] (see also [5]).

Stage 2. By additional conditions for predictable characteristics: the functions $V_0(c)$, $\sigma^2(c)$, $|c| \leq 1$ identify the limiting process, defined by the the limit predictable characteristics.

Theorem 1. *The adapted statistical experiments $\alpha_N(t)$, $t \geq 0$ in series scheme with the series parameter $N \rightarrow \infty$, determined by the predictable characteristics (1) - (1) with additional condition of convergence of initial values:*

$$\alpha_N(0) \xrightarrow{D} \alpha_0, \quad \mathbb{E}\alpha_N(0) \rightarrow \mathbb{E}\alpha_0, \quad N \rightarrow \infty.$$

converges, in distribution, to the diffusion process with evolution with scale change of time

$$\alpha_N(t) \xrightarrow{D} \alpha_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad N \rightarrow \infty.$$

The predictable characteristics of the limiting process $\alpha^0(t)$, $t \geq 0$ has the following representation:

$$V_t^0 = \int_0^{qt} V_0(\alpha^0(u))du, \quad \sigma_t^0 = \int_0^{qt} \sigma^2(\alpha^0(u))du, \quad 0 \leq t \leq T.$$

and the compensating measure of jumps is absent:

$$\Gamma_t^N(g) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad g(c) \in C_3(\mathbb{R}).$$

The limit diffusion process with evolution $\alpha^0(t) = \alpha_0(qt)$, $t \geq 0$, is given by the stochastic differential equation

$$d\alpha(t) = -V_0(\alpha(t))dt + \sigma(\alpha(t))dW_t, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

with the linear time scaling

$$\alpha_0(t) = \alpha(qt), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

The scaling parameter is determined by the renewal intensity $q = 1/\mathbf{E}\theta_{k+1}$, $k \geq 0$.

The main statistical problem for the adapted statistical experiments is to estimate the scaling parameter q using the theory of renewal processes [6–8]

The simplest Poisson renewal process, as well as the stationary renewal process with delay, are characterized by the equality:

$$\mathbf{E}\nu(T) = qT, \quad T > 0.$$

At the same time, for a process with arbitrarily distributed renewal intervals

$$\Phi(t) = \mathbf{P}\{\theta_{k+1} \leq t\}, \quad k \geq 0,$$

the parameter q has estimation by using the strong law of large numbers [10, Ch.IV, §3]

$$\hat{q} \approx \nu(T)/T.$$

The mentioned above statistical estimations has been numerically verified on the simulated trajectories of the renewal processes with previously fixed parameters in the cases discussed above.

Case 1: Poisson renewal process with parameter $q = 2$. In this case the nodal formula $\mathbf{E}\nu(t) = qt$ and its statistical interpretation $\mathbf{E}\hat{\nu}(t) = \hat{q}t$ implies the statistical estimates $\hat{q}_T = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \nu_m(T)/T$. Using exponential renewal interval generation $\theta_i = -(1/q) \ln(1-x_i)$, $x_i \in U(0, 1)$, one stimulates the random samples of the level T hitting times of for the renewal process $\nu(T)$, in order to obtain the statistical estimates \hat{q}_T :

Table 1

Estimate \widehat{q}_T by $M = 10$

T=5	T=10	T=20	T=40	T=70	T=100	T=150	T=200
1,88	2,18	2,07	1,985	2,0057	2,028	2,018	1,9685

Case 2: The stationary renewal process with delay, determined by the initial distribution function of limit overjumps. Here a particular case is considered, with the initial renewal intervals calculated by the overjump a level T for enough big T . The other renewal intervals have Weibull-Gnedenko distribution function $W(1/2, 1/2)$: $\Phi(t) = 1 - e^{-\sqrt{2t}}$, $t \geq 0$. The strong law of large numbers provides the statistical estimation $\widehat{q} \approx \nu(T)/T$.

Considering that $1/q = E\theta_k = (1/2)\Gamma(3) = 1$, hence $q = 1$.

The numerical simulation of the level T hitting times $\nu_m(T)$, $m = 1, 2, \dots$ for the renewal process τ_k , $k \geq 1$, gives the following statistical estimates \widehat{q}_T :

Table 2

Estimate \widehat{q}_T

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$T = 200$	1	0,935	1,02
$T = 300$	0,996666667	0,93	1,073333333
$T = 400$	1,075	0,945	1,0375

Case 3: Renewal processes with arbitrarily distributed renewal intervals. Here a particular case is considered, with Weibull-Gnedenko distribution function $W(2, 2)$: $\Phi(t) = 1 - e^{-t^2/4}$, $t \geq 0$. The strong law of large numbers provides the statistical estimation $\widehat{q} \approx \nu(T)/T$. Considering that $1/q = E\theta_k = \lambda\Gamma(1, 5) = \sqrt{\pi}$, one has $q = 1/\sqrt{\pi} \approx 0,56419$.

Using $W(2,2)$ renewal interval generation $\theta_k = 2 \cdot (-\ln(x_k))^{1/2}$, $x_k \in U(0, 1)$, one obtains the level T hitting times $\nu_m(T)$, $m = 1, 2, \dots$ for the renewal process τ_k , $k \geq 1$, which gives the following statistical estimates \widehat{q}_T :

Table 3

Estimate \widehat{q}_T

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$T = 300$	0,5633333333	0,56	0,57
$T = 450$	0,5666666667	0,5577777778	0,5666666667
$T = 580$	0,574137931	0,565517241	0,565517241
$T = 725$	0,569655172	0,55862069	0,56137931

Conclusion

The convergence of the adapted statistical experiments with random change of time to a limit diffusion process with evolution $\alpha_0(t)$, $t \geq 0$, given by the stochastic differential equation (1) with the linear time scaling (1), reduces the problem of the random change of time to a statistical estimation of only the average renewal intensity parameter q .

References

1. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit Theorems for Stochastic Processes. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1987. — 661 p.
2. *Koroliouk D.* Two component binary statistical experiments with persistent linear regression // *Theor. Probability and Math. Statist.* — 2015. — Vol. 90. — P. 103–114.
3. *Ethier S. N., Kurtz T. G.* Markov Processes: Characterization and Convergence. — Willey, NY, 1986. — 534 p.
4. *Liptser R. Sh.* The Bogolyubov averaging principle for semimartingales // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* — 1994. — No. 4. — P. 1–12.
5. *Limnios N., Samoilenko I.* Poisson approximation of processes with locally independent increments with Markov switching // *Teor. Imovir. ta Matem. Statyst.* — 2013. — No. 89. — P. 104–114.
6. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2. — Wiley, NY, 1971. — 694 p.
7. *Shurenkov V. M.* On the theory of Markov renewal // *Theory Probab. Appl.* — 1984. — Vol. 29. — P. 247–265.
8. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. — World Scientific, Singapore, London, 2005. — 331 p.
9. *Smith W. L.* Renewal theory and its ramifications // *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B.* — 1958. — Vol. 20. — P. 243–302.
10. *Shiryaev A. N.* Probability-2. — Springer, NY, 2018. — 927p.

УДК 519.217; 519.214.8

Локальный принцип больших уклонений для неоднородных марковских процессов

Н. Д. Введенская¹, А. В. Логачёв¹,
Ю. М. Сухов¹, А. А. Ямбарцев[‡]

¹ Добрашинская лаборатория ИППИ РАН,
Большой Каретный, 19, Москва, Россия, 127051

¹ Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр. ак. Каптюга, 4, Новосибирск, Россия. 630090,

[‡] Department of Statistics, Institute of Mathematics and Statistics,
University of São Paulo,
Rua do Matão 1010, CEP 05508-090, São Paulo SP, Brazil.

Аннотация. В работе рассматривается марковский процесс с непрерывным временем, в котором интенсивность скачков имеет асимптотически степенную зависимость от положения процесса. Получена экспоненциальная асимптотика вероятностей экскурсий нормированного процесса, протекающих в окрестности заданной неотрицательной непрерывной функции.

Ключевые слова: Марковские процессы, большие уклонения, локальная задача.

1. Постановка задачи. Основная теорема.

В современной литературе, посвященной принципу больших уклонений, рассматриваются различные условия, которые накладываются на случайные процессы, для получения экспоненциальной асимптотики вероятностей маловероятных событий (см., например, [1]).

Мы будем рассматривать скачкообразные марковские процессы неоднородные по фазовому пространству, интенсивности скачков которых полиномиально зависят от положения процесса. При этом удается получить экспоненциальную асимптотику для вероятностей нахождения в окрестности непрерывной функции как для эргодических процессов такого типа так и для невозвратных, в том числе допускающих "взрывы".

Изучение таких марковских процессов представляет несомненный математический интерес и, кроме того, важно для многих приложений. Например, в теории информации (кодирование и хранение информации), биологии и химии (модели роста и вымирания системы со многими компонентами), экономике (модели конкурентоспособного производства и ценообразования).

Мы рассмотрим марковский случайный процесс с непрерывным временем $\xi(t), t \geq 0$ и с фазовым пространством $\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$, который стартует из 0.

Изменение процесса $\xi(\cdot)$ опишем следующим образом. Пусть $\xi(t) = x \in \mathbb{Z}^+$. Положение случайного процесса не изменяется на протяжении

случайного времени τ_x , которое имеет экспоненциальное распределение с параметром $h(x) > 0$.

В момент времени $t + \tau_x$ случайный процесс переходит в состояния $x \pm 1$ с вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi(t + \tau_x) = x + 1) = \frac{\lambda(x)}{h(x)}, \quad \mathbf{P}(\xi(t + \tau_x) = x - 1) = \frac{\mu(x)}{h(x)} \quad (1)$$

соответственно, где $\lambda(x) + \mu(x) = h(x)$, $\lambda(x) > 0$ при $x \in \mathbb{Z}^+$, $\mu(x) > 0$ при $x \in \mathbb{N}$.

Будем предполагать, что при $x = 0$ справедливы равенства $\mu(x) = 0$, $\lambda(x) = \lambda_0 > 0$ (не можем покинуть множество \mathbb{Z}^+), а также, что выполнены асимптотические условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda(x)}{P_l x^l} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu(x)}{Q_m x^m} = 1, \quad (2)$$

где P_l и Q_m – положительные константы, $l \geq 0$, $m \geq 0$, $\max(l, m) > 0$.

Существование марковского процесса с перечисленными свойствами для случаев, когда $l \leq 1$ устанавливается стандартным способом, см. например, [2], гл. 17, §4, 5.

При $l > 1$ процесс $\xi(\cdot)$, вообще говоря, может уйти на бесконечность ("взорваться") за случайное время, которое с вероятностью 1 конечно. Есть два подхода построения таких процессов: 1) обрыв процесса в случайный момент времени (момент взрыва), 2) расширение фазового пространства \mathbb{Z}^+ добавлением поглощающего состояния ∞ .

Имеющиеся результаты позволяют выписать условия на l и m , достаточные как для ухода, так и для не ухода на бесконечность. Например, при $l > 1$ и $m < l$ процесс $\xi(\cdot)$ уйдет на бесконечность за конечное случайное время, а при $m > l$ не уйдет на бесконечность за конечное время.

Нас интересует локальный принцип больших уклонений (ЛПБУ) для последовательности случайных процессов

$$\xi_T(t) = \frac{\xi(tT)}{T}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $T > 0$ – параметр, который неограниченно возрастает (см. например, [3]).

Справедливость наших результатов не зависят от того, уходит или нет процесс $\xi(\cdot)$ на бесконечность за конечное время. Мы изучаем асимптотику вероятностей траектории процесса $\xi_T(\cdot)$ находиться в окрестности непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции. Т.е. мы работаем на множестве тех траекторий, на которых исходный процесс не уходит на бесконечность на отрезке $[0, T]$. Рассматриваемые вероятности положительны даже если процесс $\xi(\cdot)$ "взрывается" за конечное время (см. ниже выражение (1)).

Рассмотрим пространство $\mathbb{D}[0, 1]$ непрерывных справа и имеющих пределы слева функций. Для $f, g \in \mathbb{D}[0, 1]$ положим

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|. \tag{3}$$

Определение. Последовательность случайных процессов $\xi_T(\cdot)$ удовлетворяет ЛПБУ на множестве $G \subset \mathbb{D}[0, 1]$ с функционалом уклонений $I = I(f) : \mathbb{D}[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ и нормирующей функцией $\psi(T) : \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(T) = \infty$, если для любой функции $f \in G$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}(\xi_T(\cdot) \in U_\varepsilon(f)) \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}(\xi_T(\cdot) \in U_\varepsilon(f)) = -I(f), \text{ где} \\ & U_\varepsilon(f) = \{g \in \mathbb{D}[0, 1] : \rho(f, g) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

В рамках данного Определения возможны разные случаи. Ниже мы рассматриваем три случая для вида функционала уклонений в зависимости от того какое из следующих трех условий выполнено 1) $l > m$; 2) $l = m$; 3) $l < m$.

Заметим, что случай $m = 1, l = 0$ следует из работы [4] (там рассмотрен двухмерный марковский процесс). Классический случай $l = m = 0$ следует, например, из работы [5]. Мы пользуемся подходом работы [4].

Обозначим через F множество функций из $C^1[0, 1]$, таких что $f(0) = 0, f(s) > 0$ при $0 < s \leq 1$.

Теорема. Пусть выполнены условия (1) и (1). Тогда последовательность случайных процессов $\xi_T(t)$ удовлетворяет следующему ЛПБУ на множестве F .

a) Если $l > m$, то нормирующая функция $\psi(T) = T^{l+1}$ и функционал уклонений имеет вид

$$I(f) = P_l \int_0^1 f^l(t) dt, \quad f \in F.$$

b) Если $l = m$ и $P_l \neq Q_m$, то $\psi(T) = T^{l+1}$ и функционал уклонений имеет вид

$$(f) = (\sqrt{P_l} - \sqrt{Q_m})^2 \int_0^1 f^l(t) dt, \quad f \in F.$$

c) Если $l < m$, то нормирующая функция $\psi(T) = T^{m+1}$ и функционал уклонений имеет вид

$$I(f) = Q_m \int_0^1 f^m(t) dt, \quad f \in F.$$

Случай $l = m, P_l = Q_m$ требует другой нормировки и здесь нами не рассматривается.

Изучении асимптотического поведения логарифма вероятности $\mathbf{P}(\xi_T(\cdot) \in U_\varepsilon(f))$ для функций $f \in F$ опирается на приведенную ниже Лемму.

Рассмотрим однородный и по пространству и по времени марковский процесс $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$, с фазовым пространством \mathbb{Z} , интенсивностью скачков равной 1, размером скачков равным ± 1 , каждый с вероятностью $1/2$.

Обозначим через X_T множество всех непрерывных справа кусочно-постоянных функций с конечным числом скачков размера ± 1 на интервале $[0, T]$.

Лемма. *Распределение случайного процесса $\xi(\cdot)$ на X_T абсолютно непрерывно относительно распределения процесса $\zeta(\cdot)$ и соответствующая плотность $\mathbf{p} = \mathbf{p}_T$ (плотность Радо-Никодима) на X_T имеет вид*

$$\mathbf{p}(u) = \begin{cases} 2^{N_T(u)} \left(\prod_{i=1}^{N_T(u)} e^{-[h(u(t_{i-1})) - 1]\tau_i} \nu(u(t_{i-1}), u(t_i)) \right) \\ \quad \times e^{-[h(u(t_{N_T(u)})) - 1][T - t_{N_T(u)}]}, & \text{если } N_T(u) \geq 1, \\ e^{-[h(0) - 1]T}, & \text{если } N_T(u) = 0. \end{cases}$$

Здесь функция u имеет $N_T(u)$ скачков в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_{N_T(u)}$ таких что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_T(u)} < T < t_{N_T(u)+1}$. Далее, $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, u

$$\nu(u(t_{i-1}), u(t_i)) = \begin{cases} \lambda(u(t_{i-1})), & \text{если } u(t_i) - u(t_{i-1}) = 1; \\ \mu(u(t_{i-1})), & \text{если } u(t_i) - u(t_{i-1}) = -1. \end{cases}$$

В утверждении Леммы учитывается, что $\mathbf{P}(\xi(\cdot) \in X_T)$ может быть меньше 1. Заметим, что похожая плотность использовалась в работе [4].

Утверждение Леммы эквивалентно тому, что для любого измеримого множества $G \subseteq X_T$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi(\cdot) \in G) &= e^T \mathbf{E}(e^{-A_T(\zeta)} e^{B_T(\zeta) + N_T(\zeta) \ln 2}; \zeta(\cdot) \in G) \\ A_T(\zeta) &= \sum_{i=1}^{N_T(\zeta)} h(\zeta(t_{i-1}))\tau_i + h(u(t_{N_T(u)}))[T - t_{N_T(u)}] = \int_0^T h(\zeta(t))dt, \\ B_T(\zeta) &= \sum_{i=1}^{N_T(\zeta)} \ln(\nu(\zeta(t_{i-1}), \zeta(t_i))). \end{aligned}$$

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.А. Боровкову, Б.М. Гуревичу, А.М. Могульскому и Е.А. Печерскому за интерес к работе и полезные замечания. Исследование Н.Д. Введенской выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №. 14-50-00150).

Литература

1. Dembo A., Zeitoun O. Large Deviations Techniques and Applications. – Springer, NY, 1998.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 2-е изд. — М.: Мир, 1966.
3. Боровков А. А., Мозульский А. А. О принципах больших уклонений в метрических пространствах // Сиб. мат. ж. — 2010. — Т. 51, вып. 6. — С. 1251–1269.
4. Mogulsky A., Pechersky E., Yambartsev A. Large deviations for excursions of non-homogeneous Markov processes // Electronic Commun. Probab. — 2014. — V. 19. — P. 1–8.
5. Боровков А. А., Мозульский А. А. Неравенства и принципы больших уклонений для траекторий процессов с независимыми приращениями // Сиб. мат. ж. — 2013. — Т. 54, вып. 2. — С. 286–297.

UDC 519.217; 519.214.8

Local large deviation principle for inhomogeneous Markov processes

N. D. Vvedenskaya¹, A. V. Logachev¹, Yu. M. Suhov¹,
A. A. Yambartsev[‡]

¹ Institute for information transmission problems RAS,
Bolshoy Karetny per. 19, build.1, Moscow 127051 Russia

¹ Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian
Academy of Sciences,
4 Acad. Koptyug avenue, 630090, Novosibirsk, Russia

[‡] Department of Statistics, Institute of Mathematics and Statistics,
University of São Paulo,
Rua do Matão 1010, CEP 05508–090, São Paulo SP, Brazil

Consider a continuous-time Markov BDP $\{\xi(t), t \geq 0\}$ with a state space $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\}$. Given that $\xi(t) = x \in \mathbb{Z}^+$, the state x remains unchanged during an exponential random time τ_x of rate $h(x) := \lambda(x) + \mu(x)\mathbf{1}(x \geq 1)$; afterwards. We investigate the probability of excursions in a neighborhood of curve.

Keywords: Markov processes, large deviations, local problem.

UDC 519.2, 004.9, 616.936

Data mining in predicting neuro-developmental scores from EEG data during coma due to cerebral malaria

M. Veretennikova*, A. Sikorskii[†], M. Boivin[‡]

* *Department of Statistics and Data Analysis, Faculty of Economics, National Research University Higher School of Economics, Ul. Shabolovka, 28, 119049, Moscow, Russia*

[†] *Department of Statistics and Probability, Michigan State University, 619 Red Cedar Rd C413, East Lansing, MI 48824, USA*

[‡] *Department of Neurology and Ophthalmology, Michigan State University, East Fee Hall, 965 Fee Road, East Lansing, MI 48824, USA*

Abstract. In this research we compare the performance of different data mining techniques in the analysis of electroencephalogram (EEG) data. We study the question of predicting post-comatose neuro-developmental scores based mainly on statistical features from the EEG recordings. We compare results from applying different data mining techniques, such as the Elastic Net, Lasso, Gaussian Support Vector Regression and Random Forest Regression. We also compare the results produced with different matrix completion methods.

Keywords: data mining, regression, regularization, random forests, matrix completion, EEG, Daubechies wavelets.

1. Introduction

Modern technologies used for statistical analysis of the brain include EEG, MEG, PET, fMRI and optical imaging. EEG is often used for monitoring patients with seizures and epilepsy. Seizures, along with coma, convulsions, and metabolic disturbances are common complications of cerebral malaria (CM) [1], a tropical disease affecting over half a million people annually, mostly in sub-Saharan Africa. Different sources indicate distinct mortality rates, ranging from 4 to 46 percent. Possible mechanisms of brain injury during CM are studied in [1].

In [3] the authors predict neuro-developmental outcomes for term infants with hypoxic ischaemic encephalopathy (HIE) from EEG features such as flat trace, burst suppression and low voltage. The authors highlight that the reason for such a data mining problem is to accurately identify children in need for neuro-restorative therapy. For instance in [4] the authors present the literature review about the relation of between seizures in neonates and development of neuro-developmental complications such as epilepsy, intellectual impairment and cerebral palsy.

In this research we analyze EEG data children in coma due to cerebral malaria. As it is noted in [2] a large proportion of children who recover

from cerebral malaria have neurological consequences, some even developing difficulties in cognition and behaviour [2]. However specific mechanisms leading to neuro-developmental deficits have not been established, hence there is a need to use data mining techniques to identify important features, which can then be further researched by neurologists. We pose the question of predicting post-comatose neuro-developmental scores based mainly on features from the EEG recordings. The idea is to identify the most important features for identifying children with the highest risk of experiencing neuro-developmental problems and to look into usefulness of EEG statistical features for this prediction problem.

2. Main section

In this research we compare the prediction results using different data mining techniques, such as the Elastic Net, Lasso, Gaussian Support Vector Regression and Random Forest Regression. We also compare the results produced with different matrix completion methods.

Our dataset comprises of the standard 10-20 EEG recordings for 78 patients with the sampling rate of 500 Hz and the average record duration of 30 minutes. Artefacts due to breath, muscle movement and heart beat were removed from the raw data using Persyst software based on a neural network algorithm. We chose to use Daubechies (Db) wavelets for splitting the clean signal into frequency bands.

Different research indicates particular suitability of Db4 for statistical EEG analysis and we checked the relative average MSE errors between the wavelet signal approximation and the actual signal for different Daubechies wavelets for the data. Our results indicated that Db4 yields an MSE or order 10^{-9} , which is reasonably low. Also, Db4 frequency band separation results in frequency intervals which are very close to the traditional ranges for delta, theta, beta, alpha and gamma bands.

The features include amplitude variances in delta, theta, alpha, beta and gamma frequency bands, Shannon entropies, relative frequency band energy, proportion of flat line EEG, presence of seizures as a binary variable, frequencies of peaks in the original cleaned time series differing from the nearest measurements from both sides by 1/3, 1, 2 and 3 standard deviations (we will denote these by FP 1/3, 1, 2 and 3 for simplicity), complexity and mobility of the time series averaged over all considered channels. Other features included: height, weight, the Blantyre coma score, age, hemoglobin base level and economic home scores.

We have used the Elastic Net and Lasso, combined with PCA methods, Random Forest Regression (RFR) and regularized Support Vector Regression. To begin with we considered the feature matrix with 54 non-EEG features complementing the 362 statistical EEG features. This meant we had to complete 504 missing matrix entries. We have used different methods to complete the matrix, including the SoftImpute method based on Singular Value Decomposition considerations with regularization and a nonparametric method missForest based on the random forest technique.

We also looked at how changing the structure of the feature matrix affects the prediction results.

We have gone checked a grid of regularization parameter λ values in the minimization problem which is the base of the matrix completion method called SoftImpute. The best results were obtained for $\lambda = 100$ and here we present some details.

Running the Elastic Net yielded 27 non-zero coefficients with $MSE = 0.37934$. All coefficients from the FP 2 and 1 come with the positive sign, so do weight, height and hemoglobin base. The top 13 coefficients in absolute value are all positive and are above 50, the top 12 are from FP 2 and FP 1 groups, weight being the 13th largest coefficient in absolute value.

We have experimented with the structure of the matrix, for example doing random selection of a channel from each block of features of the same nature, removing all medical features and all EEG features in turn, changing some of the feature values to the column means to detect importance of the feature in the prediction. Here we present some of the outcomes.

Removing all EEG or all medical features made the Elastic Net zero every single coefficient, but the intercept, which signals that it is beneficial to use both types of feature for prediction purposes. Removing all patients who were identified as having a seizure during the EEG recording made the prediction by the Elastic Net much worse.

Using random forest regression (RFR) with 1000 trees and bootstrapping yields a very low out-of-bag error of 0.015 and the MSE is 0.1208. We have implemented regularized support vector regression with the RBF kernel, going over a grid of penalty C and kernel γ coefficients, but cross validation showed that this method is inferior to the results produced by Random Forest Regression and the Elastic Net.

Using a non-parametric method for matrix completion yielded results similar and slightly better in accuracy to most of the outcomes using the Elastic Net with SoftImpute, the MSE being 0.55709 with 68 non-zero coefficients. However, the result didn't surpass the prediction quality of the best result with the Elastic Net following SoftImpute matrix completion.

3. Conclusions

We conclude that EEG features bring significant value in prediction of neuro-developmental scores of children after their awaking from coma due to cerebral malaria. In particular we identify several potentially most useful biomarkers of EEG nature for this specific prediction problem. These include the frequency of spikes higher than 1 and 2 standard deviations from their nearest neighbours in time, relative wave energies for different frequency bands and variance in the theta frequency band. Details and relation to other research will be presented at the conference.

We will continue investigating the effect of using different matrix completion methods and in the most effective ways to identify efficient EEG biomarkers for such prediction problems.

Acknowledgments

The work is partially funded by the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01098).

References

1. *Idro R. et al.* Cerebral Malaria; Mechanisms of Brain Injury And Strategies For Improved Neuro-Cognitive Outcome // *Pediatr. Res.* — 2010. — Vol. 68, no. 4. — P. 267–274.
2. *World Health Organization.* Severe Malaria // *Tropical Medicine and International Health.* — 2014. — Vol. 19. Suppl.
3. *Awal Md. A., Lai M. M., Azemi G., Boashash B., Colditz P. B.* EEG background features that predict outcome in term neonates with hypoxic ischaemic encephalopathy: A structured review // *Clinical Neurophysiology.* — 2016. — Vol. 125, no. 1. — P. 285–296.
4. *Pisani F., Facini C., Pavlidis E., Spagnoli C., Boylan G.* Epilepsy after neonatal seizures: Literature review // *European Journal of Paediatric Neurology.* — 2015. — Vol. 19. — P. 6–14.
5. *Mazumder R., Hastie T., Tibshirani R.* Spectral Regularization Algorithms for Learning Large Incomplete Matrices // *Journal of Machine Learning Research.* — 2010. — Vol. 11. — P. 2287–2322.
6. *Stekhoven D. J., Buhlmann P.* MissForest - non-parametric missing value imputation for mixed-type data // *Bioinformatics.* — 2012. — Vol. 28, no. 1. — P. 112–118.

UDC 519.218

The Analysis of Cloud Computing System as a Queueing System with Several Servers and a Single Buffer

I. S. Zaryadov^{*†}, A. A. Kradenyh^{*}, A. V. Gorbunova^{*}

** Department of Applied Probability and Informatics,
RUDN University,*

Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

† Institute of Informatics Problems, FRC CSC RAS

IPI FRC CSC RAS, 44-2 Vavilova Str., Moscow, 119333, Russia

Abstract. The mathematical model of cloud computing system based on the queueing system with the splitting of the incoming queries and synchronization of services is considered. The queueing system consists of a single buffer and N servers ($N > 2$), service times are independent and exponentially distributed. The incoming query enters the system as a whole and only before service is divided into subqueries, each subquery is served by its device. The servers with parts of the same query are considered to be employed as long as the query is not serviced as a whole: the query is handled only when the last of it is out and a new query may be served only when there are enough free servers (the response time is the maximum of service times of all parts of this query). The stationary probability-time characteristics of the system are presented.

Keywords: cloud computing system, splitting of incoming queries, queueing system, response time, stationary probability-time characteristics.

1. Introduction

This paper is devoted to the problem of cloud computing modeling [1]. There are several approaches to the cloud computing systems modeling. For the first approach [3–6] the cloud computing system is modeled via queueing system with K subqueues and each subqueue consists of a buffer with one (several) server. The incoming query is divided into K subqueries and each subquery enters the corresponding subqueue. On this approach the Fork–Join [3, 4] and Split–Merge [7–9] models are based. The Split–Merge model uses the idea of synchronization of servers (only when the all subqueries of the same query finished servicing the new query will be served). The second approach presents the cloud computing system as queueing system with unlimited number of homogeneous servers [10, 11], where the incoming query splits into several parts and each subquery is served by one of the free servers.

Our mathematical model of cloud computing system may be considered as general case of the second approach: the queueing system consists of N servers, a buffer and the incoming queries are splitted only before the start of the service. Also we use the idea of synchronization of services as in [7–9].

Our goal is to derive the analytical expressions for some probability-time characteristics of introduced model.

The paper consists of following sections: the Introduction, the section with system description for the general case (non-homogeneous servers), the section for homogeneous servers where the main results are obtained, in Conclusion the future goals are formulated.

2. The system description for general case

We will construct the mathematical model as a queuing system with N non-homogeneous servers ($N > 2$) and a buffer of size $r \leq \infty$. The incoming by a Poisson law with rate λ query enters the system as a whole and only before the start of its service is divided into N subqueries, the service time of each subquery has exponential distribution with rate μ_i , $i = \overline{1, N}$. The mechanism of synchronization is used — the servers with parts of the same query are considered to be employed as long as the query is not serviced as a whole: the query is handled only when the last part of it is out and a new query may be served only when all servers are free.

The service time for a whole query — the response time η (the main characteristic for cloud computing systems [2]) may be defined as maximum $\eta = \max(\eta_1, \dots, \eta_N)$ [3–5] or as minimum $\eta = \min(\eta_1, \dots, \eta_N)$ [12] of times spent by subqueries. In [13] is shown that the analysis of queuing models with the response time defined as minimum is equal to the analysis of well-studied multiserver queuing systems [14]. So we will consider only the case of maximum.

The probability distribution function (PDF) of $\eta = \max(\eta_1, \dots, \eta_N)$ has the form [6, 13, 15]:

$$P\{\max(\eta_1, \dots, \eta_N) < x\} = \prod_{i=1}^N (1 - e^{-\mu_i x}). \quad (1)$$

For homogeneous servers ($\mu_i = \mu, \forall i = \overline{1, N}$) the (2) takes the form:

$$P\{\max(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) < x\} = (1 - e^{-\mu x})^N. \quad (2)$$

We will consider the random process $\nu(t) = \{\xi(t), \vec{\delta}(t)\}$, $\xi(t)$ is the number of queries in the buffer at time t , the vector $\vec{\delta}(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_N(t))$ describes the servers occupancy ($\delta_i(t) = 1$ if the i -th server is occupied by the i -th part of a query and $\delta_i(t) = 0$ otherwise). The set of states is defined as $\mathcal{X} = \{0\} \cup \{I, (\delta_1, \dots, \delta_N)\}$, where $I = \overline{0; r}$, $\delta_1, \dots, \delta_N$ take values 0 or 1. The probability $P\{\xi(t) = I, \vec{\delta}(t) = \vec{\delta}\}$ is denoted as $p_{I, \vec{\delta}}(t)$ and the probability $P\{\nu(t) = 0\} = P\{\xi(t) = 0, \vec{\delta}(t) = \vec{0}\}$ of system being empty as $p_0(t)$. The steady-state probabilities (on the assumption of steady-state regime existence) are $p_{I, \vec{\delta}}$ and p_0 .

3. The special case. Stationary probability-time characteristics

Let's assume that all servers are homogeneous, then we may redefine the random process $\nu(t)$ as $\nu(t) = \{\xi(t), \delta(t)\}$, $\delta(t)$ — the number of occupied servers for non-empty system. The steady-state probabilities are p_0 (the system is empty) and $p_{i,j}$, $i = \overline{0, r}$, $j = \overline{1, N}$, for case when there i queries in the buffer and j servers are occupied by subqueries, and satisfy the following systems of equations ($r = \infty$):

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_{0,1}, \\ (\lambda + j\mu) p_{0,j} = (j + 1)\mu p_{0,j+1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ (\lambda + N\mu) p_{0,N} = \lambda p_0 + \mu p_{1,1}, \\ (\lambda + j\mu) p_{i,j} = \lambda p_{i-1,j} + (j + 1)\mu p_{i,j+1}, \quad i \geq 1, j = \overline{1, N-1}, \\ (\lambda + N\mu) p_{i,N} = \lambda p_{i-1,N} + \mu p_{i+1,1}, \quad i \geq 1, \end{cases} \tag{3}$$

The normalization condition is:

$$p_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1. \tag{4}$$

If we define the probability distribution π_j , $j = \overline{0, N}$, of number of occupied servers and probability distribution $\tilde{\pi}_i$, $i \geq 0$, of number of queries in the buffer, then from (3) and (3) we obtain:

$$\begin{cases} \lambda \tilde{\pi}_0 = \mu(p_{0,1} + p_{1,1}), \\ \lambda \tilde{\pi}_i = \mu p_{i+1,1}, \quad i \geq 1. \end{cases} \tag{5}$$

and

$$\begin{cases} \pi_0 = p_0, \\ \pi_j = \frac{\lambda}{j\mu}, \quad j = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{6}$$

From (3) and normalization condition (3) for π_j , $j = \overline{0, N}$, the probability p_0 is obtained:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}.$$

The estimation of p_0 for the system with inhomogeneous servers:

$$1 - \frac{\lambda}{\min(\mu_1, \dots, \mu_N)} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \leq p_0 \leq 1 - \frac{\lambda}{\max(\mu_1, \dots, \mu_N)} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}.$$

If we define as $\omega(s)$ the Laplace-Stieltjes transformation (LST) of waiting time PDF for an arbitrary query, $\omega_{i,j}(s)$ — the LST of waiting time PDF for the incoming query when there are i , $i \geq 0$, other queries in the buffer and j , $j = \overline{1, N}$, servers are occupied, then:

$$\omega(s) = p_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \omega_{i,j}(s) p_{i,j} = p_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_N^i(s) \sum_{j=1}^N \omega_j(s) p_{i,j}, \quad (7)$$

where $\omega_j(s)$ is the LST of PDF (2) for $\eta = \max(\eta_1, \dots, \eta_j)$, $j = \overline{1, N}$, [15]:

$$\omega_j(s) = \sum_{i=1}^j (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{C_j^i} k \frac{i\mu}{s + i\mu}.$$

4. Conclusions

The brief introduction to the mathematical model of cloud computing system based on the queuing system with the splitting of the incoming queries and synchronization of services was presented.

Our future goals are to evaluate probabilities $\tilde{\pi}_i(3)$, $i \geq 0$, and $p_{i,j}$ (3), $i \geq 0$, $j = \overline{1, N}$, LST (3) for N homogeneous servers. We also will try to generalize the model for case of $N = \alpha K$ servers, where K is a fixed number of subqueries for a query. And, of course, the model with inhomogeneous servers should be derived.

Acknowledgments

The publication was prepared with the support of the «RUDN University Program 5-100» and partially supported by RFBR grants No 15-07-03007, No 15-07-03406 and No 14-07-00090.

References

1. *Buyya R., Broberg J., Goscinski A. M.* Introduction to cloud computing // Cloud Computing: Principles and Paradigms. — John Wiley & Sons Inc. — 2011. — P. 3–42.
2. *Khazaei H., Misic J., Misic V. B.* A Fine-Grained Performance Model of Cloud Computing Centers // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. — 2012. — Vol. 24, no. 11. — P. 2138–2147.
3. *Flatto L., Hahn S.* Two parallel queues created by arrivals with two demands // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1984. — Vol. 44, no. 5. — P. 1041–1053.

4. *Nelson R., Tantawi A. N.* Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues // IEEE Transactions on Computers. — 1988. — Vol. 37, no. 6 — P. 739–743.
5. *Thomasian A.* Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys (CSUR). — 2014. — Vol. 47, no. 17. — P. 17.1–17.71.
6. *Gorbunova A. V., Zaryadov I. S., Matushenko S. I., Sopin E. S.* The Estimation of Probability Characteristics of Cloud Computing Systems with Splitting of Requests // Proceedings of the Nineteenth International Scientific Conference: Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016, Russia) / Communications in Computer and Information Science. — 2016. — Vol. 678. — P. 418–429.
7. *Duda A., Czachórski T.* Performance evaluation of fork and join synchronization primitives // Acta Informatica. — 1987. — Vol. 24, no. 5. — P. 525–533.
8. *Kim M. Y., Tantawi A. N.* Asynchronous disk interleaving: Approximating access delays // IEEE Transactions on Computers. — 1991. — Vol. 40, no. 7. — P. 801–810.
9. *Fiorini P. M.* Exact Analysis of Some Split Merge Queues. // SIGMETRICS Performance Evaluation Review. — 2015. — Vol. 43, no. 2 — P. 51–53.
10. *Moiseeva S., Sinyakova I.* Investigation of Queueing system $GI(2)|M2|\infty$ // Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks / Proc. of the Int. Conf. — 2011. — P. 219–225.
11. *Moiseeva S., Sinyakova I.* Investigation of Output Flows in the System with Parallel Service of Multiple Requests // Problems of Cybernetics and Informatics (PCI-2012) : IV International Conference (IEEE). Baku, Azerbaijan. — 2012. — P. 180–181.
12. *Joshi G., Soljanin E., Wornell G.* Efficient redundancy techniques for latency reduction in cloud systems // arXiv preprint arXiv:1508.03599. — 2015.
13. *Gorbunova A. V., Kradenyh A. A., Zaryadov I. S.* The mathematical model of a cloud computing system // Proceedings of the Nineteenth International Scientific Conference: Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016). — Vol. 3: Youth School–Seminar. — 2016. — P. 169–175.
14. *Bocharov P.P., D’Apice C., Pechinkin A.V., Salerno S.* Queueing Theory. — VSP, Utrecht, Boston, 2004.
15. *Harrison P., Zertal S.* Queueing Models with Maxima of Service Times // Computer Performance Evaluation. Modelling Techniques and Tools. Lecture Notes in Computer Science. — 2003. — Vol. 2794. — P. 152–168.

UDC 519.2

On Coupling and Convergence in Density and in Distribution

H. Thorisson*

* *University of Iceland, Dunhaga 3, 107 Reykjavik, Iceland*

Abstract. According to the Skorohod representation theorem, convergence in distribution to a limit in a separable set is equivalent to the existence of a coupling with elements converging a.s. in the metric. A density analogue of this theorem says that a sequence of probability densities on a general measurable space has a probability density as a pointwise lower limit if and only if there exists a coupling with elements converging a.s. in the discrete metric. In this note the discrete-metric theorem is extended to a sequence of stochastic processes considered in a widening time window. The extension is then used to prove the Skorohod representation theorem.

Keywords: coupling, widening time window, Skorohod representation.

1. Introduction

Let X_1, X_2, \dots, X be random elements in some measurable space (E, \mathcal{E}) with distributions P_1, P_2, \dots, P , respectively. Let $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X})$ denote a coupling of X_1, X_2, \dots, X . This means that the random elements $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}$ are all defined on the same probability space and have the distributions P_1, P_2, \dots, P , respectively.

If E is a metric space and \mathcal{E} its Borel subsets, write

$$X_n \rightarrow X \text{ in distribution as } n \rightarrow \infty$$

to denote that for each bounded continuous function $h : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int h dP_n \rightarrow \int h dP \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

The following result is the celebrated Skorohod Representation Theorem. It was proved by Skorohod in 1956 for random elements in a complete separable space, [2]. Dudley [1] removed the completeness assumption in 1968 and Wichura [5] showed in 1970 that it suffices that the support of P is separable.

Theorem 1. *Let E be a metric space, let \mathcal{E} be its Borel subsets, and let P have a separable support. Then*

$$X_n \rightarrow X \text{ in distribution as } n \rightarrow \infty$$

if and only if there is a coupling $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X})$ of X_1, X_2, \dots, X such that

$$\hat{X}_n \rightarrow \hat{X} \text{ pointwise in the metric as } n \rightarrow \infty. \quad \triangleright$$

Here we shall present a proof of this theorem based on the concept of *convergence in density*. In Section 2, we introduce that concept and prove the associated representation (coupling) theorem which has a relatively simple proof. In Section 3, we extend that representation theorem to stochastic processes considered in a widening time window. In Section 4, we use the extension to prove the Skorohod Representation Theorem.

2. Convergence in Density

Let f_1, f_2, \dots, f be densities of X_1, X_2, \dots, X with respect to a measure λ . Note that such a λ always exists: we can for instance take $\lambda = P + \sum \frac{1}{2^i} P_i$. Let

$$X_n \rightarrow X \text{ in density as } n \rightarrow \infty$$

denote that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ a.e. } \lambda \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Note that f_n/f is defined a.e. with respect to P . It is the Radon-Nikodym density dP_n/dP of the absolutely continuous part of P_n with respect to P . Thus convergence in density is equivalent to

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} dP_n/dP = 1 \text{ a.e. } P \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Note also that in the discrete case convergence in density means simply that $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x)$, $x \in E$.

In a 1995 paper [3], Section 5.4, this author established the following analog of the Skorohod Representation Theorem.

Theorem 2. *Let (E, \mathcal{E}) be a general measurable space. Then*

$$X_n \rightarrow X \text{ in density as } n \rightarrow \infty$$

if and only if there is a coupling $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X})$ of X_1, X_2, \dots, X such that

$$\hat{X}_n \rightarrow \hat{X} \text{ pointwise in the discrete metric as } n \rightarrow \infty. \quad \triangleright$$

Proof. First, assume the coupling claim, namely that there is an \mathbb{N} -valued random variable N such that $\hat{X}_n = \hat{X}$, $n \geq N$. Fix $B \in \mathcal{E}$ and $n < m$. Partition E into sets $A_n, \dots, A_m \in \mathcal{E}$ such that $\min_{n \leq i \leq m} f_i = f_j$ on A_j for $n \leq j \leq m$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{X} \in B, N \leq n) &= \sum_{j=n}^m \mathbb{P}(\hat{X} \in B \cap A_j, N \leq n) \quad [\text{partition}] \\ &= \sum_{j=n}^m \mathbb{P}(\hat{X}_j \in B \cap A_j, N \leq n) \quad [\text{since } \hat{X}_j = \hat{X} \text{ when } j \geq n \geq N] \\ &\leq \sum_{j=n}^m \mathbb{P}(\hat{X}_j \in B \cap A_j) = \sum_{j=n}^m \int_{B \cap A_j} f_j = \int_B \min_{n \leq i \leq m} f_i \leq 1. \end{aligned}$$

Send first $m \rightarrow \infty$ to obtain that $\mathbb{P}(\hat{X} \in B, N \leq n) \leq \int_B \inf_{n \leq i < \infty} f_i \leq 1$. Then send $n \rightarrow \infty$ to obtain that

$$P(B) \leq \int_B \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq 1 \quad \text{for all } B \in \mathcal{E}.$$

This forces $P(B) = \int_B \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ for all $B \in \mathcal{E}$. Thus the if-direction holds.

Conversely, assume that $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ is a density of X . Let μ_n be the measure with density $g_n := \inf_{m \geq n} f_m$ w.r.t. λ . Then $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \nearrow P$. Let $N, V_1, V_2, \dots, W_1, W_2, \dots$ be independent random elements such that

$$N \text{ has distribution function } \mathbb{P}(N \leq n) = \mu_n(E), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$V_n \text{ has distribution } (\mu_n - \mu_{n-1})/\mathbb{P}(N = n) \text{ where } \mu_0 = 0,$$

$$W_n \text{ has distribution } (P_n - \mu_n)/\mathbb{P}(N > n).$$

Put $\hat{X}_n = V_N$ on $\{N \leq n\}$ and $\hat{X}_n = W_n$ on $\{N > n\}$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{X}_n \in \cdot) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(V_i \in \cdot) \mathbb{P}(N = i) + \mathbb{P}(W_n \in \cdot) \mathbb{P}(N > n) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} (\mu_i - \mu_{i-1}) + (P_n - \mu_n) = P_n. \end{aligned}$$

Put $\hat{X} = V_N$. Then (again by telescoping)

$$\mathbb{P}(\hat{X} \in \cdot) = \sum_{1 \leq i < \infty} \mathbb{P}(V_i \in \cdot) \mathbb{P}(N = i) = \sum_{1 \leq i < \infty} (\mu_i - \mu_{i-1}) = P.$$

Clearly $\hat{X}_n = \hat{X}$, $n \geq N$. Thus the only-if-direction also holds. □

3. Convergence in Density – Widening Time Window

Set $(H, \mathcal{H}) = (E^{(1)}, \mathcal{E}^{(1)}) \otimes (E^{(2)}, \mathcal{E}^{(2)}) \otimes \dots \otimes (E, \mathcal{E})$. If $\mathbf{Z} = (Z^1, Z^2, \dots, X)$ is a random element in (H, \mathcal{H}) write $\mathbf{Z}^k = (Z^1, Z^2, \dots, Z^k)$ for a time window of length $k \in \mathbb{N}$. Set $(H^k, \mathcal{H}^k) = (E^{(1)}, \mathcal{E}^{(1)}) \otimes \dots \otimes (E^{(k)}, \mathcal{E}^{(k)})$.

The following theorem is from the author’s 2016 paper [4].

Theorem 3. *Let $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}$ be random elements in (H, \mathcal{H}) . Then*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \mathbf{Z}_n^k \rightarrow \mathbf{Z}^k \text{ in density as } n \rightarrow \infty$$

if and only if there are integers $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, a coupling $(\hat{\mathbf{Z}}_1^{k_1}, \hat{\mathbf{Z}}_2^{k_2}, \dots, \hat{\mathbf{Z}})$ of $\mathbf{Z}_1^{k_1}, \mathbf{Z}_2^{k_2}, \dots, \mathbf{Z}$ and an \mathbb{N} -valued N such that

$$\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} = \hat{\mathbf{Z}}^{k_n}, \quad n \geq N. \quad \triangleright$$

Proof. First, assume the coupling claim. Fix $k \in \mathbb{N}$, take $m \in \mathbb{N}$ such that $k_m \geq k$, and note that then the coupling claim yields $\hat{\mathbf{Z}}_n^k = \hat{\mathbf{Z}}^k$ for $n \geq \max\{N, m\}$. Theorem 2 now yields the density claim.

Conversely, with Q, Q^k, Q_n^k the distributions of $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^k, \mathbf{Z}_n^k$ and with f_n^k a density of Q_n^k , assume that $g_n^k := \inf_{i \geq n} f_i^k \nearrow$ to a density of $Q^k, n \rightarrow \infty$. Hence with ν_n^k the measure with density g_n^k ,

$$\nu_1^k \leq \nu_2^k \leq \dots \nearrow Q^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Thus there are numbers $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ such that

$$0 \leq Q^k - \nu_{n_k}^k \leq 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

For $A \in \mathcal{H}$ and $\mathbf{z}^k \in H^k$, let $q_k(A | \mathbf{z}^k)$ be the conditional probability of the event $\{\mathbf{Z} \in A\}$ given $\mathbf{Z}^k = \mathbf{z}^k$. Then

$$Q(A) = \int q_k(A | \cdot) dQ^k, \quad A \in \mathcal{H}.$$

Use $\nu_{n_k}^k \ll Q^k$ to extend $\nu_{n_k}^k$ from (H^k, \mathcal{H}^k) to a ν_k on (H, \mathcal{H}) by

$$\nu_k(A) := \int q_k(A | \cdot) d\nu_{n_k}^k, \quad A \in \mathcal{H}.$$

For $k \in \mathbb{N}_0$ the last three displays yield

$$0 \leq Q - \nu_k \leq 2^{-k}. \tag{1}$$

Let h_k be a density of ν_k with respect to Q . For integers $k < m$ let $\nu_{k,m}$ be the measure with density $\min_{k \leq j \leq m} h_j$ with respect to Q . Partition H into sets $A_k, \dots, A_m \in \mathcal{H}$ such that $\min_{k \leq j \leq m} h_j = h_i$ on A_i and thus

$$\nu_{k,m}(\cdot \cap A_i) = \nu_i(\cdot \cap A_i), \quad k \leq i \leq m.$$

This and (1) yield

$$0 \leq Q - \nu_{k,m} = \sum_{k \leq i \leq m} (Q(\cdot \cap A_i) - \nu_i(\cdot \cap A_i)) \leq \sum_{k \leq i < \infty} 2^{-i} = 2^{-k+1}.$$

Define $k_n := k$ if $n_k \leq n < n_{k+1}$. Then $0 \leq Q - \nu_{k_n,m} \leq 2^{-k_n+1}$. Let μ_n be the measure with density $\inf_{i \geq k_n} h_i$ with respect to Q and send $m \rightarrow \infty$ to obtain $0 \leq Q - \mu_n \leq 2^{-k_n+1}$. Thus

$$0 =: \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \nearrow Q.$$

Since $g_n^k \leq f_n^k$ and $\inf_{i \geq k_n} h_i \leq h_{k_n}$ we have $\nu_n^k \leq Q_n^k$ and $\mu_n \leq \nu_{k_n}$. Thus

$$\mu_n^{k_n} \leq Q_n^{k_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Now apply the last two displays: let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ support independent random elements $N, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots$ such that

$$N \text{ is } \mathbb{N} \text{ valued and } \mathbb{P}(N \leq n) = \mu_n(H), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\mathbf{V}_n \text{ is } H \text{ valued and } \mathbb{P}(\mathbf{V}_n \in \cdot) = (\mu_n - \mu_{n-1})/\mathbb{P}(N = n),$$

$$\mathbf{W}_n \text{ is } H^{k_n} \text{ valued and } \mathbb{P}(\mathbf{W}_n \in \cdot) = (Q_n^{k_n} - \mu_n^{k_n})/\mathbb{P}(N > n).$$

Put $\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} = \mathbf{V}_N^{k_n}$ on $\{N \leq n\}$ and $\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} = \mathbf{W}_n$ on $\{N > n\}$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} \in \cdot) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathbf{V}_i^{k_n} \in \cdot) \mathbb{P}(N = i) + \mathbb{P}(\mathbf{W}_n \in \cdot) \mathbb{P}(N > n) \\ &= \sum_{i=1}^n (\mu_i^{k_n} - \mu_{i-1}^{k_n}) + (Q_n^{k_n} - \mu_n^{k_n}) = Q_n^{k_n}. \end{aligned}$$

Put $\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{V}_N$. Then

$$\mathbb{P}(\hat{\mathbf{Z}} \in \cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathbf{V}_i \in \cdot) \mathbb{P}(N = i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mu_i - \mu_{i-1}) = Q.$$

Clearly $\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} = \hat{\mathbf{Z}}^{k_n}$, $n \geq N$. □

We now extend $(\hat{\mathbf{Z}}_1^{k_1}, \hat{\mathbf{Z}}_2^{k_2}, \dots, \hat{\mathbf{Z}})$ to a full coupling $(\hat{\mathbf{Z}}_1, \hat{\mathbf{Z}}_2, \dots, \hat{\mathbf{Z}})$ in a special case. This extension will be used in the next section.

Corollary. *Let $(H, \mathcal{H}) := (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) \otimes (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}) \otimes \dots \otimes (E, \mathcal{E})$. Then*

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ and } \mathbf{i}^k \in \mathbb{N}^k : \quad \mathbb{P}_n(\mathbf{Z}_n^k = \mathbf{i}^k) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{Z}^k = \mathbf{i}^k) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

if and only if there exists a coupling $(\hat{\mathbf{Z}}_1, \hat{\mathbf{Z}}_2, \dots, \hat{\mathbf{Z}})$ of $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}$, an \mathbb{N} -valued random variable N and integers $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ such that

$$\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} = \hat{\mathbf{Z}}^{k_n}, \quad n \geq N$$

Proof. Let $\mathbf{V}_{n, \mathbf{i}^{k_n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{i}^{k_n} \in \mathbb{N}^{k_n}$, be random elements that are independent of $(\hat{\mathbf{Z}}_1^{k_1}, \hat{\mathbf{Z}}_2^{k_2}, \dots, \hat{\mathbf{Z}}, N)$ and such that $\mathbf{V}_{n, \mathbf{i}^{k_n}}^{k_n} = \mathbf{i}^{k_n}$ and $\mathbb{P}(\mathbf{V}_{n, \mathbf{i}^{k_n}} \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \in \cdot | \mathbf{Z}_n^{k_n} = \mathbf{i}^{k_n})$. Since $\mathbf{V}_{n, \hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n}}^{k_n} = \hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n}$ we can extend $\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n}$ consistently to a $\hat{\mathbf{Z}}_n$ by $\hat{\mathbf{Z}}_n := \mathbf{V}_{n, \hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n}}$. □

Remark. If (E, \mathcal{E}) is Polish then $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ can be replaced by a Polish space. Moreover, Theorem 3 holds for general continuous-time $\hat{\mathbf{Z}}$, and if (E, \mathcal{E}) is Polish then in the corollary the discrete-time processes can be replaced by processes in Skorohod space. For proofs of these results, see [4].

4. Skorohod Representation Theorem – Proof

The if-direction of Theorem 1 is straightforward: if h is continuous and bounded and $\hat{X}_n \rightarrow \hat{X}$ pointwise as $n \rightarrow \infty$ then also $h(\hat{X}_n) \rightarrow h(\hat{X})$, which by bounded convergence yields $\int h dP_n \rightarrow \int h dP$ as $n \rightarrow \infty$.

In order to prove the only-if-direction of Theorem 1, assume from now on that $X_n \rightarrow X$ in distribution as $n \rightarrow \infty$. A set $A \in \mathcal{E}$ is called a P -continuity set if its boundary has P -mass 0. According to the Portmanteau Theorem, convergence in distribution is equivalent to

$$P_n(A) \rightarrow P(A), \quad n \rightarrow \infty, \text{ for all } P\text{-continuity sets } A.$$

Assume also that there is a separable set $S \in \mathcal{E}$ such that $P(S) = 1$.

Partition E recursively into nested partitions of P -continuity sets:

Let A_2, A_3, \dots be disjoint P -continuity sets covering S , of diameters < 1 . Put $A_1 = E \setminus (A_2 \cup A_3 \cup \dots)$ and note that A_1 is also a P -continuity set.

Put $A_{11} = A_1$ and $A_{12} = A_{13} = \dots = \emptyset$. For $i > 1$, let A_{i2}, A_{i3}, \dots be disjoint P -continuity sets covering $S \cap A_i$, each of diameter $< 1/2$. Put $A_{i1} = A_i \setminus (A_{i2} \cup A_{i3} \cup \dots)$, note that A_{i1} is also a P -continuity set.

Continue this recursively to obtain that

$\{A_{i^k} : \mathbf{i}^k \in \mathbb{N}^k\}$, $k \in \mathbb{N}$, are nested E -partitions of P -continuity sets, and A_{i^k} , $\mathbf{i}^k \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^k$, cover S and are of diameters $< 1/k$. (2)

Put

$$\mathbf{Z}_n = (Z_n^1, Z_n^2, \dots, X_n) \quad \text{and} \quad \mathbf{Z} = (Z^1, Z^2, \dots, X)$$

where Z_n^k and Z^k are defined as follows: for $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{i}^k \in \mathbb{N}^k$,

$$\mathbf{Z}_n^k = \mathbf{i}^k \text{ if } X_n \in A_{i^k} \quad \text{and} \quad \mathbf{Z}^k = \mathbf{i}^k \text{ if } X \in A_{i^k}.$$

Now $P_n(A_{i^k}) \rightarrow P(A_{i^k})$ yields $\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n^k = \mathbf{i}^k) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{Z}^k = \mathbf{i}^k)$ as $n \rightarrow \infty$. Apply the corollary to obtain a coupling $(\hat{\mathbf{Z}}_1, \hat{\mathbf{Z}}_2, \dots, \hat{\mathbf{Z}})$ and an \mathbb{N} -valued N such that $\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} = \hat{\mathbf{Z}}^{k_n}$ for $n \geq N$. Delete a null-event to obtain from this that $\hat{X} \in S$ and that for $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{i}^k \in \mathbb{N}^k$,

$$\hat{\mathbf{Z}}_n^k = \mathbf{i}^k \text{ if } \hat{X}_n \in A_{i^k} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{Z}}^k = \mathbf{i}^k \text{ if } \hat{X} \in A_{i^k}.$$

Thus $\hat{X}_n \in A_{\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n}}$ and $\hat{X} \in A_{\hat{\mathbf{Z}}^{k_n}}$ for all n . Now $\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n} = \hat{\mathbf{Z}}^{k_n}$ for $n \geq N$ so

$$\text{for } n \geq N: \quad \text{both } \hat{X}_n \text{ and } \hat{X} \in A_{\hat{\mathbf{Z}}_n^{k_n}}.$$

Since $\hat{X} \in S$ we have $\hat{\mathbf{Z}}^{k_n} \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^{k_n}$ and (2) yields (with d the metric)

$$\text{for } n \geq N: \quad d(\hat{X}_n, \hat{X}) < 1/k_n \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

References

1. *Dudley R.M.* Distances of probability measures and random variables // Ann. Math. Statist. — 1958. — Vol. 39. — P. 1563–1572.
2. *Skorohod A.V.* Limit theorems for stochastic processes // Theo. Probab. Appl. — 1956. — Vol. 1. — P. 261–290.
3. *Thorisson H.* Coupling methods in probability theory // Scand. J. Statist. — 1995. — Vol. 22. — P. 159–182.
4. *Thorisson H.* Convergence in Density in Finite Time Windows and the Skorohod Representation // Electron. Commun. Probab. — 2016. — Vol. 21, no. 63. — P. 1–9.
5. *Wichura M.J.* On the construction of almost uniformly convergent random variables with given weakly convergent image laws // Ann. Math. Statist. — 1970. — Vol. 41. — P. 284–291.

UDC 519.24

Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution

B. Yu. Lemeshko*, S. B. Lemeshko*,
I. V. Veretel'nikova*, A. Yu. Novikova*

* *Department of Theoretical and Applied Informatics,
Novosibirsk State Technical University,
20, Prospekt K. Marksa, Novosibirsk, 630073, Russia*

Abstract. In this paper, we consider the application of k -sampling criteria for homogeneity with the possibility of calculating the achieved significance level p -value. The approximating models for the limiting distributions of the k -sample Anderson–Darling test statistics have been obtained. A comparative analysis of the homogeneity tests in terms of power has been carried out. A lot of parametric and nonparametric tests for testing the homogeneity of mathematical expectations are considered. Distributions of classical test statistics for homogeneity of variance have been investigated including the case, when the standard assumption of the normality is violated. A comparative analysis of the power of many parametric and nonparametric criteria, including the case of the violation of normality assumption. The obtained results enable us to draw correct statistical conclusions using the considered tests, including their application in the case of the violation of standard assumptions.

Keywords: homogeneity tests, homogeneity of means, homogeneity of variances, power of tests.

1. Introduction

The criteria for testing the hypothesis of homogeneity are divided into three sets: criteria for testing the hypothesis about the homogeneity of the laws of the k samples being compared, on the homogeneity of means (on the equality of average), on the homogeneity of variances (on the equality of variances).

When checking the homogeneity of laws, the hypothesis that all samples extracted from the same general population is verified

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x)$$

for any x . When testing the hypothesis of homogeneity of means, the hypothesis being tested has the form $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, and when the dispersions are homogeneous – $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$.

To test the homogeneity of laws, nonparametric tests can be used [1] of Smirnov, Lehmann–Rosenblatt, Anderson–Darling tests, Zhang test statistics Z_K, Z_A, Z_C . To test the hypothesis of homogeneity of means, one can use [1] a number of parametric tests (z -test for comparing two averages with known variances; for unknown, but equal variances (t -Student's test);

for unknown and unequal variances; k -sampling F-test) and nonparametric tests (Wilcoxon test, \tilde{z} -Mann – Whitney test, Kruskal – Wallis H test, Van der Waerden test, Fisher – Yates – Terry – Hoeffding test, k -sampling Van der Waerden test).

To test the hypothesis of homogeneity of variances, we have a set of parametric (Bartlett, Cochran, Fisher, Hartley, Levene, Neyman – Pearson, O’Brien, Link, Newman, Bliss – Cochran – Tukey, Cadwell – Leslie – Brown, Overall – Woodward, Z-variance and modified Overall – Woodward Z-variance tests) and nonparametric (Ansari – Bradley, Mood, Siegel – Tukey, Capon, Klotz, Fligner – Killeen tests) tests [1].

The application of parametric tests is due to the assumption that the analyzed particles belong to a partial parametric law. The non-parametric tests on the homogeneity of the mean or characteristic scattering changes do not imply the assumption of normality. However, it is required to fulfill an equally strong assumption about the belonging of the analyzed samples of one type of law (which, as a rule, is not mentioned).

2. Problems of application

Several general problems are associated with the application of the tests. First, the presence of a set of tests for testing the same hypothesis makes the researcher choose the most preferable criterion, which has a higher power with respect to the alternatives in question. A comparative analysis of the power of the groups of tests can be made only on the basis of numerical methods of statistical modeling, which requires appropriate software.

Secondly, in the real world of applications, the standard assumption that samples belong to the normal law, as a rule, is not satisfied or difficult to test due to insufficient sample sizes. Due to the violation of this assumption, the distribution of statistics of parametric tests corresponding to the validity of the hypothesis being tested H_0 , can differ from the available classical results. This is especially critical for parametric tests of dispersion homogeneity.

Thirdly, with limited sample sizes, the distributions of statisticians of parametric tests often differ significantly from the known asymptotic distributions of these statistics.

Fourth, even in the case of the standard assumption, the possibility of correct application of a number of parametric tests is limited by the fact that statistics distributions are not known, and there are only tables of critical values of statistics for a certain number of sample volumes. Therefore, one can not estimate the level of significance achieved p_{value} . For Zhang’s homogeneity tests with statisticians Z_K, Z_A, Z_C there are no tables of critical values, and statistical distributions for justice H_0 depend on the volumes of the samples being compared and the number of samples.

Fifth, distributions of normalized statistics of nonparametric tests are discrete and for small sample sizes differ significantly from the asymptotic standard normal law.

Sixth, the non-parametric criteria for homogeneity of means or tests for the homogeneity of variances (equality of scale parameters) does not imply the assumption of normality. However, an equally strong assumption is required that the laws of the samples analyzed are homogeneous. This is especially important for nonparametric tests for the homogeneity of variances.

Seventh, parametric tests have advantage in power over nonparametric analogs, including under conditions of violation of the standard assumption (in the case of laws that differ from normal ones). This is most noticeable in the case of tests for checking the homogeneity of variances. This fact testifies to the use of parametric tests for the homogeneity of variances under conditions of violation of the standard assumption of normality. To implement this possibility and ensure the correctness of the conclusion about the results of testing the hypothesis, one only needs to be able to find (estimate) the distribution of statistics $G(S | H_0)$. The applied tests under non-standard conditions (in the real conditions of the application). This is quite feasible with the use of statistical modeling methods.

3. Tests for the homogeneity of laws

Problems that should be taken into account when using the tests of homogeneity of laws include the essential discreteness of the distribution of statistics of the Smirnov test and the essential difference between this distribution and the Kolmogorov limit distribution.

A factor hampering the application of the Zhang homogeneity test with statisticians Z_K, Z_A, Z_C , is the dependence of the distributions of statistics on the volumes of the samples being compared and the number of samples and the discreteness of the distribution of statistics Z_K . Therefore, in order to estimate *pvalue*, it is preferable to use the real distributions of statistics found using statistical modeling.

Distributions of statistics Lehmann–Rosenblatt, Anderson–Darling–Pettitt quickly converge to the limit distributions. For k -sampling Variant of the Anderson-Darling criterion, approximate models of limit distributions of statistics (for $k = 2 \div 11$) are constructed and presented in [1].

The power of the tests by statistical modeling methods was investigated with respect to three types of alternatives: a shift, a change in scale, and relative to a situation where a pair of samples belonged to close but different laws (normal and logistic). The obtained power estimates allow us to draw the following conclusions.

Concerning competing hypotheses corresponding to a change in the shift parameter, two-sample Smirnov (Sm), Lehmann–Rosenblatt (LR), Anderson–Darling–Pettitt (AD) tests and Zhang’s test with statisticians Z_K, Z_A, Z_C descending power in the following order (“ \succ ” is preference):

$$AD \succ LR \succ Z_C \succ Z_A \succ Sm \succ Z_K,$$

Against competing hypotheses corresponding to a change in the scale parameter, the criteria are arranged in a different order:

$$Z_A \succ Z_C \succ Z_K \succ AD \succ LR \succ Sm.$$

In a situation where if a competing hypothesis, one sample belongs to a normal distribution, and the second logistic criteria ordered by the power as follows:

$$Z_K \succ Z_A \succ Z_C \succ AD \succ Sm \succ LR.$$

In the case of the k samples in similar situations the same order of preference is saved for k -sampling options test for Anderson-Darling and Zhang.

4. Test for the homogeneity of variances

To test the hypothesis of homogeneity of variances, we propose a set of parametric (Bartlett (B), Cochran (C), Fisher (F), Hartley (H), Levene (L), Neyman–Pearson (NP), O’Brien (OB), Newman (N), Overall–Woodward Z-variance (Z) modified Overall–Woodward Z-variance tests (MZ), Bliss–Cochran–Tukey (BCT), Cadwell–Leslie–Brown (KLB), Link (Lk)) and nonparametric (Ansari–Bradley (AB), Mood (M), Siegel–Tukey (ST), Capon (Ca), Klotz (Kl), Fligner–Killeen (FK)) tests [1].

The violation of the assumption of normality leads to significant changes in the distributions $G(S | H_0)$ statistics of parametric test, which excludes the possibility of using classical results concerning distributions of statistics. To a lesser extent, this remark concerns the O’Brien, Overall–Woodward Z-variance tests and Levene test.

In the case of the analysis of two samples and the fulfillment of the standard assumption of normality, the general picture is as follows:

$$(F \sim B \sim C \sim H \sim NP \sim Z) \succ OB \succ MZ \succ (Kl \sim Ca) \succ L \succ \\ \succ FK \succ M \succ N \succ (AB \sim ST) \succ (BCT \sim KLB \sim Lk).$$

If the standard assumption is violated and two samples are assigned to laws with lighter tails than the normal law, the above order of preference is retained.

For symmetric laws with heavier tails compared with the normal law, the criteria are ordered as follows:

$$FK \succ Kl \succ M \succ L \succ (AB \sim ST) \succ OB \succ MZ \succ (F \sim B \sim C \sim H \sim \\ \sim NP \sim Z) \succ N \succ (BCT \sim KLB).$$

If a larger number of samples are analyzed, then, under the standard assumption, or in the case of sampling of laws with lighter tails compared to normal law, the criteria for decreasing power are arranged in the following order:

$$C \succ OB \succ Z \succ MZ \succ (B \sim NP) \succ H \succ L \succ FK \succ BCT \succ KLB.$$

It should be noted that for symmetric laws with lighter tails, Levene test is inferior in power to the Fligner–Killeen test.

With symmetric laws with heavier tails, the situation changes:

$$FK \succ L \succ OB \succ MZ \succ (B \sim NP) \succ Z \succ H \succ C \succ KLB \succ BCT.$$

5. Application of tests in “non-standard” conditions

Deciding on the results of hypothesis testing H_0 on the basis of the achieved level of significance p_{value} is always more justified than by comparing the obtained value of the statistics S^* with the given critical values extracted from the corresponding table.

In the presence of appropriate software in a situation where the distribution of the statistics of the criterion used to test a certain hypothesis is unknown at the time of the start of the test (for various reasons), this distribution can be investigated using statistical modeling techniques in an interactive mode (directly in the process of analysis). The empirical distribution of statistics can be constructed for those volumes n_i , which correspond to the analyzed samples, under conditions of specific assumptions, possibly differing from the standard ones. Realized interactive procedure for distributing statistics makes it possible to apply various test for homogeneity, including under conditions of violation of standard assumptions.

6. Conclusions

In the work, many tests of homogeneity (homogeneity of laws, homogeneity of means, homogeneity of variances) were tested. The corresponding groups of tests are ordered by power. The opportunity of research of distribution of statistics in an interactive mode is realized. This makes it possible to apply the tests in the conditions of violation of standard assumptions, making it possible to calculate the estimates p_{value} which increases the informativeness of statistical conclusions. An obligatory preliminary condition for the application of test in non-standard conditions is the identification of the type of distribution law that best describes the analyzed samples [2].

Acknowledgments

The studies were carried out with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the state work “Ensuring the conduct of scientific research” (1.4574.2017/6.7) and the design part of the state task (1.1009.2017/4.6).

References

1. *Lemeshko B. Yu.* Tests for homogeneity. Guide on the application. — M. : INFRA-M, 2017. — DOI: 10.12737/22368.
2. *Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Postovalov S. N., and Chimitova E. V.* Statistical Data Analysis, Simulation and Study of Probability Regularities. Computer Approach: NSTU Monographs. — NSTU Publishing House, Novosibirsk, 2011.

UDC 519.21

Factorization method in boundary crossing problems for random walks

V. I. Lotov^{*†}

^{*} *Sobolev Institute of Mathematics,
630090, Novosibirsk, Russia*

[†] *Novosibirsk State University,
630090, Novosibirsk, Russia*

Abstract. We demonstrate an analytical approach to many problems related to crossing linear boundaries by random walk trajectories. Using factorization identities is the main instrument of the method.

Keywords: factorization, boundary crossing problem, random walk.

Let X, X_1, X_2, \dots be a sequence of i.i.d. random variables, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. The sequence $\{S_n\}$ is usually called a random walk. Boundary crossing problems involve the study of distributions associated with reaching (or not reaching) the boundary of certain set for random walk trajectories.

Given a Borel set $B \subset \mathbb{R}$, introduce the first hitting time

$$N = \min\{n \geq 1 : S_n \in B\}.$$

Put $N = \infty$ if $S_n \in \overline{B} = \mathbb{R} \setminus B$ for all n .

We are interesting in the joint distribution of the pair (N, S_N) in the cases: $B = [b, \infty)$, $B = (-\infty, a]$ (one-sided problems, $a < 0, b > 0$), $B = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ (two-sided problem). The distribution of the sojourn time above a level and the distribution of the number of crossings of a strip by sample paths of a random walk are of our interest as well.

Introduce the double Laplace–Stieltjes transform (LST)

$$Q(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N}; N < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_B e^{\lambda y} \mathbf{P}(N = n, S_N \in dy),$$

and, in addition, the functions

$$Q_0(z, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(e^{\lambda S_n}; N > n), \quad \varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X}.$$

The following assertion (the main identity) is available [1, Ch. 18].

Theorem 1 *For $|z| < 1$ and $\operatorname{Re} \lambda = 0$ the following identity holds:*

$$(1 - z\varphi(\lambda))(1 + Q_0(z, \lambda)) = 1 - Q(z, \lambda). \quad (1)$$

So we have one equation containing two unknown functions. Nevertheless, we can solve it and find the functions $Q(z, \lambda)$ and $Q_0(z, \lambda)$ in one-sided and two-sided problems, but, to this end, we need factorization of the function $1 - z\varphi(\lambda)$.

It is well known (see, e.g., [2]) that the factorization

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_-(z, \lambda)R_+(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad (2)$$

holds, where the function $R_+(z, \lambda)$ is analytic with respect to λ in the left half-plane $\operatorname{Re} \lambda < 0$, continuous at the border, and it is bounded and does not equal zero when $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. The function $R_-(z, \lambda)$ has similar properties in the right half-plane. The components of a factorization with the above properties are defined uniquely up to a constant factor. In addition, the functions $R_+(z, \lambda)$, $R_+^{-1}(z, \lambda)$ belong to $S([0, \infty))$, and the functions $R_-(z, \lambda)$, $R_-^{-1}(z, \lambda)$ belong to $S((-\infty, 0])$. Here $S(A)$ denotes the set of functions g taking the form

$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda y} dG(y), \quad \text{where} \quad \int_A |dG(y)| < \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

Given a function $g \in S(\mathbb{R})$, we define

$$[g(\lambda)]^A = \int_A e^{\lambda y} dG(y)$$

for each Borel set A . As an example, we now show how the main identity (1) can be solved in one-sided and two-sided problems (see [3], [4]).

Theorem 2 *Let $b > 0$ and $B = [b, \infty)$. Then*

$$Q(z, \lambda) = R_+(z, \lambda)[R_+^{-1}(z, \lambda)]^{[b, \infty)}, \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0. \quad (3)$$

Proof. We use the relation

$$R_-(z, \lambda)Q_0(z, \lambda) = -R_-(z, \lambda) + R_+^{-1}(z, \lambda)(1 - Q(z, \lambda)),$$

which follows from (1) and (1). The left-hand side of the above relation belongs to $S((-\infty, b))$, so

$$\left[-R_-(z, \lambda) + R_+^{-1}(z, \lambda)(1 - Q(z, \lambda)) \right]^{[b, \infty)} \equiv 0.$$

Clearly, $[R_-(z, \lambda)]^{[b, \infty)} \equiv 0$. Further, under our conditions, $Q(z, \lambda) \in S([b, \infty))$, so $R_+^{-1}(z, \lambda)Q(z, \lambda) \in S([b, \infty))$. Hence,

$$\left[R_+^{-1}(z, \lambda)(1 - Q(z, \lambda)) \right]^{[b, \infty)} = \left[R_+^{-1}(z, \lambda) \right]^{[b, \infty)} - R_+^{-1}(z, \lambda)Q(z, \lambda) = 0.$$

A symmetric reasoning establishes that

$$Q(z, \lambda) = R_-(z, \lambda)[R_-^{-1}(z, \lambda)]^{(-\infty, a]} \quad \text{if } B = (-\infty, a], \quad a < 0. \quad (4)$$

By definition, given a function $g \in S(\mathbb{R})$, we put

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_-g)(z, \lambda) &= R_-(z, \lambda)[R_-^{-1}(z, \lambda)g(\lambda)]^{(-\infty, a]}, \\ (\mathcal{L}_+g)(z, \lambda) &= R_+(z, \lambda)[R_+^{-1}(z, \lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)}. \end{aligned}$$

Here $|z| < 1$, $\text{Re } \lambda = 0$, the function g may also depend on z . As can be seen from the definition, the operators \mathcal{L}_\pm depend also on z , a , and b . For brevity, we do not emphasize this fact in the notations of operators. Put $e(\lambda) = e(z, \lambda) \equiv 1$. In the new notations, the formulas (2) and (1) can be rewritten in the following way:

$$\begin{aligned} Q(z, \lambda) &= (\mathcal{L}_+e)(z, \lambda) \quad \text{if } B = [b, \infty), \\ Q(z, \lambda) &= (\mathcal{L}_-e)(z, \lambda) \quad \text{if } B = (-\infty, a]. \end{aligned}$$

It turns out that the double LST in the two-sided problem can be also expressed via operators \mathcal{L}_\pm . Really, put $B = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ then

$$N = \min \{n \geq 1 : S_n \notin (a, b)\}, \quad a < 0, \quad b > 0.$$

Let

$$Q_1(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N}; S_N \leq a), \quad Q_2(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N}; S_N \geq b).$$

Then $Q(z, \lambda) = Q_1(z, \lambda) + Q_2(z, \lambda)$.

In the same way as in Theorem 2, from (1) and (1) we obtain

$$\begin{aligned} Q_2(z, \lambda) &= (\mathcal{L}_+e)(z, \lambda) - (\mathcal{L}_+Q_1)(z, \lambda), \quad (5) \\ Q_1(z, \lambda) &= (\mathcal{L}_-e)(z, \lambda) - (\mathcal{L}_-Q_2)(z, \lambda). \quad (6) \end{aligned}$$

Substituting the expression (1) for $Q_1(z, \lambda)$ into (1) leads to the identity

$$Q_2(z, \lambda) = (\mathcal{L}_+e)(z, \lambda) - (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-e)(z, \lambda) + (\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-Q_2)(z, \lambda),$$

and, in a similar way, we arrive at the identity for Q_1 :

$$Q_1(z, \lambda) = (\mathcal{L}_-e)(z, \lambda) - (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+e)(z, \lambda) + (\mathcal{L}_-\mathcal{L}_+Q_1)(z, \lambda). \quad (7)$$

Further, for a random walk with nonzero drift, consider the random variable η equal to the number of upcrossings of the strip with boundaries at the levels $a < 0$ and $b > 0$. It turns out [5] that, in this case,

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((\mathcal{L}_+\mathcal{L}_-)^k e)(z, 0), \quad k \geq 1.$$

Thus, we see that, in many boundary crossing problems connected with the achievement of a set with linear boundaries, LST of the distributions under study are expressed in terms of the operators \mathcal{L}_\pm . So, we need to clarify the probabilistic meaning of these operators, as well as the possibility of finding explicit expressions for them and asymptotic representations.

Discuss a probabilistic meaning. First, it is not difficult to deduce from (1) that $Q(z, \lambda) = 1 - R_+(z, \lambda)$ for $B = (0, \infty)$ and $Q(z, \lambda) = 1 - R_-(z, \lambda)$ for $B = (-\infty, 0)$. In both of these cases the function $Q(z, \lambda)$ is a joint distribution of the corresponding ladder epoch and ladder height of the random walk. Thus, using factorization components for finding the LST of distributions of boundary functionals means that the desired distributions are expressed in terms of the distributions of ladder values, which is quite natural.

Further, let $\tau \geq 0$ be an arbitrary stopping time, possibly improper. At the event $\{\tau < \infty\}$, we define the random variables

$$\tau_+(b) = \inf\{n \geq \tau : S_n \geq b\}, \quad \tau_-(a) = \inf\{n \geq \tau : S_n \leq a\}.$$

Suppose that the double transform $f(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^\tau \exp\{\lambda S_\tau\}; \tau < \infty)$ is known. The problem is to find the functions

$$f_+(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^{\tau_+(b)} \exp\{\lambda S_{\tau_+(b)}\}; \tau_+(b) < \infty),$$

$$f_-(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^{\tau_-(a)} \exp\{\lambda S_{\tau_-(a)}\}; \tau_-(a) < \infty).$$

The following assertion is obtained in [5].

Theorem 3 For $|z| < 1$ and $\text{Re } \lambda = 0$, the following relations hold:

$$f_\pm(z, \lambda) = (\mathcal{L}_\pm f)(z, \lambda).$$

The assertion of this theorem makes clear the probabilistic meaning of all summands in (1) and (1). We note in passing that, under the conditions of the theorem, the distributions of jumps of a walk to the time τ and after it may not coincide. This makes it possible to consider random walks in which the distribution of jumps varies at the moment of passing certain boundaries.

Next, we discuss the possibilities of calculating the factorization components and operators \mathcal{L}_\pm in an explicit form. The explicit form of the factorization components is known for Gaussian random walks [6] and for walks for which the function $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\}; X < 0)$ or $\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\}; X > 0)$ is rational [2]. For example, if the function

$$\mathbf{E}(\exp\{\lambda X\}; X > 0) = \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)}, \quad \text{where } P(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - p_i),$$

is rational then

$$R_+(z, \lambda) = \frac{\Lambda(z, \lambda)}{P(\lambda)}, \quad R_-(z, \lambda) = \frac{(1 - z\varphi(\lambda))P(\lambda)}{\Lambda(z, \lambda)},$$

where $\Lambda(z, \lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j(z))$, and $\lambda_1(z), \dots, \lambda_k(z)$ are zeros of the function $1 - z\varphi(\lambda)$ in the right half-plane (with considering their multiplicities). In this case the calculation of $(\mathcal{L}_+g)(z, \lambda)$ becomes a simple exercise if the function $R_+^{-1}(z, \lambda)$ is first decomposed on simple fractions.

Let us now investigate the asymptotic behavior of the operators \mathcal{L}_\pm as $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$. We assume here that the distribution of X contains an absolutely continuous component and the Cramér condition holds: $\varphi(\lambda) < \infty$ for $-\gamma \leq \lambda \leq \beta$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$. In addition, we assume that $\mathbf{E}e^{\beta X} > 1$ if $\mathbf{E}X < 0$ and $\mathbf{E}e^{-\gamma X} > 1$ if $\mathbf{E}X > 0$. Under these conditions, one can distinguish the principal terms of the asymptotics for $(\mathcal{L}_\pm g)(z, \lambda)$ as $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$ and estimate the remainders that turn out to be exponentially small in comparison with the principal terms (see [4]). As a result, for the two-sided boundary crossing problem, from (1) we obtain

$$\mathbf{E}(z^N e^{\lambda S_N}; S_N \geq b) = v_z(\lambda) e^{\lambda b} \frac{e^{-\lambda_+(z)b} (1 - v_2(z)\mu^a(z))}{1 - v_1(z)v_2(z)\mu^{a+b}(z)} (1 + O(e^{-\varepsilon b})) \quad (8)$$

as $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$, uniformly in $z \in (1 - \delta, 1)$ for some $\delta > 0$, where

$$v_z(\lambda) = \frac{R_+(z, \lambda)}{(\lambda - \lambda_+(z))R'_+(z, \lambda_+(z))}, \quad u_z(\lambda) = \frac{R_-(z, \lambda)}{(\lambda - \lambda_-(z))R'_-(z, \lambda_-(z))},$$

$$v_1(z) = v_z(\lambda_-(z)), \quad v_2(z) = u_z(\lambda_+(z)), \quad \mu(z) = \exp\{\lambda_-(z) - \lambda_+(z)\},$$

and $\lambda_-(z) < 0 < \lambda_+(z)$ are zeros of the function $1 - z\varphi(\lambda)$.

The corresponding assertion for the one-sided problem is a particular case of (1) with $a = -\infty$. If $\mathbf{P}(X \geq t) = q \exp\{-\alpha t\}$ for $t \geq 0$ then

$$v_z(\lambda) = \frac{\lambda_+(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \quad \text{and } O(e^{-\varepsilon b}) \text{ vanishes in (1).}$$

The main terms of the resulting asymptotic representations are easily invertible in the variable λ . Tending z to 1, from them one can obtain many useful consequences. The inversion of the principal parts with respect to z is a sufficiently difficult task that is far beyond the scope of this article.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR, grant No. 16-01-00049.

References

1. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 2. — J. Wiley and Sons, New York, 1971.
2. *Borovkov A. A.* Probability Theory. — Springer-Verlag, London, 2013.
3. *Kemperman J.H.B.* A Wiener–Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // *Ann. Math. Statist.* — 1963. — Vol. 34. — P. 1168–1193.
4. *Lotov V. I.* Limit theorems in a boundary crossing problems for random walks // *Siberian Math. J.* — 1999. — Vol. 40, no. 5. — P. 925–937.
5. *Lotov V. I.* An approach to problems with two boundaries // *Statistics and Control for Random Processes.* — M.: Nauka, 1989. — P. 117–121. (in Russian).
6. *Lotov V. I.* On some boundary crossing problems for Gaussian random walks // *Ann. Probab.* — 1996. — Vol. 24, no. 4. — P. 2154–2171.

Weighted entropy: basic facts and properties

M. Kelbert*, Y. Suhov^{†‡}, I. Stuhl[§]

* *Moscow Higher School of Economics, RF*

[†] *Math Dept, Penn State University, PA, USA*

[‡] *DPMMS, University of Cambridge, UK*

[§] *Math Dept, University of Denver, USA*

Abstract. The concept of weighted entropy takes into account values of different outcomes, i.e., makes entropy context-dependent, through the weight function. We analyse an analog of the entropy-power inequality for the weighted entropy and discuss connections with weighted Lieb's splitting inequality.

Keywords: weighted entropy, Gibbs inequality, Ky-Fan inequality, entropy power inequality, Lieb splitting inequality.

1. Introduction

We all know that the Shannon entropy of a probability distribution \mathbf{p}

$$h(\mathbf{p}) = - \sum p(x_i) \log p(x_i)$$

is context-free, i.e., it does not depend on the nature of outcomes x_i , only upon probabilities $p(x_i)$. However, imagine two equally rare medical conditions, occurring with probability $p \ll 1$, one of which carries a major health risk while the other is just a peculiarity. Formally, they provide the same amount of information $-\log p$ but the value of this information can be very different. So, we may modify the definition to make it context dependent. The weighted entropy is defined as

$$h_\phi^w(\mathbf{p}) = - \sum \phi(x_i) p(x_i) \log p(x_i).$$

A positive function $x_i \rightarrow \phi(x_i) \in \mathbf{R}_+$ represents weights of outcomes x_i . A popular example is $\phi(x) = \mathbf{1}(x \in A)$ where A is a particular subcollection of outcomes. A similar approach can be proposed for differential entropy of the probability density function (PDF) f_Z of random variable (RV) Z . Define the weighted differential entropy (WDE) as

$$h_\phi^w(f_Z) = h_\phi^w(Z) = -\mathbf{E}[\phi(Z) \log f_Z(Z)] = - \int \phi(x) f_Z(x) \log f_Z(x) dx. \tag{1}$$

We say that WDE is finite if RV Z has a density and the integral in (1) is absolutely convergent. Basic properties of WDE are studied in [4]. As

an example, take $f(x) = f_C^{No}(x)$ where $f_C^{No}(x)$ stands for d -dimensional Gaussian distribution with mean 0 and covariance matrix C

$$h_\phi^w(f_C^{No}) = \frac{\alpha_\phi(C)}{2} \log [(2\pi)^d \det(C)] + \frac{\log e}{2} \text{tr}[C^{-1} \Phi_{C,\phi}] \quad \text{where}$$

$$\alpha_\phi(C) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) f_C^{No}(x) dx, \quad \Phi_{C,\phi} = \int_{\mathbf{R}^d} xx^T \phi(x) f_C^{No}(x) dx.$$

2. The weighted Gibbs inequality

Given two non-negative functions f, g define the weighted Kullback-Leibler divergence (or relative WDE) as

$$D_\phi^w(f||g) = \int \phi(x) f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Proposition 1 Suppose that

$$\int \phi(x)[f(x) - g(x)] dx \geq 0.$$

Then $D_\phi^w(f||g) \geq 0$.

3. Concavity and convexity of weighted entropy

Theorem 2 (a) The function $f \rightarrow h_\phi^w(f)$ is concave in argument f . Namely, for any PDFs $f_1(x), f_2(x)$, a non-negative function $x \rightarrow \phi(x)$, and $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ such that $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$h_\phi^w(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \geq \lambda_1 h_\phi^w(f_1) + \lambda_2 h_\phi^w(f_2).$$

This inequality is strict unless $\phi(x)[f_1(x) - f_2(x)] = 0$ for $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ -almost all x . (b) However, the relative WDE is convex: given two pairs of PDFs (f_1, f_2) and (g_1, g_2)

$$\lambda_1 D_\phi^w(f_1||g_1) + \lambda_2 D_\phi^w(f_2||g_2) \geq D_\phi^w(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 || \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2).$$

4. Ky-Fan type inequalities

It is well-known that $C \rightarrow \delta(C) = \log \det(C)$ is a concave function of a (strictly) positive-definite matrix C

$$\delta(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) \geq \lambda_1 \delta(C_1) + \lambda_2 \delta(C_2)$$

where $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_i \geq 0$. This is the well-known Ky-Fan inequality. In terms of differential entropies it is equivalent to the inequality

$$h(f_C^{N^o}) \geq \lambda_1 h(f_{C_1}^{N^o}) + \lambda_2 h(f_{C_2}^{N^o}).$$

where $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. Theorem 3 below presents a previously unknown series of bounds of Ky-Fan type. The most explicit results are available for $\phi(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{x}^T \mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbf{R}^d$ in view of identity $h_\phi^w(f^{N^o}) = \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C \mathbf{t}) h(f^{N^o})$. Introduce a set

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^d : F^{(1)}(\mathbf{t}) \geq 0, F^{(2)}(\mathbf{t}) \leq 0\} \quad \text{where}$$

$$F^{(1)}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C_i \mathbf{t}) - \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C \mathbf{t}),$$

$$F^{(2)}(\mathbf{t}) = \left[\sum_{i=1}^2 \lambda_i \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C_i \mathbf{t}) - \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C \mathbf{t}) \right] \log[(2\pi)^d \det(C)] \\ + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C_i \mathbf{t}) \operatorname{tr}[C^{-1} C_i] - d \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C \mathbf{t}).$$

Theorem 3 Given positive-definite matrices C_1, C_2 and $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ with $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, set $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. Assume $\mathbf{t} \in \mathcal{S}$. Then

$$h(f_C^{N^o}) \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C \mathbf{t}) - h(f_{C_1}^{N^o}) \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C_1 \mathbf{t}) - h(f_{C_2}^{N^o}) \exp(\frac{1}{2} \mathbf{t}^T C_2 \mathbf{t}) \geq 0,$$

equality iff $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ or $C_1 = C_2$.

5. Weighted entropy-power inequality (WEPI)

Let X_1, X_2 be independent RVs with PDF f_1, f_2 and $X = X_1 + X_2$. The famous Shannon entropy power inequality states that

$$h(X_1 + X_2) \geq h(N_1 + N_2)$$

where N_1, N_2 are Gaussian RVs such that $h(X_i) = h(N_i), i = 1, 2$. Equivalently,

$$e^{2h(X_1+X_2)} \geq e^{2h(X_1)} + e^{2h(X_2)} \quad (2)$$

see, e.g., [1]. We are interested in the Weighted Entropy Power inequality (WEPI)

$$\kappa := \exp\left(\frac{2h_\phi^w(X_1)}{\mathbf{E}\phi(X_1)}\right) + \exp\left(\frac{2h_\phi^w(X_2)}{\mathbf{E}\phi(X_2)}\right) \leq \exp\left(\frac{2h_\phi^w(X)}{\mathbf{E}\phi(X)}\right). \quad (3)$$

Note that (5) coincides with (5) when $\phi \equiv 1$. We set

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{h_\phi^w(X_2)}{\mathbf{E}\phi(X_2)} - \frac{h_\phi^w(X_1)}{\mathbf{E}\phi(X_1)} \right) \right], Y_1 = \frac{X_1}{\cos \alpha}, Y_2 = \frac{X_2}{\sin \alpha}. \tag{4}$$

Theorem 4 Given independent RVs X_1, X_2 with PDFs f_1, f_2 , and the weight function ϕ , set $X = X_1 + X_2$. Assume the following conditions: (i)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\phi(X_i) &\geq \mathbf{E}\phi(X) \text{ if } \kappa \geq 1, \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{E}\phi(X_i) &\leq \mathbf{E}\phi(X) \text{ if } \kappa \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{5}$$

(ii) With Y_1, Y_2 and α as defined in (5)

$$(\cos \alpha)^2 h_{\phi_c}^w(Y_1) + (\sin \alpha)^2 h_{\phi_s}^w(Y_2) \leq h_\phi^w(X) \tag{6}$$

where $\phi_c(x) = \phi(x \cos \alpha), \phi_s(x) = \phi(x \sin \alpha)$ and

$$h_{\phi_c}^w(Y_1) = -\mathbf{E}[\phi_c(Y_1) \log(f_{Y_1}(Y_1))], h_{\phi_s}^w(Y_2) = -\mathbf{E}[\phi_s(Y_2) \log(f_{Y_2}(Y_2))].$$

Then WEPI holds.

Paying homage to [3] we call (5) weighted Lieb’s splitting inequality (WLSI). In some cases WLSI may be effectively checked.

Example 5 Let $d = 1$ and $X_1 \sim N(0, \sigma_1^2), X_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$. Then the WLSI (5) takes the following form

$$\begin{aligned} &\log [2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)] \mathbf{E}\phi(X) + \frac{\log e}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \mathbf{E}[X^2 \phi(X)] \geq \\ &(\cos \alpha)^2 \left[\log \left(\frac{2\pi\sigma_1^2}{(\cos \alpha)^2} \right) \right] \mathbf{E}\phi(X_1) + \frac{(\cos \alpha)^2 \log e}{\sigma_1^2} \mathbf{E}[X_1^2 \phi(X_1)] \\ &+ (\sin \alpha)^2 \left[\log \left(\frac{2\pi\sigma_2^2}{(\sin \alpha)^2} \right) \right] \mathbf{E}\phi(X_2) + \frac{(\sin \alpha)^2 \log e}{\sigma_2^2} \mathbf{E}[X_2^2 \phi(X_2)]. \end{aligned}$$

5.1. WLSI for the weight function close to a constant

Proposition 6 Let $d = 1, X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ be independent and $X = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Suppose that WF $x \rightarrow \phi(x)$ is twice continuously differentiable and

$$|\phi''(x)| \leq \epsilon \phi(x), |\phi(x) - \bar{\phi}| \leq \epsilon \tag{7}$$

where $\epsilon > 0$ and $\bar{\phi} > 0$ are constants. Then there exists $\epsilon_0 > 0$ such that for all WF ϕ satisfying (5.1) with $0 < \epsilon < \epsilon_0$ WLSI holds true. Hence, the checking of WEPI is reduced to condition (5).

For a RV Z , $\gamma > 0$ and independent Gaussian RV $N \sim N(0, \mathbf{I}_d)$ define

$$M(Z; \gamma_0) = \mathbf{E} \left[\|Z - \mathbf{E}[Z|Z\sqrt{\gamma} + N]\|^2 \right]$$

where $\|\cdot\|$ stands for Euclidean norm. According to [2, 5] the differential entropy

$$h(Z) = h(N) + \frac{1}{2} \int_0^\infty [M(Z; \gamma) - \mathbf{1}_{\{\gamma < 1\}}] d\gamma.$$

For $Z = Y_1, Y_2, X_1 + X_2$ assume the following conditions

$$\mathbf{E}[\|\log f_Z(Z)\|] < \infty, \mathbf{E}[\|Z\|^2] < \infty. \quad (8)$$

Theorem 7 Assume conditions (5.1). Let γ_0 be a point of continuity of $M(Z; \gamma)$, $Z = Y_1, Y_2, X_1 + X_2$. Suppose that there exists $\delta > 0$ such that

$$M(X_1 + X_2; \gamma_0) \geq M(Y_1, \gamma_0)(\cos \alpha)^2 + M(Y_2; \gamma_0)(\sin \alpha)^2 + \delta.$$

Suppose that for some $\bar{\phi} > 0$ the WF satisfies

$$|\phi(x) - \bar{\phi}| < \epsilon. \quad (9)$$

Then there exists $\epsilon_0 = \epsilon_0(\gamma_0, \delta, f_1, f_2)$ such that for all WFs satisfying (5.1) with $\epsilon < \epsilon_0$ WLSI holds true.

References

1. *Kelbert M., Suhov Y.* Information Theory and Coding by Example. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
2. *Kelbert M., Suhov Y.* Continuity of mutual entropy in the limiting signal-to-noise ratio regimes / Stochastic Analysis. — Springer-Verlag: Berlin, 2010. — P. 281-299.
3. *Lieb E.* Proof of entropy conjecture of Wehrl // Commun. Math. Phys. — 1978. — Vol. 62. — P. 35-41.
4. *Suhov Y., Stuhl I, Sekeh S., Kelbert M.* Basic inequalities for weighted entropy // Aequationes Mathematicae. — 2016. — Vol. 90, no. 4. — P. 817-848.
5. *Verdú S., Guo D.* A simple proof of the entropy-power inequality // IEEE Transaction on Information Theory. — 2006. — Vol. 52, no. 5. — P. 2165-2166.

UDC 51(091)

Industrial revolution and reform of mathematics

G. A. Zverkina*[†]

* *Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia*

[†] *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of
Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia*

Abstract. The industrial revolution led to changes in the structure of the community of mathematicians. These changes resulted in significant changes in the structure of mathematics.

Keywords: industrial revolution, mathematical community, paradigm change, methodology of mathematics, structure of mathematics, history of mathematics.

Industrial Revolution. The Industrial Revolution was the transition to new manufacturing processes in the period from about 1760 to sometime between 1820 and 1840. This transition included going from manual production methods to machines, new chemical manufacturing and iron production processes, improved efficiency of water power, the increasing use of steam power, the development of machine tools and the rise of the factory system. The infrastructure (transport, banking, interregional and international commerce) also developed rapidly.

New plants and factories, new machines and energy sources needed qualified workers, engineers and technicians who could service complex mechanisms. Naturally, educational institutions for the training of qualified workers, technicians and engineers were necessary.

Education and Industrial Revolution. Before the Industrial Revolution, good education was available to a very small number of people. Systematic education was, generally, theological. The students of the Universities studied seven “liberal arts” including arithmetic and geometry. High-quality education was actually individual. The majority of the population was illiterate.

But the development of industry and transport required educated people. Qualified workers needed to know mathematics, they had to be able to read the drawings and serve complicated machinery; their technical education was based on mathematics.

And at the end of the 18th century and the beginning of the 19th century, we see the emergence of a large number of primary schools in Europe and in America, and the development of middle schools is also beginning. In the 19th century, many new higher technical schools were set up. A graduate of a secondary school could be an elementary school teacher. A graduate of a University could be a secondary school teacher, and, after additional training, he could be professor of higher technical school. So, there was need for mathematics teachers, and their education. Thus, the quantity of the professors of mathematics increased.

The structure of the community of mathematicians began to change.

Structure of community of mathematicians. From ancient times two intersecting groups of mathematicians existed: teachers and practitioners. We see the traces of their activities in all ancient civilizations. For a long time, the mathematicians solved practical problems. All mathematical knowledge was associated with the surrounding environment. The ancient mathematics operated with concepts having origins in everyday practice. The first abstract mathematical problems arise in the Arab medieval mathematics. Basically, it was algebraic equations of a high degree and 5th postulate study. So, in the Arab East a new small group of abstract mathematicians (“*pure theorists*”) appeared. However, these *theorists* also solved the practical problems of mathematics.

Renaissance brought Greek knowledge back to Europe, but with the help of Arab science. Therefore, in Europe the interest to the abstract problems (generally, in algebra and number theory) was formed. The time of the chivalry ended, and now the gentlemen sought to attract the attention of ladies through the intellect (and, often, through the costume or the wealth). Interesting mathematical problems became very popular among the nobility. A new group of mathematicians was formed: *the amateurs of mathematics*. They invented and solved new problems in algebra and number theory. In addition, some teachers of mathematics invented new algebraic and geometric problems for training schoolchildren; it is possible to recognize part of the teachers as “*the amateurs of mathematics*”.

So, shortly before the Industrial Revolution, the community of mathematicians consisted of teachers, practitioners, and amateurs. Most of the amateurs were “theoreticians”. However, some teachers and practitioners were also interested in “theoretical” problems, i.e. problems that did not have direct applications in human activity.

Many amateurs of mathematics have made a significant contribution to the development of this science. Perhaps because they were not limited in their thinking by some standards.

Note that at this time the University professors were the teachers and the practitioners: European Universities and Academies fulfilled state requirements on mathematical support of important areas of state activity (navigation, design and creation of new transport routes, improvement of weapons, calculation of financial flows, etc.). Also, they researched some of the popular abstract problems, for example, in the theory of numbers and algebra.

Let us recall that each professor had to do research and publish the results of his studies: this was a reason for the position of the professor.

Until the end of the 18th century, University professors had a sufficient number of practical problems for research.

Thus, by the beginning of the 19th century, the mathematical community consisted of intersecting groups: teachers, practitioners, theorists, amateurs.

Most theorists were amateurs. Basically, they invented and solved problems in algebra and number theory.

Most University professors solved practical problems: they created a mathematical model of the real situation and studied its behavior. Many practical problems were connected with the definition of the characteristics of technical, physical and other systems, as well as the optimization. Accordingly, the problems of differential equations, calculus of variations, statistics, and computational methods were very popular.

19th century: professoriate. So, at the beginning of the 19th century the number of schools for children increased, the number of teachers increased correspondingly, and many new higher educational institutions appeared for the training of secondary school teachers, the engineers and the technicians. Naturally, the number of professors of mathematics increased.

But there were not enough practical problems to ensure the scientific work of all professors-mathematicians. Many of them began to study the so-called theoretical questions in mathematics.

It was such topics: the ordering and structuring of mathematical knowledge; the generalization of some mathematical problems and notions; arbitrary change of parameters of previously studied problems; etc.

Ordering and structuring of mathematical knowledge. The rapid development of the system of technical education required the solution of the methodological problems of mathematics, because:

1. Successfully formulated concepts and convenient notation simplified further research;

2. The unification and the adaptation of mathematical concepts and results for higher school students (mainly technical schools) were required for the successful teaching of mathematics.

Many mathematical notions did not have strict definitions. The mathematicians used some intuitive concepts for the objects such as function, limit, calculus of infinitesimal and others. Many proofs and logical reasoning were not strict. However, in the solution of applied problems arising from practical activities such non-stringent constructions did not lead to significant errors.

But, for the teaching a large number of students, the teachers needed some structure that would united the widely developed body of mathematics. The mathematicians of the 19th century began to create a structure of new mathematics on the model of the Euclid's "Elements".

Cauchy introduced some criteria of rigour for the proof in the mathematical analysis; this work was continued by the great educator Weierstrass. We know that Weierstrass, Cauchy, Heine and Bolzano formalized the notion of limit and infinitesimal, continuity, etc. Then Weierstrass, Dedekind and Cantor offered answers to the question: "What is the number?"

Attempts to create a universal logical mathematical language and notions for the inference of all possible mathematical facts were undertaken. This led to the creation and development of mathematical logic and set theory. The foundations of the modern ideology of teaching higher mathematics were created at this time.

Almost all the mathematics reformers were University professors; their desire to construct a rigorous logical structure of mathematics would replace the intuitive ideas of mathematical problems solutions by strong logical structures. The theorizing professors prepared the students-theorists; the statement “*mathematics=logic*” become a symbol of the University mathematics of the second half of the XIX century.

Generalizations. Here are some reasons for the appearance of the generalizations.

1. New objects of the study in applied problems appeared. For example, at first the functions were only polynomials; then the polynomials and trigonometrical functions, then they added a logarithm and an exponent, and later the notion of the function was generalized – a first by L. Euler, then by B. Bolzano, L. Dirichlet and N. Lobachevsky. But the generalized definition of the function generated many unaccustomed functions, such as the Dirichlet function and the Riemann function. The ability to define a function as the limit of a sequence of functions led to physically impossible ones, for example the Cantor function or the Devil’s staircase.

New and unaccustomed mathematical objects did not possess the properties of the usual mathematical concepts associated with practical applications. Many intuitive assumptions about their properties were false. Therefore, many *counterexamples* appeared as an important part of the mathematical verification of new hypotheses.

2. A generalization allows everyone to create a universal proof for many theorems or a universal method for solving many problems. For example, some 1D, 2D and 3D problems have similar solutions; thus, it can propose a concept of multidimensional (Euclidean) space, and formulate a generalized n -dimensional problem with a generalized solution. So, the generalization can give the useful method for proof, but arbitrary generalization can lead to paradox or to the problem without solution (as Fermat’s Last Theorem).

An important step in the development of abstract mathematical knowledge is the generalization of algebraic concepts and their application in various areas of analysis, geometry and differential equations theory.

Changing conditions of mathematical problems. In the 19th century, many mathematicians did not participate in the experimental and technical studies. They were given the mathematical problems formulated by other researchers. Not knowing the reasons for the emergence of a particular problem, the mathematician would generalize this problem, introducing additional conditions and extensions of used concepts. There was a view that all mathematical problems are the product of human thought, and not the product of human practical activity.

Generally speaking, if the mathematical problem is correctly formulated, and has the origin in the real processes of the nature, then this problem always has a unique solution, which describes the original process in the nature.

But when mathematicians tried to solve the generalized problem with arbitrarily changed parameters, they found that this generalized problem

did not always have the solution. So, in the 19th century a new topic appeared in mathematical research: *existence and uniqueness theorem*.

Discussion of status and future of mathematics. Increased mathematical knowledge needed to organize and identify the outlook for its development.

In 1872 Felix Klein proposed a method of classifying geometries by their underlying symmetry groups (*Erlangen program*). Naturally, algebraization of geometry facilitated the solution of many problems, but such methods translated geometric facts into other algebraic language, and the essence of geometry began to feel a kind of abstraction.

Later, the outstanding theorists F. Klein and G. Cantor initiated the international congresses of mathematicians. In 1897, at the Congress in Zurich, the question of the justification of mathematics based on set theory and problems of mathematical education were discussed. However, set theory was fraught with many paradoxes.

Questions about the justification of mathematics caused a lot of controversy. Many mathematicians expressed their own views on principles for the development of mathematics.

One of those ways was the formalization of mathematical knowledge and proofs of theorems based on logical structures.

Another variant of development of mathematics is a constructive mathematics, i.e. the mathematical proof of existence of the solution is an algorithm of constructing this solution, without the law of the excluded middle.

The third proposed way of development of mathematics is intuitionism, where mathematics is considered to be purely the result of the constructive mental activity of humans rather than the discovery of fundamental principles claimed to exist in an objective reality.

Before the Industrial Revolution, almost all research in mathematics was constructive. Mathematicians solved some of the problems and found certain solutions. In some cases of similar problems they have developed a general method to obtain the solution.

New abstract mathematics proved the existence of a solution, but not always gave algorithm to obtain it.

The completion of the first step in the reform of mathematics was the work of D. Hilbert.

Then there was A. Whitehead, B. Russell, N. Bourbaki, etc. Without reform of mathematics occurred due to the Industrial Revolution, modern mathematics would have been different than the one we have now.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 17-01-00633 A.

Одночастичное квантовое блуждание на Z^d

А.А. Замятин*, В.А. Малышев*

* Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119991

Аннотация. Мы даем полное описание спектра гамильтониана квантового блуждания с непрерывным временем одной частицы на d -мерной решетке. Внешнее поле определяется δ -потенциалом.

Ключевые слова: квантовое блуждание, гамильтониан, точечный спектр, непрерывный спектр.

1. Введение

Мы рассматриваем квантовое блуждание с непрерывным временем одной частицы на d -мерной решетке Z^d . Внешнее поле задается δ -потенциалом.

Введем гильбертово (т.е. полное линейное (векторное) над комплексным полем с определенным для любых двух элементов в нем скалярным произведением) пространство $l_2(Z^d)$. Элементы этого пространства будем обозначать через $f = \{f_x, x \in Z^d\}$.

Пусть e_k d - мерный вектор, у которого на k - месте стоит 1, а все остальные координаты нулевые. Определим линейный ограниченный самосопряженный оператор $H = H_0 + H_1 : l_2(Z^d) \rightarrow l_2(Z^d)$, где

$$(H_0 f)_x = -\lambda \sum_{k=1}^d f_{x-e_k} - 2f_x + f_{x+e_k}, x \in Z^d, \lambda \in R,$$

$$(H_1 f)_x = \mu \delta_{x,0} f_x, \mu \in R$$

и $f = \{f_x, x \in Z^d\} \in l_2(Z^d)$. Для определенности будем считать, что $\lambda > 0$.

Квантовая динамика или квантовое блуждание задается дифференциальным уравнением Шредингера

$$i \frac{df(t)}{dt} = H f(t),$$

решением которого является волновая функция

$$f(t) = e^{-itH} \psi \in l_2(Z^d),$$

где $f(t) = \{f_x(t), x \in Z^d\}$ и $f(0) = \psi \in l_2(Z^d)$ – начальное условие.

Отметим, что вследствие самосопряженности оператора H , при каждом t оператор e^{-itH} является унитарным.

Волновая функция определяет положение частицы в момент t . Именно, с вероятностью

$$p_x(t) = |f_x(t)|^2$$

частица в момент времени t находится в узле $x \in Z^d$, где $f_x(t)$ – x -координата волновой функции $f(t) = \{f_x(t), x \in Z^d\}$.

В случае, когда начальное условие представляет собой собственную функцию гамильтониана, то есть $H\psi = \nu\psi$, где ν – собственное значение, решение выглядит следующим образом:

$$f(t) = e^{-itH}\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k t^k H^k \psi}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k t^k \nu^k \psi}{k!} = e^{-it\nu} \psi.$$

Отсюда следует, что $|f_x(t)|^2 = |f_x(0)|^2 = |\psi_x|^2$, где $\psi = \{\psi_x, x \in Z^d\}$ и поэтому вероятности $p_x(t)$ не зависят от времени

$$p_x(t) = |f_x(t)|^2 \equiv |\psi_x|^2,$$

что подчеркивает важность изучения точечного спектра гамильтониана.

Мы будем исследовать спектр гамильтониана H . Отметим, что похожая задача рассматривалась в статьях [1], [2]. Наш результат является обобщением результатов, полученных в этих статьях. В [2] рассмотрен только случай $\lambda = 1$ и $\mu < 0$. В [1] не объясняется, что в размерности $d \geq 5$ могут возникать собственные значения на границе непрерывного спектра.

Одночастичный гамильтониан изучался также в работах [3, 4], где рассматривался более общий потенциал внешнего поля, но размерность решетки $d \leq 3$.

2. Основной результат

Положим

$$\gamma(\varphi) = \cos \varphi_1 + \dots + \cos \varphi_d,$$

где вектор $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in T^d = (-\pi, \pi] \times \dots \times (-\pi, \pi]$.

Обозначим через $c(d)$ классический интеграл Ватсона [5]:

$$c(d) = \pi^{-d} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{d\varphi_1 \dots d\varphi_d}{d - \gamma(\varphi)}.$$

Отметим, что при $d = 1, 2$ $c(d) = +\infty$, а при $d \geq 3$ $c(d) < \infty$. В статье [5] при $d = 3$ интеграл $c(3)$ был вычислен в явном виде. При $d \rightarrow \infty$ известно разложение в асимптотический ряд [6]

$$c(d) \sim \frac{1}{d} + \frac{1}{2d^2} + \frac{3}{4d^3} + \dots$$

Обозначим через $\sigma_{cont}(H)$, $\sigma_{pp}(H)$ – непрерывный и точечный спектры H [7].

Теорема 1 Пусть $\lambda > 0$.

- Для всех μ и для любой размерности d $\sigma_{cont}(H) = [0, 4\lambda d]$;
- Для $\mu = 0$ $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$;
- Для $d = 1, 2$ точечный спектр $\sigma_{pp}(H)$ состоит из одного собственного значения $\nu = \nu(\mu, \lambda)$, где $\nu \notin \sigma_{cont}(H)$;
- Для $d = 3, 4$
если $|\frac{2\lambda}{\mu}| < c(d)$, то точечный спектр $\sigma_{pp}(H)$ состоит из одного собственного значения $\nu = \nu(\mu, \lambda)$, где $\nu \notin \sigma_{cont}(H)$;
если $|\frac{2\lambda}{\mu}| \geq c(d)$, то $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$.
- Для $d \geq 5$
если $|\frac{2\lambda}{\mu}| < c(d)$, то точечный спектр $\sigma_{pp}(H)$ состоит из одного собственного значения $\nu = \nu(\mu, \lambda)$, где $\nu \notin \sigma_{cont}(H)$;
если $\frac{2\lambda}{\mu} = c(d)$, то точечный спектр $\sigma_{pp}(H)$ состоит из одного собственного значения $\nu = 4\lambda d$, где $\nu \in \sigma_{cont}(H)$; если $-\frac{2\lambda}{\mu} = c(d)$, то точечный спектр $\sigma_{pp}(H)$ состоит из одного собственного значения $\nu = 0$, где $\nu \in \sigma_{cont}(H)$; если $|\frac{2\lambda}{\mu}| > c(d)$, то $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$.
- Во всех случаях, если $\mu > 0$, то собственное значение $\nu \geq 4\lambda d$; если $\mu < 0$, то собственное значение $\nu \leq 0$; равенство в этих неравенствах достигается только в том случае, когда $d \geq 5$ и $|\frac{2\lambda}{\mu}| = c(d)$.

Таким образом, из теоремы следует

- собственное значение (при условии, что существует) всегда единственно;
- при $d \geq 5$ возможна ситуация, когда собственное значение попадает на границу непрерывного спектра;
- при $d < 5$ собственное значение (при условии, что существует) всегда лежит вне непрерывного спектра;

Литература

1. *Faria da Veiga P. A., O'Carroll M., Schor R.* Excitation spectrum and staggering transformations in lattice quantum models // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 66, no. 2. — Article ID 027108.
2. *Hiroshima F., Sasaki I., Shirai T., Suzuki A.* Note on the spectrum of discrete Schrodinger operators // *ArXiv:1209.0522*. — 2012.
3. *Лакаев С. Н., Бозоров И. Н.* Число связанных состояний одночастичного гамильтониана на трехмерной решетке // *Теоретическая и математическая физика*. — 2009. — Т. 158, вып. 3. — С. 425–443.
4. *Lakaev S., Ozdemir E.* The existence and location of eigenvalues of the one particle discrete Schrodinger operators // *ArXiv: 1505.03645*. — 2015.
5. *Watson G. N.* Three triple integrals // *The Quarterly Journal of Mathematics*. — 1939. — Vol. 10, no 1. — P. 266–276.
6. *Joyce G. S., Zucker I. J.* Evaluation of the Watson integral and associated logarithmic integral for the d -dimensional hypercubic lattice // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2001 — Vol. 34. — P. 7349–7354.
7. *Руд М., Саймон Б.* Методы современной математической физики 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.

UDC 519.2

One-particle quantum walk on Z^d **V.A. Malyshev*, A.A. Zamyatin***

** Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

We consider one-particle continuous time quantum walk in d -dimensional lattice and give a complete description of the spectrum of the corresponding Hamiltonian. The external field is determined by the δ -potential.

Keywords: quantum walk, Hamiltonian, point spectrum, continuous spectrum.

Импликация в работах логиков первой половины XX столетия

З. А. Кузичева*

** Кабинет истории и методологии математики и механики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломносова,
Ленинские горы, Москва, Россия, 119991*

Аннотация. В докладе будет рассмотрен подход к импликации принятый среди логиков школы Д. Гильберта (Г. Вейля, П. Бернайса, В. Аккермана, А. Шмидта и др.) в сравнении с результатами предыдущего поколения авторов таких, как И. Льюис, А. Эллис, Мак-Колл и А. Де Морган. Также докладчик собирается сравнить подход к импликации В. Аккермана с подходом С.А. Яновской, который она сформулировала на лекциях по математической логике на философском факультете МГУ в 50-е годы XX века.

Ключевые слова: строгая импликация, сильная импликация, следствие, модальность, необходимость, возможность.

1. Введение

Первой формой математической логики явилась алгебра логики (алгебра классов, логика Буля), сформировавшаяся сначала в сочинениях Буля и Де Моргана, затем уточненная их последователями. К концу XIX в. булева алгебра приобрела известный теперь облик: понятия в ней трактуются с точки зрения их объемов, которые часто называют классами; предполагается наличие универсального и пустого классов, обычно обозначаемые соответственно 1 и 0. Прочие классы - подклассы универсума, обозначаются буквами некоторого алфавита. Вводятся операции $+$ (сложение, или объединение), \times или \cdot (умножение, или пересечение, этот знак, как правило, опускается) и $\bar{}$, дополнение (до универсума). В некотором смысле была решена давняя мечта исследователей усилить традиционную логику, дополнив ее математическими методами. Но возникли новые трудности. В докладе предполагается проследить, как преодолевались некоторые из таких затруднений.

2. Основная часть

Представители традиционной логики увидели в новой системе лишь некую алгебру. В явном виде в ней не шло речи о выводе следствий из посылок – главной задаче логики. Однако эта алгебра помимо уже упомянутого теоретико-множественного истолкования, допускает и логическое. Классы можно трактовать как высказывания, если понимать $+$ как "или", \times как "и" и $\bar{}$ как отрицание. Здесь возникает затруднение:

в логике существенное значение имеет импликация, представляющая выражение "Если ..., то ...", аналога которому в нашей алгебре как будто нет.

Одна из интересных попыток преодолеть это затруднение принадлежит Мак-Коллу. На множестве утверждений (statemens) он вводит операции конъюнкции (символ операции опускается), дизъюнкции (+), отрицания ('), истинному утверждению сопоставляется 1, ложному 0. Кроме того, он определяет импликацию, обозначая ее двоеточием, например, $a : b$, означает a влечет (имплицитует) b ; a - антецедент (посылка), b - консеквент (заключение). Таким образом, Мак-Колл строит вариант исчисления высказываний, правда, не вполне формализованный.¹

Основное условие, налагаемое на импликацию Мак-Коллом таково: Если a истинно, то b должно быть истинно. Это очень важное условие. Из него сразу же следует, что $a : b$ равносильно (эквивалентно)тому, что $a = ab$, причем эквивалентность утверждений a и b истолковывается как $(a : b)(b : a)$ [2]. Если символы a, b, \dots понимать как классы, то оказывается, что Мак-Колл предложил выражение импликации в символах включения класса a в класс b . Тем самым был указан способ истолкования булевой алгебры в терминах традиционной логики. В 1905 г. французский логик Л. Кутюра в сравнительно небольшом сочинении [3] дал строгое обоснование этих двух способов истолкования алгебры Буля: а) в форме алгебры классов, б) как исчисление предложений.

Обратимся к школе Гильберта. Будем обозначать материальную импликацию знаком \supset .

Формализация процесса логического вывода, прежде всего, состоит в построении исчисления высказываний и исчисления предикатов [4]. В естественных языках выражения типа "Если ..., то ..." предполагает смысловую связь между посылкой и заключением, часто подразумевается причинно-следственная связь между ними. Истинностное значение высказывания $a \supset b$ зависит только от того, какие из значений 1 и 0 приписаны буквам a и b . Высказывание $a \supset b$ истинно, если a ложно или же b истинно, т.е. принимают значения 0 и 1 соответственно. Но если a истинно, а b - ложно, импликация $a \supset b$ ложна. Иными словами, при истинности заключения импликация истинна, независимо от того, истинна или ложна посылка, что иначе выражают словами "истина следует из всего, что угодно". Далее, импликация оказывается истинной при любом заключении, если посылка импликации ложна (принимает значение 0), говорят, - "из лжи следует, все, что угодно".

¹Строго аксиоматическое построение исчисления высказываний осуществил Г.Фреге [1]. Однако этот результат оставался незамеченным, пока на него не обратил внимание Д. Гильберт, по достоинству оценивший значение указанного сочинения Фреге. Общеизвестной стала аксиоматизация исчисления высказываний (и предикатов), предложена Б. Расселом и Уайтхедом. Кстати, термин "материальная импликация" введен Б. Расселом.

Аналогично тому, как в "Основаниях геометрии" Гильберт разбивает систему постулатов на несколько групп, так он и среди аксиом логики высказываний выделяет 5 групп, нумеруя их римскими цифрами. В группе I, названной "Формулы для импликации" формулы:

$$A \supset (B \supset A); (A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B); (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)).$$

Как видим, в этой группе формулы не содержат никаких логических связей кроме импликации. Следующие группы состоят из формул для конъюнкции, для дизъюнкции, для эквивалентности и для отрицания. В формулы каждой группы входит только импликация и та связка, которую вводит эта группа. Последнюю группу составляют формулы для отрицания. В формулы групп I - IV не входит знак отрицания, эти формулы составляют логику, названную позитивной. Не имея возможности подробно остановиться на описании позитивной логики, отметим лишь, что особую роль здесь играют специальные импликативные формулы [4]. Подробно исследованием свойств импликации занимался также П. Бернайс: Приложение III, [5].

Исследованием логических систем и в частности свойствами импликации посвящено несколько работ К.И. Льюиса. Проблемам, связанным с затруднениями, вызванными "неудобными" свойствами материальной импликацией он посвятил статью [6], а в следующем году вышла его работа [7], в ней он предложил исчисление, где вместо материальной импликации определяется так называемая строгая (strickt) импликация, для которой не должны иметь место упомянутые выше "парадоксы" материальной импликации. Уточнение проблем, связанных со строгой импликацией рассматривается в монографии [8]. Высказывания здесь обозначаются малыми латинскими буквами: p, q, r, \dots . Обычным образом вводится операция логического произведения (конъюнкции) pq или $p \cdot q$, отмечается, что дизъюнкцию можно ввести через конъюнкцию и отрицание:

$$p \vee q = \cdot \sim (\sim p \sim q).$$

Кроме того определяется оператор возможности $\diamond p$: « p – возможно», или «возможно, что p истинно».

Строгая импликация определяется Льюисом следующим образом:

$$p \prec q = \cdot \sim \diamond(p \sim q),$$

Ложно, что p оказалось истинно, а q ложно, или утверждение, что p истинно, а q ложно противоречиво (не-самосовместно).

Эквивалентность « \equiv » определяется как конъюнкция (строгих) импликаций:

$$(p \prec q)(q \prec p).$$

Льюис полагал, что строгая импликация теснее связана с обычными способами употребления выражений вида "Если ..., то ...", чем материальная импликация.

Теперь обратимся к импликации В. Аккермана. В 1956 г. в журнале "Symbolic Logic" опубликована статья В. Аккермана [9]. В ней излагается исчисление, в котором используется импликация, названная *strenger Implikation*.

Во введении Аккерман указывает причину, побудившую его ввести свою импликацию: "Сильная импликация, которую мы обозначим посредством $A \rightarrow B$, призвана выразить, что между A и B имеется логическая связь, что содержание B является частью содержания A ". Он считает необходимым исключить некоторые формулы, тождественно истинные в классической логике высказываний, в их числе: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, $A \rightarrow (A \& B)$, $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$. Аккерман отмечает, что отличие его импликации от импликации Льюиса состоит в отказе от формулы $B \rightarrow (A \rightarrow A)$, равно как и отказе от тождественной истинности формулы $(A \& \bar{A}) \rightarrow B$, так как из-за наличия высказывания, которое следует из любого высказывания или из которого следует любое высказывание, становится неоправданным понятие импликации, как логической взаимосвязи двух высказываний. Аккерман отмечает различие и в построении его исчисления и исчисления Льюиса: последний определяет строгую импликацию через модальный оператор "возможно" (см. выше), в то время, как в его системе модальность определяется на основании сильной импликации.

В октябре того же года С.А. Яновская начала чтение курса лекций "Исчисление сильной импликации В. Аккермана" на философском факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. На русский язык перевести *strenger Implikation* следовало бы как "строгая импликация". Но в нашей литературе уже стал привычным такой термин применительно к импликации К.И. Льюиса, поэтому С.А. Яновская предложила термин Аккермана перевести как "сильная импликация". В данном тексте будет использован предложенный С.А. перевод. Она не просто излагает статью Аккермана, но проводит глубокий анализ его исчисления. В результате выявляются проблемы, которые требуют дальнейшего исследования системы Аккермана.

Как показало время, работа Аккермана послужила отправной точкой возникновения новой неклассической логики, получившей название релевантной.

3. Заключение

В заключение хотелось бы отметить, что хотя исчисление высказываний является одной из самых "слабых" формальных систем, даже из такого краткого обзора видно, как много интересных фактов, касающихся этой системы, выясняется при внимательном ее изучении.

Литература

1. *Frege G.* Begriffsschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. — Halle, 1879.
2. *MacColl H.* Symbolic Reasoning. — Mind, 5, 1880. — P. 40–60.
3. *Couturat L.* L'algebre de la logique. — Paris, 1905.
4. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т. 1. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1979.
5. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т. 2. Теория доказательств. — М.: Наука, 1982.
6. *Lewis C. J.* The issues concerning material implication // Journal of philos. psychology and scientific method. — 1917. — Vol.14. — P. 350 – 356.
7. *Lewis C. J.* A survey of symbolic logic. — Berkeley (Univ. Calif. Press.), 1918.
8. *Lewis C. J., Langford C. H.* — N.Y.: The Century Co., 1932. — P. 123–125, 492–502.
9. *Akkerman W.* Begründung einer strengen implication // J. Symbolic logic. — 1956. — Vol. 21, no. 2. — P. 115 – 126.

UDC 51(091)

Implication in the works of logics of the first half of the XX century

Z.A. Kuzicheva*

** Chair of the History of Mathematics and Mechanics,
Moscow State University,
Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia*

The speaker will review the treatment of implication by the logics belonging to D. Hilbert's school (H. Weyl, P. Bernays, W. Ackermann, A. Schmidt, etc.) in comparison with the results of the previous generation of authors, such as I. Lewis, A.E. Ellis, MacColl and A. De Morgan. Another goal of the speaker is to compare the approach to implication of W. Ackermann with that of S.A. Yanovskaya which she had developed over the course of lectures on mathematical logic at MSU Department of Philosophy in the 1950s.

Keywords: strict implication, strong implication, consequence, modality, necessity, possibility.

УДК 51.09

Геометризация учений о месте и континууме в средневековой арабской схоластике

И. О. Лютер*

* *Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН,
ул. Балтийская, д.14, Москва, Россия, 125315*

Аннотация. Математические понятия и методы играли важную роль в развитии средневековой схоластической науки, в том числе и натурфилософии. Это в полной мере относится к концепции наложения, хоть и истолкованной по-разному, но приведшей к геометризации учения о месте и, что особенно важно, учения о континууме. В работе рассматриваются проблемы наложения как математических, так и физических объектов, введенные в учение о месте ал-Хайсамом, Ибн Баджжи и Ибн Рушдом, повлиявшие на решение проблемы строения континуума.

Ключевые слова: геометризация, континуум, средневековая арабская схоластика, натурфилософия.

1. Основная часть

В античности метод наложения был по существу основным методом, применявшимся для сравнения и измерения различных объектов (и геометрических и физических). Аристотель описывает процесс измерения следующим образом: «...кто-то измеряет нас, и мы узнаем свой рост благодаря тому, что столько-то раз прикладывают к нам меру длины...» («Метафизика», 1053a34–36). В геометрии, не только античной, но и средневековой, метод наложения считался важнейшим критерием «равенства и подобия» (конгруэнтности) геометрических величин, основанием чему послужила аксиома конгруэнтности Евклида: совмещающиеся друг с другом равны между собой. Однако из такой формулировки не следует ни сам механизм наложения, ни последующая оценка совмещения, на что обратили внимание средневековые арабские математики.

Некоторое усовершенствование этой аксиомы характерно для арабских редакций «Начал» Евклида. Так, Ибн Сина (Авиценна, 980–1037) в геометрической части энциклопедической «Книги исцеления» – кратком изложении «Начал» Евклида – приводит свою версию аксиомы конгруэнтности, в которой говорит о совмещении без избытка. Еще более уточненный вариант представил в своей редакции «Начал» псевдо-Туси (составлена в 1298 г.), в котором утверждает, что совмещение, сопровождающее наложение двух равных вещей, объединяет их края. Спецификация метода наложения встречается и в различных геометрических трактатах средневековых арабских ученых, в которых этот

метод используется для доказательства конгруэнтности. При этом конкретизируется движение, с помощью которого осуществляется наложение (например, равномерное прямолинейное – параллельный перенос – у Ибн Корры и Ибн ал-Хайсама), а также обсуждается условие однородности налагаемых друг на друга объектов (в сочинениях ат-Туси и аш-Ширази).

Необходимость уточнения концепции наложения была обусловлена не только «неполнотой» аксиомы конгруэнтности Евклида, но и пересмотром некоторых основных понятий натурфилософии Аристотеля, таких как место и непрерывное. Место, по Аристотелю, – это «граница объемлющего тела, поскольку оно соприкасается с объемлемым» («Физика», 212аb). Пояснение «поскольку оно соприкасается с объемлемым» – на самом деле добавление из комментариев Симпликия и Фемистия, поэтому, возможно, соприкосание объемлющего и объемлемого Аристотелем не обсуждается.

Иоанн Филопон (V–VI вв.), отрицая в своем комментарии к «Физике» Аристотеля такое определение, определил место как трехмерную нетелесную протяженность, потенциально существующую независимо от тела, пустую по своей сути, но всегда его содержащую (ввиду невозможности актуального существования вакуума). Нетелесность места он обосновал необходимостью совмещения тела и места, что невозможно, если место телесно, поскольку совмещение двух трехмерных телесных протяженностей невозможно [1].

Комментарий Филопона был переведен на арабский язык и широко изучался средневековыми арабскими учеными. Его концепция места была позаимствована Ибн ал-Хайсамом (965–1040), представившим в трактате «О месте» свою попытку геометризации учения о месте, включающую и рассмотрение механизма совмещения. Место ал-Хайсама – это воображаемая, заполненная телом пустота, состоящая из воображаемых расстояний, равных расстояниям тела, если их вообразить лишенными материи. При этом «если на каждое воображаемое расстояние накладывать воображаемое расстояние, то вместе они будут одним единственным расстоянием, поскольку воображаемое расстояние есть не что иное, как прямая, которая есть длина без ширины», а «если на прямую, которая есть длина без ширины, накладывать [другую] прямую, которая есть длина без ширины, то вместе они станут одной единственной прямой, ибо их наложение не приводит ни к какому-либо изменению ширины, ни к длине, превосходящей длину одной из них. . . воображаемая пустота, заполненная телом, – [это совокупность] воображаемых расстояний, на которые накладываются расстояния тела, которые становятся одними и теми же расстояниями» [2]. Таким образом, совмещение воображаемых расстояний физического тела и его места аналогично совмещению математических линий и не приводит к изменению размера, то есть физическое наложение и математическое у ал-Хайсама тождественны.

Это так называемое «совершенное наложение» ал-Хайсама, лежащее в основании его понятия места, было подвергнуто критике в трактате 'Абд ал-Латифа ал-Багдади (1162–1231) «Опровержение [рассуждения] о месте Ибн ал-Хайсама», в связи с возникающим в этом случае вопросом о том, каким образом возможно наложение актуально существующих расстояний тела на воображаемые существующие потенциально расстояния его места. В отличие от ал-Хайсама, Ибн Баджжа (Авемпас, 1080–1138) и Ибн Рушд (Аверроэс, 1126–1198), взгляды которых в основном соответствуют учению Аристотеля о месте, в своих комментариях к «Физике» Аристотеля подвергли критике концепцию места Филопона.

Ибн Баджжа опровергает определение места Филопона как пространственной нетелесной протяженности, исходя из того, что любая трехмерная протяженность есть тело, а абстрагирование от тела, в результате которого от этого тела остаются только его протяженности по трем направлениям, а оно само становится нетелесной протяженностью, невозможно. Обращаясь к наложению геометрических объектов, он заключает, что и физические тела совмещаются только тогда, когда есть измерение, в котором они непротяженны [3, с.295–296].

Учение о месте Ибн Рушда в основном согласуется с учением Ибн Баджжи. В частности, Ибн Рушд почти дословно воспроизводит, хотя и без ссылки на автора, вышеприведенные аргументы Ибн Баджжи.

Проблемы совмещения (наложения) и касания математических и физических объектов, введенные в учение о месте в комментариях Филопона, Ибн Баджжи и Ибн Рушда, вместе с этой теорией перешли в ту часть комментариев, в которой обсуждается проблема строения континуума и вводится определение непрерывного. Придерживаясь континуалистской точки зрения Аристотеля, они подвергли критике атомистическую концепцию составления континуума из неделимых. В этом отношении выделяется комментарий Ибн Рушда, в котором понятие наложения становится центральным при определении непрерывности и касания объектов.

Аристотель определяет «непрерывное» как «само по себе нечто смежное», при этом, «граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же», и заключает, что «непрерывность имеется в таких вещах, из которых путем касания может получиться нечто единое» («Физика», 227a10–16). Касаются же у него те предметы, края которых находятся вместе (там же, 226b24–227a1, 227a22), а смежные те, которые касаются друг друга (там же, 227a9).

Ибн Рушд, исходя из определения непрерывного Аристотеля, начинает с рассмотрения касания, в связи с чем конкретизирует выражение «вместе по месту»: «... два тела вместе, если у них одно и то же место, т.е. ограничивающая их объемлющая поверхность тела, и если нет ничего от объемлющего тела между ними. Это означает, что края этих тел вместе и приложены друг к другу. Это также означает,

что эти тела касаются...» [3, с.437–438]. Такую «совместность» границ Ибн Рушд усматривает только в случае касания или смежности физических объектов. Что же касается математической смежности, то, по его мнению, края или границы математических смежных находятся не вместе, а налагаются друг на друга, совмещаясь без избытка и становясь единым. Таким образом, математическая смежность (или касание) Ибн Рушда равносильна непрерывности по Аристотелю. В этом и состоит отличие геометрического касания (или смежности) от физического: касающиеся концы физических вещей, будучи «вместе», остаются различными [4]. Введя в рассмотрение геометрическое наложение, Ибн Рушд тем самым разграничил условия, определяющие математическую непрерывность, от тех, что определяют физические непрерывные. Геометрическое наложение Ибн Рушда как совмещение, унифицирующее совмещающиеся, отличается и от наложения Евклида. Наложение (совмещение) двух величин в «Началах» не подразумевает их тождественность (два треугольника, совмещаясь, остаются двумя различными треугольниками).

Наложение, подразумевающее тождественность совмещенного, Ибн Рушд применил в построении многих схоластических аргументов о непрерывности. Центральный аргумент Аристотеля о невозможности составлять непрерывное из неделимых с введением такого наложения приобрел следующий геометризованный вид: протяженная величина не может слагаться из неделимых, поскольку касание целиком есть наложение, а наложение не приводит к увеличению в размере: наложение, например, линии на линию не приводит к увеличению ширины, аналогично в случаях наложения плоскостей или точек [4].

Начавшаяся в XII в. трансмиссия на латинский Запад корпуса Аристотеля, в том числе и арабского, включающего комментарии Ибн Рушда, а также заметное увеличение числа сторонников учения о неделимых в конце XIII в., противостоящих традиционному аристотелевскому положению *semper divisibilia*, послужили поводом для широкого обсуждения проблемы строения континуума в сочинениях средневековых западноевропейских ученых. Роджер Бэкон (1214/1220–1292) в фундаментальном «*Opus Majus*» подверг критике дифференциацию математического и физического касания Ибн Рушда. Еще большей геометризации учение о непрерывном подверглось в сочинении Томаса Брадвардина (ок.1290–1349) «*De continio*». Брадвардин неоднократно ссылается на Ибн Рушда, а введение Брадвардином в учение о непрерывном понятий наложения и приложения свидетельствуют о влиянии соответственной методологии Ибн Рушда. (Обо всем этом подробно см.: [5]).

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-03-00120 а).

Литература

1. *Philoponus*. Corollaries on place and void / Trans. by *D.Furley* and *C.Wildberg*. — London, 1991. — P. 15–48.
2. *Al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham*. Sur le lieu. / Com., texte et trad. par *R.Rashed* // Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle. Vol. IV: *Rashed R. Ibn al-Haytham*, Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques. London: Al-Furqan Islamic Heritage Foundation, 1422/2002. — P. 674–676.
3. *Lettinck P.* Aristotle's Physics and its reception in the Arabic world // *Aristoteles Semitico-Latinus* / Ed. *H.Daiber*, *R.Kruk*. Leiden, New York, Koln: E.J.Brill. 1994. — Vol. 7. — P. 295–296.
4. *Aristotelis opera cum Averrois commentaries*. 9 vols. Venetiis: apud Iuntas, 1562–1574. Vol. IV (1574). Reprinted in facsimile. — Frankfurt: Minerva, 1962.
5. *Лютер И.О.* От квадратуры круга к введению движения в геометрию (в контексте сочинений аш-Ширази и Альфонсо из Вальядолида) // Историко-математические исследования. М.: Янус-К, 2007. — Вып. 12/47. — С. 237–274.

UDC 51.09

Geometrization of the doctrines of place and continuum in medieval Arabic scholasticism.

I.O. Lyuter*

* *IHST RAS,*
Baltiyskaya str. 14, Moscow, 125315, Russia

Mathematical concepts and methods played an important role in the development of medieval scholastic science, including natural philosophy. This fully applies to the conception of superposition. Interpreted differently, it has led to the geometrization of the doctrine of place and, most importantly, the doctrine of continuum. The paper deals with the problems of superposition of both mathematical and physical objects introduced in the doctrine of place by al-Haytham, Ibn Bajja and Ibn Rushd, some of which have influenced the solution of the problem of the structure of the continuum.

Keywords: geometrization, medieval Arabic scholasticism, natural philosophy.

On Reliability Function of a Parallel System with Three Renewable Components

A. M. Andronov*, V. V. Rykov[†], V. M. Vishnevsky[‡]

* *Department of Mathematical Methods and Modeling,
Transport and Telecommunication Institute,
Lomonosov str. 1, Riga, LV-1019, Latvia*

[†] *Department of Applied Probability and Informatics,
RUDN University,
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

[‡] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences,
Profsoyuznaya str. 65, Moscow, 117997, Russia*

Abstract. Considered system consists of three renewable components that are connected in parallel. The components are described by continuous time independent alternating processes. The sojourn times in the operative state for all components have exponential distributions. The sojourn times in the failed state have arbitrary absolute continuous distributions. All sojourn times are independent. The system is worked at time t if at least one component is worked. It is necessary to calculate system reliability on given time interval for the known initial states of the components. Non-stationary and stationary regimes are considered.

Keywords: alternating processes, recurrent event, renewal equation, system reliability.

1. Introduction

Consideration of a system reliability function is one of main problems in reliability theory. Simple redundant renewable systems were firstly objects of investigations. Homogeneous cold standby system has been considered in the book of Gnedenko and all [1]. The case of hot standby and two components discussed in the paper [2]. The similar problems have been studied also by Rykov et al. [3 - 5] with the help of Markovization method and Laplace transformation.

In this paper the three-component system with a hot standby is considered. The components are described by continuous time alternating processes $X_1(t), X_2(t)$ and $X_3(t)$. These processes are independent. The sojourn times in the state 0 (up state) of all processes have exponential distributions with parameters λ_1, λ_2 and λ_3 . The sojourn times in the state 1 (down state) have nonnegative distributions with probability density functions (p.d.f.) $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ and $\alpha_3(t)$. All sojourn times are independent. The system is working at time t if at least one of components is working. Thus the integrated state of the system $Z(t) \in \{0, 1\}$ can be represented as

$Z(t) = X_1(t) \wedge X_2(t) \wedge X_3(t)$. It is necessary to calculate system reliability on interval $(0, t)$:

$$R(t) = \mathbf{P}\{Z(\tau) = 0 : \tau \in (0, t) \mid X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0\}. \quad (1)$$

Peculiarity of this paper consists in using the renewal theory for considered problem solution. It allows to receive an explicit expression for the reliability function of a three component system with a hot standby.

2. Reliability function

Let us consider the first time t , when the system comes to the state $(X_1(t) = 0, X_2(t) = 0, X_3(t) = 0)$ from any other state at that $Z(\tau) = 0 : \tau \in (0, t)$. We say that a *recurrent event* occurs at this time.

The three dimensional process $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ has 8 states that can be numbered as

$$0 = (000), 1 = (001), \text{ etc.}, 6 = (110), 7 = (111).$$

State 7 corresponds to the failure; state 0 corresponds to the system state, when all components are working. For the process investigation we will use the additional variables method, namely for any component of the process being in the down state, $X_i(t) = 1$, an additional variable x will be used, which means the elapsed time in this state for this component.

Let for indices $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, the function $\varphi(i, j) \in \{1, 2, 3\}$ be such that $\{1, 2, 3\} = \{i, j, \varphi(i, j)\}$.

Further we denote $\lambda_\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\lambda_{(j)} = \lambda_\Sigma - \lambda_j$.

Now we propose equations for the p.d.f. $f(t)$ of the first recurrence event time occurrence for the initial state with all working components. A notation $f_i(t, x)$ instead of $f(t)$ is used, if at initial time $t_0 = 0$ the i -th component has been in failed state during time $x > 0$. We will use the notation $f_{i,j}(t, x)$ for this density if at initial time $t_0 = 0$ the i -th component has been failed during time x and the j -th component fails just now. Further let $A_i(t)$ and $\bar{A}_i(t)$ be the cumulative distribution function (c.d.f.) of the repair time and its supplement:

$$A_i(t) = \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau, \quad \bar{A}_i(t) = 1 - A_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Then the following expressions for the introduced functions can be obtained with help of complete probability formula:

$$\begin{aligned}
 f_{i,j}(t,x) &= \frac{1}{\bar{A}_i(x)} \int_0^t \exp(-u\lambda_{\varphi(i,j)}) [\bar{A}_j(u)\alpha_i(x+u)f_j(t-u,u) + \\
 &\quad + \bar{A}_i(x+u)\alpha_j(u)f_i(t-u,x+u)] du, \\
 f_i(t,x) &= \exp(-t\lambda_{(i)}) \frac{1}{\bar{A}_i(x)} \alpha_i(t+x) + \\
 &\quad + \frac{1}{\bar{A}_i(x)} \int_0^t \exp(-u\lambda_{(i)}) \bar{A}_i(x+u) \sum_{j \neq i} \lambda_j f_{i,j}(t-u,x+u) du.
 \end{aligned}$$

Finally:

$$f(t) = \int_0^t \exp(-u\lambda_{\Sigma}) \sum_{j=1}^3 \lambda_j f_j(t-u,0) du.$$

Let $G_i(t,x)$ be the conditional probability that during the interval $(0,t)$ there was neither system failure, nor recurrent event, given at the time $t_0 = 0$ the i -th component has been failed during time $x > 0$. Let $G_{i,j}(t,x)$ be the analogous probability, under condition that in the initial time moment 0 the i -th component is failed during times x and the j -th component fails just now. Then

$$\begin{aligned}
 G_{i,j}(t,x) &= \exp(-t\lambda_{\varphi(i,j)}) \frac{\bar{A}_i(x+t)}{\bar{A}_i(x)} \bar{A}_j(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{\bar{A}_i(x)} \int_0^t \exp(-u\lambda_{\varphi(i,j)}) (\bar{A}_j(u)\alpha_i(x+u)G_j(t-u,u) + \\
 &\quad + \bar{A}_i(x+u)\alpha_j(u)G_i(t-u,x+u)) du. \\
 G_i(t,x) &= \frac{\bar{A}_i(x+t)}{\bar{A}_i(x)} \exp(-\lambda_{(i)}u) + \frac{1}{\bar{A}_i(x)} \int_0^t \exp(-\lambda_{(i)}u) \times \\
 &\quad \times \bar{A}_i(x+u) \left(\sum_{j \neq i} \lambda_j G_{i,j}(t-u,x+u) \right) du.
 \end{aligned}$$

Probability that during the interval $(0, t)$ there was neither system failure, nor recurrent event, under condition that at time $t_0 = 0$ all components have been working, has the form:

$$H(t) = \exp(-\lambda_{\Sigma}t) + \int_0^t \exp(-\lambda_{\Sigma}u) \sum_{j=1}^3 \lambda_j G_j(t-u, 0) du.$$

These considerations lead to the following *renewal equation* for the reliability function (1):

$$R(t) = H(t) + \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Let us introduce the *renewal density*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(*k)}(t),$$

where $f^{(*k)}(t)$ is k -th convolution of the function $f(t)$.

Now the solution of the renewal equation can be represented as [6]:

$$R(t) = H(t) + \int_0^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau.$$

It is interesting to compare this function with the reliability function of the nonrenewable redundancy system, which is calculated by formula

$$R^*(t) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - \exp(-\lambda_i t)).$$

3. Conclusions

The reliability function of the system from three parallel connected renewable components was considered. Our future research will be connected with an investigation of considered system in the random environment [7].

References

1. Gnedenko B. V., Belyaev Yu. K., and Solov'yev A. D. *Mathematical Methods of Reliability*. — Academic Press, 1969.

2. *Srinivasan S.K., Gopalan M.N.* Probabilistic Analysis of a Two-Unit System with a Warm Standby and a Single Repair Facility // Operational Research. — 1973. — Vol. 21, no. 3. — P. 748–754.
3. *Efrosinin D., Rykov V.* Sensitivity analysis of reliability characteristic to the shape of the life and repair time distributions // European Journal of Operational Research. — 2007. — Vol. 176. — P. 347–360.
4. *Rykov V.* Multidimensional Alternative Processes as Reliability Systems. Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. (BWWQT 2013) Proceedings / Springer, 2013. — P. 147–157.
5. *Efrosinin D., Rykov V., Vishnevsky V.* Sensitivity analysis of Reliability Characteristics to the Shape of the Life and Repair Time Distributions // Communications in Computer and Information Sciences. — 2014. — Vol. 487. — P. 101–112.
6. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and its Applications. Volume II. - John Wiley and Sons, Inc., 1971.
7. *Andronov A. M., Vishnevsky V. M.* Algorithm of State Stationary Probability Computing for Continuous-Time Finite Markov Chain Modulated by Semi-Markov Process / Distributed Computer and Communication Networks. (Communication in Computer and Information Science. 601, Springer International Publishing Switzerland), 2016. — P. 167–176.

Stability problems in modern actuarial sciences

E. V. Bulinskaya*

** Department of Probability Theory,
Faculty of Mathematics and Mechanics,
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119234, Russia*

Abstract. New models were developed in actuarial sciences during the last two decades. They include different notions of insurance company ruin (bankruptcy) and other objective functions evaluating the company performance. Several types of decision (such as dividends payment, reinsurance, investment) are used for optimization of company functioning. Therefore it is necessary to be sure that the model under consideration is stable with respect to parameters fluctuation and perturbation of underlying stochastic processes. The aim of the talk is description of methods for investigation of these problems and presentation of recent results concerning some insurance models.

Keywords: sensitivity analysis, stability, optimal control, reinsurance, dividends, investment.

1. Introduction

Insurance is a risk-transfer mechanism that ensures full or partial financial compensation for the loss or damage caused by event(s) beyond the control of the insured party. Under an insurance contract, a party (the insurer) indemnifies the other party (the insured) against a specified amount of loss, occurring from specified eventualities within a specified period, provided a fee called premium is paid. Clearly, there arise two cash flows (premiums and indemnities) and mathematical models describing an insurance company performance are of input-output type. The similarity with other applied probability research fields such as queueing, reliability, inventory, finance and many others is quite obvious. Hence, the methods used in one domain may turn out useful in the others.

Actuarial science is the discipline that assesses financial risks in the insurance, finance and other research areas using mathematical and statistical methods, see, e.g., [20]. The history of actuarial sciences is long and interesting, see, e.g., [6]. Here we mention only that its beginning is usually associated with E.Haley's mortality tables which appeared in 1693. The other achievement of the first (deterministic) period is introduction in 1738 of D.Bernoulli's utility functions. The second (stochastic) period is characterized by collective risk theory provided by F.Lundberg in 1903 and further developed by H.Cramér. The third (financial) period has brought the union of stochastic actuarial models with modern finance theory and wide use of high speed computers. This period was very short (not more than 3 decades) compared with two previous. The fourth (modern) period

was announced in 2005 by P. Embrechts, see, e.g., [10]. The main feature of this period is emergence of ERM (enterprise risk management) and necessity to deal not only with hazard and financial risks but with operational and strategic risks as well, see [8].

In order to describe any input-output model we need to specify input flow $P(t)$ (premiums), output flow $S(t)$ (claims) and planning horizon $T \leq \infty$. Thus, the company capital (surplus, equity) $X(t)$ at time t is given by

$$X(t) = x + P(t) - S(t)$$

where x is the initial capital. The classical Cramér-Lundberg model, as well as the Sparre Andersen one, has a mixed character. That means, the premium is deterministic $P(t) = ct$ where $c > 0$ is a constant premium rate. On the contrary the aggregate claims up to time t are random and have the form $S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$. Here Y_n is the n th claim amount whereas $N(t)$ is the number of claims up to time t . For the Cramér-Lundberg model $N(t)$ is a Poisson process with intensity λ while for the Sparre Andersen model $N(t)$ is an ordinary renewal process. In both cases Y_n are nonnegative i.i.d. r.v.'s. For the dual models arising in life-insurance one gets instead of (1) the following relation $X(t) = x - ct + S(t)$.

For optimization of a company performance we have to choose an objective function (criterion, target, risk measure) and define the set of feasible controls (decisions). The most popular approaches are reliability and cost ones. One of the reasons is a two-fold nature of insurance company. At first, there existed only mutual insurance societies aimed at risk transferring and redistribution. Later, the joint stock companies owned by the shareholders began to dominate. So, the primary task of any insurance company is indemnification of its policyholders. That means, the company has to possess enough money to satisfy all the claims. In other words, it is crucial to maximize the non-ruin (or survival) probability, that is, the company reliability. The reliability approach introduced by Cramér and Lundberg is still very popular, see, e.g., [2].

The secondary, but very important, task is dividend payments to shareholders of the company. Due to pioneering paper [11] the cost approach was introduced in the actuarial sciences in the middle of the last century. Since then the expected discounted dividends until ruin is a widely used objective function which has to be maximized, see, e.g. [3]. The minimization of costs entailed by bank loans and inflation was considered in [5] for discrete-time insurance models.

We mention in passing a so-called Gerber-Shiu function estimating ruin severity and its generalizations, see, e.g., [4]. The use of such functions demonstrates the unification of reliability and cost approaches.

The other problems interesting for any insurance company are the choice of underwriting policy, premium calculation principles and reserves to ensure the company solvency, see, e.g., [18]. Moreover, very important decisions are dividend payments, reinsurance and investment.

2. Main results

Consideration of solvency problems, see, e.g., [22], gave rise to new ruin notions such as Parisian ruin, absolute ruin and Omega models. Due to their practical importance, these problems have attracted growing attention in risk theory.

Parisian type ruin will occur if the surplus falls below a prescribed critical level (red zone) and stays there for a continuous time interval of length d . In some respects, this might be a more appropriate measure of risk than classical ruin as it gives the office some time to put its finances in order, see, e.g., [9, 17]. Another type of Parisian ruin includes a stochastic delay (clock) in bankruptcy implementation, see, e.g., [15]. These two types of Parisian ruin start a new clock each time the surplus enters the red zone, either deterministic or stochastic. Proposed in [14] the third type of Parisian ruin (called cumulative) includes the race between a single deterministic clock and the sum of the excursions below the critical level.

One of the first papers treating the absolute ruin is [13]. When the surplus is below zero or the insurer is on deficit, the insurer could borrow money at a debit interest rate to pay claims. Meanwhile, the insurer will repay the debts from the premium income. The negative surplus may return to a positive level. However, when the negative surplus is below a certain critical level, the surplus is no longer able to become positive. Absolute ruin occurs at this moment, see, e.g., [12].

In the Omega model, there is a distinction between ruin (negative surplus) and bankruptcy (going out of business). It is assumed that even with a negative surplus, the company can do business as usual and continue until bankruptcy occurs. The probability for bankruptcy is quantified by a bankruptcy rate function $\omega(x)$, where x is the value of the negative surplus. The symbol for this function leads to the name Omega model, see, e.g., [1].

The first aim of presentation is to carry out asymptotic analysis and optimization of some models of the described above type. In particular, we introduce a new indicator of insurance company performance, namely, the first time η_i^X when the interval of the surplus staying above zero (before the Parisian ruin) becomes greater than l . Then for the Cramér-Lundberg case the explicit form of the Laplace transform of η_i^X is calculated as a function of the model's parameters.

The second aim is to study the systems stability with respect to underlying processes perturbations and parameters fluctuations. Under assumption that claim amounts have exponential distribution with parameter α we perform the sensitivity analysis of the probability of Parisian ruin with a deterministic clock d . For this purpose we use some local and global methods gathered in [21]. Thus, we begin by calculating the partial derivatives with respect to all the parameters α , λ , x , c and d . Then the scatterplots were obtained by Monte-Carlo simulation of ruin probability.

For the Omega model dual to the Cramér-Lundberg insurance model (according to [16]) the expected discounted dividends under barrier strategy can be obtained as the solutions of integro-differential equation. If the claim amounts have the exponential distribution it can be reduced to a second order differential equation. So it is possible to obtain the conditions of Lyapunov stability of the solutions. Another approach used for establishing stability of these models with respect to distributions perturbations is application of probability metrics according to [19].

For the discrete-time models we proceed along the same lines as in [7].

3. Conclusions

We have briefly discussed the new models which arose during the last two decades and problems important for their applications. Due to space limitation it turned out impossible even to formulate precisely the results obtained or provide the numerical results and graphics.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 17-01-00468.

References

1. *Albrecher H., Gerber H.U., Shiu E.S.W.* The optimal dividend barrier in the Gamma-Omega model // *European Actuarial Journal*. — 2011. — Vol. 1. — P. 43–55.
2. *Asmussen S. and Albrecher H.* *Ruin probabilities*. Second Edition. — World Scientific, New Jersey, 2010.
3. *Avanzi B.* Strategies for dividend distribution: A review // *North American Actuarial Journal*. — 2009. — Vol. 13, no. 2. — P. 217–251.
4. *Breuer L. and Badescu A.* A generalised Gerber-Shiu measure for Markov-additive risk processes with phase-type claims and capital injections // *Scandinavian Actuarial Journal*. — 2014. — Vol. 2014, no. 2. — P. 93–115.
5. *Bulinskaya E. V.* On a cost approach in insurance // *Review of Applied and Industrial Mathematics*. — 2003. — Vol. 10, no. 2. — P. 376–386.
6. *Bulinskaya E.* New research directions in modern actuarial sciences / *Modern problems of stochastic analysis and statistics – Festschrift in honor of Valentin Konakov* (ed. V.Panov). Springer, 2017, In press.
7. *Bulinskaya E. and Gusak J.* Optimal Control and Sensitivity Analysis for Two Risk Models // *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. — 2016. — Vol. 45, no. 5. — P. 1451–1466.
8. *Cruz M.G., Peters G.W., Shevchenko P.V.* *Fundamental Aspects of Operational Risk and Insurance Analytics: A Handbook of Operational Risk*. — Wiley, 2015.

9. *Czarna I. and Palmowski Z.* Ruin probability with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process // *Journal of Applied Probability*. — 2011. — Vol. 48. — P. 984–1002.
10. *D'Arcy S.P.* On Becoming An Actuary of the Fourth Kind // *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*. — 2005. — Vol. 177. — P. 745–754.
11. *De Finetti B.* Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // *Transactions of the XV-th International Congress of Actuaries*. — 1957. — Vol. 2. — P. 433–443.
12. *Fu D., Guo Y.* On the Compound Poisson Model with Debit Interest under Absolute Ruin // *International Journal of Science and Research (IJSR)*. — 2016. — Vol. 5, no. 6. — P. 1872–1875.
13. *Gerber H.U.* Der Einfluss von Zins auf die Ruinwahrscheinlichkeit // *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*. — 1971. — Vol. 71, no. 1. — P. 63–70.
14. *Guérin H., Renaud J.-F.* On Distribution of Cumulative Parisian Ruin // arXiv:1509.06857v1 [math.PR] 23 Sep 2015.
15. *Landriault D., Renaud J.-F. and Zhou X.* Insurance risk models with Parisian implementation delays // *Methodology and Computing in Applied Probability*. — 2014. — Vol. 16, no. 3. — P. 583–607.
16. *Liu D. and Liu Z.* Dividend Problems with a Barrier Strategy in the Dual Risk Model until Bankruptcy // *Journal of Applied Mathematics*. — 2014. — Vol. 2014, Article ID 184098.
17. *Lkabous M.A., Czarna I., Renaud J.-F.* Parisian Ruin for a Refracted Lévy Process // arXiv: 1603.09324v1 [math.PR] 30 March 2016.
18. *Quang P.D.* Ruin Probability in a Generalized Risk Process under Interest Force with Homogenous Markov Chain Premiums // *International Journal of Statistics and Probability*. — 2013. — Vol. 2, no. 4. — P. 85–92.
19. *Rachev S.T., Klebanov L., Stoyanov S.V., Fabozzi F.* The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics. — Springer-Verlag, New York, 2013.
20. *Rachev S.T., Stoyanov S.V. and Fabozzi F.J.* Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, Portfolio Optimization. — J.Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2008.
21. *Saltelli A., Ratto M., Campolongo T., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M. and Tarantola S.* Global Sensitivity Analysis. The Primer. — Wiley, 2008.
22. *Sandström A.* Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers.: Theory and Practice. — Chapman and Hall/CRC Press, 2011.

Subjective Probability: Its Axioms and Operationalization

N. D. Singpurwalla*

* *The City University of Hong Kong, Hong Kong,
Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong SAR*

Abstract. What sense can one make of the claim that “the probability of a nuclear accident is 10^{-5} ”? Not surprisingly, the answer is difficult because there are many interpretations of quantified uncertainty, each burdened by its own baggage. This expository talk is a historical silk road style journey, which traces the development of quantified uncertainty from the days of Cardano to those of Kolmogorov, with stops at Bayes, Laplace, Bernoulli, de Moivre, Keynes, Venn, Borel, Ramsey, de Finetti, von Mises, von Neumann, Popper, and Savage.

An interpretation that is immune to a attack is that of Subjective Probability – to the philosopher Richard Jeffrey “The Real Thing”. Here, probability is a corporate state of mind grounded in ones actions rather than an innate property of the physical world. This viewpoint, now at the very doorstep of *Quantum Theory*, is defended by notions of coherence and rationality, an elaborate system of preferences, consequences, and acts, to the claim that pure probability does not exist because it cannot be isolated from preferences. Hidden therein is the axiom of acrobatics (my term) which endeavours to operationalize subjective probability and in so doing levels the playing field.

The aim of this talk is to present a conversational overview of this topic.

Keywords: Chance, Classical Probability, Coherence, Exchangeability, Frequentist, Intuitive Probability, Logical Probability, Necessarist, Propensity.

1. Background: Probability and Statistics

The Pascal-Fermat correspondence of 1654 on problems of gambling stimulated further research on the topic by Bernoulli, who introduced the term *probabilitas* in the context of developing a new branch of science which he called *stochastics*, which in Greek and Latin stands for the science of prediction. To Bernoulli a relevant feature of stochastics is an event’s readiness to occur, and the probability of an event is the degree of certainty of its occurrence. Thus Bernoulli’s treatise *Ars Conjectandi*, or stochastics, is the art of measuring probabilities.

Bernoulli recognized the difficulty of determining the true value of probability, and this motivated him to develop his law of large numbers as an empirical method to determine an upper and lower limit of an unknown probability. de Moivre’s *Doctrine of Chances* (1718) pertained to methods for calculating the probability of events using the addition multiplication and independence rules, without addressing the matter as to what probability is. Kolmogorov’s aim in laying out an axiomatic foundation for probability was to establish a new branch of mathematics wherein a theory of probability pertains to a system of sets which satisfy certain conditions. He used the term probability detached from any real world meaning.

Simultaneous to Bernoulli's work, data sets were compiled by Graunt (1662) on demography, by Petty (1690) on political arithmetic, and by de Witt (1671) on actuarial mathematics. But most noteworthy is a 21 volume work by John Sinclair (between 1791 and 1799) entitled *Statistical Account of Scotland* wherein the term "statistics" appeared for the first time. Sinclair's motivation for using the German term "statistics" was to attract public attention by replacing Petty's "Political Arithmetic". The purpose of Sinclair's 21 volume work was to assess the political strength of a country via its inhabitant's happiness. Thus statistics is an artificial word which now stands for anything dealing with data.

2. Interpretations of Probability

The words probability and its synonyms like "chance" and "likelihood" have acquired several meanings, not clearly distinguishable from each other. But how can this explain how probability can be used in science, engineering, medicine, and economics where probability should have a clear and definite meaning in the context of its use? What is the connection between this abstract mathematical entity and the contexts of the above disciplines?

Three types of connectives have appeared: *frequentist*, *necessarist*, and *subjective*. To philosophers Carnap and Nagel probability admits both a frequentist and a necessarist interpretation, whereas to the mathematician Koopman both a necessarist and a subjectivist interpretation. In the frequentist interpretation probability is a unique, reproducible and physical property of a collective, and is the limit of a relative frequency. The necessarist view denies that probability statements are empirical. Here probability is a unique logical relationship between a proposition and a body of knowledge. In the subjectivist view probability is also a relation between a proposition and evidence but the relationship need not be purely logical nor unique. It is a quasi-logical relationship wherein probability is ones degree of belief about a proposition.

The subjectivist view due to Ramsey (1926) and de Finetti (1928) allows only certain combinations of degrees of belief in statements, the combinations governed by the well known Kolmogorov axioms of convexity, addition, and multiplication. Here a person can have any degree of belief based on his/her beliefs, and these beliefs can change with time even if the evidence remains the same. Thus probability of an event say $(X = x)$ is indexed by both time \mathcal{T} , and evidence \mathcal{H} and is written $P^{\mathcal{T}}(X_1 = x_1; \mathcal{H})$. An individual's personal probability is revealed by his (her) disposition to bets (de Finetti) or actions under uncertainty (Ramsey).

Entering in the above mix are two other notions, *intuitive probability* and *propensity*. The intuitive thesis due to Koopman (1940) holds that probability derives directly from intuition and is prior to objective experience, so that experience (or data) is to be interpreted in terms of probability, and not the reverse. The propensity notion of probability was

proposed by the American philosopher Pierce [cf. Singpurwalla (2016)], and was developed by Popper (1957) in his attempts at providing an interpretation of quantum theory, different from the Heisenberg-Bohr subjectivist view. Here probability is a disposition or tendency of a physical situation to yield a long run relative frequency of an item. To Popper, propensities or *chances* are unobservable dispositional properties of the physical world, and depend on the generating conditions of an item. Thus the notion of propensity can be invoked for singular events, as well as for a collective, and are comparable to a Newtonian force. Popper's view about propensities align with Kolmogorov's view on probability as a primitive which depends on the experimental environment. Thus in the context of reliability, Kolmogorov (1969), p. 239 states: "..., the statistical law expressed by the (survival) curves is only a reflection of the law of probability connecting the useful life of a lamp with the materials and the conditions of manufacture". Furthermore, in discussing the law of large numbers about the closeness of x/n (the frequency) to p (the probability) Kolmogorov also says "will never allow us to be free of the necessity of referring to probabilities in the primitive imprecise sense of the term. By the word "primitive" it is here meant something that is understood without definition.

2.1. Criticisms of the Frequentist and Necessarist Theories

Of the several criticisms of the frequentist theory such as vagueness of terms in its definition, like "approximately", "similar conditions", and an "infinite number of trials", the most damaging one pertains to the fact that probability is a property of a collective and thus cannot be invoked on singular events, like the failure of a nuclear reactor. Here again the following quote from Kolmogorov (1963) is striking:

"The frequency concept based on the notion of limiting frequency as the number of trials increases to infinity does not contribute anything to substantiate the applicability of the results of probability theory to real practical problems where the number of trials is always finite. The frequency concept applied to a large but finite number of trials does not admit a rigorous exposition within the framework of pure mathematics".

The frequentist theory is therefore limited in scope, its main virtue being that it affords a simple example of quantities satisfying the laws of probability.

Classical probability, the version of probability most used by the founding fathers Beroulli, Bayes, de Moivre, and in almost all introductory texts is an archetypal example of the necessarist interpretation of probability, and is driven by the *principle of sufficient reason*. We say the probability of a coin landing heads in $1/2$ because there are only two possibilities, heads and tails, and they are equally likely, and thus should be assigned the same probability. Difficulties with this approach are:

- i) the definition is circular because the term "likely" is used to define probability, and the term "probability" used to define likely.

- ii) What if the coin is unbalanced?
- iii) It is physically impossible to produce balanced coins, so the notion of balance is a subjective judgment anyway.

3. Subjective Probability, Utility, and Their Entanglement

Criticisms of the kind discussed in Section 2.1 gave birth to the notion of subjective probability by the likes of de Finetti, who, influenced by March, Einstein, and the theory of relativity which emphasized that physical quantities must be defined from the perspective of an observer using a given measuring instrument, wanted to do the same for quantifying uncertainty. Thus to de Finetti (1937), “the degree of probability exists only subjectively in the minds of individuals, and the probability attributed by an individual to a given event is revealed by the conditions under which he would be disposed to bet on the event”. Similarly, Ramsey (1931) p. 170, who in the process of developing a logic for partial belief, spawned the notion of subjective probability, states “we are therefore driven to the supposition that the degree of a belief ... which we can express (vaguely) as the extent to which we are prepared to act on it”. de Finetti in the 1920’s operationalized subjective probability assuming a linear utility and no arbitrage via a 2-sided bet. Specifically, if an analyst \mathcal{A} declares p as the probability of rain tomorrow to his(her) boss \mathcal{L} , then \mathcal{A} is prepared to stake p units of money in exchange of one unit if it rains tomorrow, and is simultaneously also prepared to stake $(1-p)$ units of money in exchange of one if it fails to rain. However it is \mathcal{L} who gets to choose the side of this two-sided bet. Similarly, Ramsey (1926) took utility for granted, and sketched a proof for the existence of a choice-based subjective probability assuming that individuals make choices that maximize their utilities. Later on, in 1931, recognizing that the marginal utility of money diminishes, and also the aversion of many to betting, Ramsey puts forward his brilliant and celebrated proposal for a simultaneous axiomatization of a choice-based probability and utility based on a transitive system of preferences among choices under uncertainty.

Assuming the existence of a frequency based probability, von Neumann and Morgenstern in 1947 proved the existence of state-independent utility, and gave an axiomatic characterization of expected utility maximizers. This work was foundational in the sense that it enabled Savage (1954) to synthesize it together with that of de Finetti and Ramsey to introduce a new framework, and necessary and sufficient conditions for the simultaneous existence of a state independent utility and a finitely additive subjective probability as well as the characterization of expected utility maximizers. Also see Shafer (1986) for a constructive interpretation of subjective probability.

A consequence of the de Finetti-Ramsey-Savage work on subjective probability is the entanglement of the degree of pure belief from value. Thus, just like how it is impossible to measure position and momentum

with physical instruments, “belief and value are as inseparable as space and time” per Herman Rubin (1987). Pure probability uncontaminated by value is therefore a mental construct that makes sense only when it is regarded as a primitive (i.e. something that is understood without definition, and revealed by verbal reports). Thus in de Finetti’s two volume book “*Probability Does Not Exist*”.

4. Linking Subjective Probability and Propensity (Chance)

The word “chance” appears in two metaphysical senses: Popper’s propensity (or pure probability) and von Mises’ limit of a relative frequency. Both de Finetti and Ramsey have acknowledged chance as a useful entity, and the former by his *theorem on exchangeability* links it with subjective probability. Specifically, for an infinite binary exchangeable sequence X_1, X_2, \dots ,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \int_0^1 p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i} \Pi(p) dp,$$

where $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum x_i}{n}$ exists, and

$\Pi(p)$ is a subjective (prior) probability density on an (objective) chance p .

This theorem serves as a foundation for Bayesian statistical inference, for without the assumption of exchangeability (or some version of it) inductive inference and prediction are not possible.

5. What is the Theory of Subjective Probability?

It is a theory which attempts to make precise the connection between ones coherent dispositions towards uncertainty and mathematical probability as axiomatized by Kolmogorov (1933). It accommodates the Bayes-Laplace classical interpretation, the intuitive views of Koopmans and Keynes, and the decision oriented approach of Ramsey, de Finetti, and Savage. Here each person needs to come up with numerical probabilities to sub-sets of a sample space to reflect his(her) beliefs. Like Euclidian geometry, subjective probability begins with a set of axioms derived only after an examination of our intuitive notions of the subject. These axioms are basic qualitative relationships representing a person’s judgments about preferences between acts or about ranking as to which events are more likely to occur than others. Subjective probabilities are a consequence of exercising the *principle of expected utility* invoked within several axiom systems.

Acknowledgments

Research supported by The City University of Hong Kong Project Numbers 9380068 and 9042083.

References

1. *Bernoulli J.* Ars Conjectandi. — Culture et Civilisation, 1713.
2. *de Finetti B.* La Préjescion: Ses lois Logiques, ses Sources Subjectives. — Annals de l'Institute Henri Poincare, 1928.
3. *de Moivre A.* Doctrine of Chances or A Method of Calculating the Probability of Events in Play. — W. Pearson, London, 1718.
4. *de Witt J.* The Worth of Life Annuities Compared to Redemption Bonds. (Transalation) — 1671.
5. *Graunt J.* Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality. — The Johns Hopkins Press, 1662.
6. *Jeffrey R.* Subjective Probability: The Real Thing. — Cambridge University Press, New York, 2004.
7. *Kolmogorov A.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Eng. der Math. Berlin, 1933.
8. *Kolmogorov A.* On Tables of Random Numbers // Sankhya Series A. — 1963. — Vol. 25. — P. 369–376.
9. *Kolmogorov A.* The Theory of Probability // Mathematics: Its Content, Methods and Meaning. — MIT Press, 1969. — Vol. 2, Part 3.
10. *Koopman B.* The Axioms and Algebra of Intuitive Probability // Annals of Mathematics. — 1940. — Vol. 41. — P. 269–292.
11. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. — Princeton University Press, 1942.
12. *Petty W.* Political Arithmetik. — The Economic Writings of Sir William Petty, 1690.
13. *Popper K.* The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability and Quantum Theory // Observation and Interpretation in the Philosophy of Physics. — Dover, 1957.
14. *Ramsey F. P.* Truth and Probability (1926) // Reproduction Studies on Subjective Probability. — Wiley, 1964.
15. *Rubin H.* A weak System of Axioms for 'Rational' Behavior and the Nonseparability of Utility from Prior // Statistics and Decisions. — 1987. — Vol. 5. — P. 47–58.
16. *Savage R.* The Foundations of Statistics. — New York, Wiley, 1954.
17. *Sinclair J.* Statistical Account of Scotland - Drawn up from the Communications of the Ministers of Different Parishes. — William Creech, Edinburgh, 1791–1799.
18. *Singpurwalla N. D.* Filtering and Tracking the Propensity of Survival (with Discussion) // Statistical Science. — 2016. — Vol. 31, no. 4. — P. 521–540.

UDC 519.2

Asymptotic Ruin Probabilities for a Multidimensional Renewal Risk Model with Multivariate Regularly Varying Claims

D. G. Konstantinides*, J. Z. Li†

* *Department of Mathematics,
University of the Aegean,*

Kt. Vourlioti A8, Karlovassi Samos, 83200, Greece

† *School of Mathematical Science and LPMC,
Nankai University,
Tianjin, 300071, China*

Abstract. This paper studies a continuous-time multidimensional risk model with constant force of interest and dependence structures among random factors involved. The model allows a general dependence among the claim-number processes from different insurance businesses. Moreover, we utilize the framework of multivariate regular variation to describe the dependence and heavy-tailed nature of the claim sizes. Some precise asymptotic expansions are derived for both finite-time and infinite-time ruin probabilities.

Keywords: asymptotics, dependence, multidimensional renewal risk model, multivariate regular variation, ruin probability.

1. Introduction

Consider an insurance company which simultaneously operates d kinds of businesses. Its surplus process can be described by the following multidimensional risk model:

$$\begin{bmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 x e^{rt} \\ \vdots \\ \rho_d x e^{rt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \int_0^t e^{r(t-s)} ds \\ \vdots \\ c_d \int_0^t e^{r(t-s)} ds \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_{1i} e^{r(t-\tau_{1i})} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_d(t)} X_{di} e^{r(t-\tau_{di})} \end{bmatrix}$$

$t \geq 0$, where $\{(U_1(t), \dots, U_d(t)); t \geq 0\}$ denotes the multidimensional surplus process, $r \geq 0$ the constant force of interest, $(\rho_1 x, \dots, \rho_d x)$ the vector of initial surpluses assigned to different businesses with positive ρ_1, \dots, ρ_d such that $\sum_{k=1}^d \rho_k = 1$, (c_1, \dots, c_d) the vector of constant premium rates, $\{(X_{1i}, \dots, X_{di}); i \geq 1\}$ the sequence of claim-size vectors, and $\tau_{k1}, \tau_{k2}, \dots$ the claim-arrival times of the k th business with the corresponding claim-number process $\{N_k(t); t \geq 0\}$ for $k = 1, \dots, d$.

Define the finite-time and infinite-time ruin probabilities corresponding to risk model (1) as

$$\psi(x; T) = \mathbb{P}(T_{\max} \leq T | (U_1(0), \dots, U_d(0)) = (\rho_1 x, \dots, \rho_d x)),$$

and

$$\psi(x) = \mathbb{P}(T_{\max} < \infty | (U_1(0), \dots, U_d(0)) = (\rho_1 x, \dots, \rho_d x)),$$

where

$$T_{\max} = \inf \{t > 0 : \max \{U_1(t), \dots, U_d(t)\} < 0\}$$

denotes the ruin time with $\inf \emptyset = \infty$ by convention. In this paper, we are concerned with the precise asymptotic expansions for both $\psi(x; T)$ and $\psi(x)$ as $x \rightarrow \infty$.

Recently, Yang and Li (2014) and Li (2015) introduced the Farlie–Gumbel–Morgenstern (FGM) dependence structure into claim sizes from different businesses in bidimensional risk models. Under certain technical conditions, they obtained asymptotic expansions for the finite-time and infinite-time ruin probability respectively. Although these works improved the previous ones to some extent, they can only be regarded as a beginning of this direction. For example, the FGM structure is so special that the problems under consideration and the corresponding treatment are essentially parallel to that in the independence case. Moreover, they also assumed that the two insurance businesses share a common claim-number process, which weakens the practicability of their results severely.

Contrasted to the prosperity of the study on bidimensional risk models, the asymptotic behavior for multidimensional models has been little investigated. Among the few contributions, Huang et al. (2014) considered a discrete-time multidimensional risk model, in which the claim sizes from different businesses follow a dependence structure given in terms of copulas. Assuming that the claim sizes are regularly varying, the authors derived asymptotic expansions for finite-time ruin probabilities. Recently, Li et al. (2015) studied a continuous-time multidimensional risk model, which is a special interest-free ($r = 0$) case of (1) with an identical Poisson claim-number process. They still only focused on finite-time ruin probabilities and obtained the corresponding asymptotic formulas for asymptotically independent regularly varying claim sizes.

The present paper is devoted to extend the existing works from three main aspects. First, we drop the restriction that all businesses have a totally identical claim-number process, and instead introduce a general dependence structure into the different claim-number processes. Second, we synthetically model the dependence and heavy-tailed nature of claim sizes by a unified framework of multivariate regular variation. Last but not the least, we obtain asymptotic expansions for both finite-time and infinite-time ruin probabilities.

2. Main section

2.1. Regular Variation

A distribution function $F = 1 - \bar{F}$ on $[0, \infty)$ is said to belong to the class of regular variation if $\bar{F}(x) > 0$ for all $x \geq 0$ and the relation

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-\alpha}, \quad y > 0,$$

holds for some $0 < \alpha < \infty$. We signify the regularity property in (2.1) as $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

For a distribution function F with $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ for some $0 < \alpha < \infty$, by Proposition 2.2.3 of Bingham et al. (1987) we know that, for any $0 < p_1 < \alpha < p_2 < \infty$ and $C > 1$, there is some $D > 0$ such that the inequalities

$$\frac{1}{C} \min \{y^{-p_1}, y^{-p_2}\} \leq \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} \leq C \max \{y^{-p_1}, y^{-p_2}\}$$

hold whenever $x > D < xy$. We can derive from (2.1) that if $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ then, for any $p > \alpha$,

$$x^{-p} = o(\bar{F}(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

It is known that a distribution function F with a regularly varying tail belongs to the long-tailed distribution class \mathcal{L} characterized by $\bar{F}(x) > 0$ for all $x \geq 0$ and the relation

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

We refer to Bingham et al. (1987) and Embrechts et al. (1997) for a nice review on related heavy-tailed distribution classes.

2.2. Dependence Assumptions

Consider the multidimensional risk model (1). Throughout, we assume that $\{(N_1(t), \dots, N_d(t)); t \geq 0\}$ and $\{(X_{1i}, \dots, X_{di}); i \geq 1\}$ are mutually independent.

For $k = 1, \dots, d$, denote by $\theta_{k1} = \tau_{k1}$ and $\theta_{ki} = \tau_{ki} - \tau_{k,i-1}$ for $i = 2, 3, \dots$ the inter-arrival times of claims from the k th business. We introduce a general dependence structure into the different claim-number processes through the following assumption:

Assumption 2.1. $\{(\theta_1, \dots, \theta_d), (\theta_{1i}, \dots, \theta_{di}); i \geq 1\}$ is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) nonnegative random vectors, but the d components of each vector can be arbitrarily dependent.

Clearly, under Assumption 2.1 all of $\{N_1(t); t \geq 0\}, \dots, \{N_d(t); t \geq 0\}$ are traditional renewal processes, and they inherit dependences from that among $\theta_1, \dots, \theta_d$. Further, for $(t_1, \dots, t_d) \in [0, \infty)^d$, we write

$$N(t_1, \dots, t_d) = \max \{i : \tau_{1i} \leq t_1, \dots, \tau_{di} \leq t_d\} = \min_{1 \leq k \leq d} \{N_k(t_k)\}$$

and

$$\lambda(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{E}(N(t_1, \dots, t_d)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_{1i} \leq t_1, \dots, \tau_{di} \leq t_d),$$

which are called in the literature the d -dimensional renewal process and the corresponding renewal function respectively.

Before modeling the dependence structure among the claim sizes, we need to introduce the concept of multivariate regular variation (MRV) first. A random vector (Z_1, \dots, Z_d) taking values in $[0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ is said to follow a distribution with a multivariate regularly varying tail if there exist some $0 < \alpha < \infty$, some distribution function F with $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, and some Radon measure ν on $[0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ satisfying $\nu([0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\}) > 0$ such that the following vague convergence holds as $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\bar{F}(x)} \mathbb{P}\left(\frac{(Z_1, \dots, Z_d)}{x} \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \nu(\cdot) \quad \text{on } [0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

In this case, we write $(Z_1, \dots, Z_d) \in \text{MRV}(\alpha, F, \nu)$.

Now we model the dependences among the claim sizes from different businesses via the framework of MRV. Concretely speaking, we assume:

Assumption 2.2. $\{(X_1, \dots, X_d), (X_{1i}, \dots, X_{di}); i \geq 1\}$ is a sequence of i.i.d. nonnegative random vectors with $(X_1, \dots, X_d) \in \text{MRV}(\alpha, F, \nu)$ such that $\nu((\mathbf{1}, \infty]) > 0$.

We can derive from Assumption 2.2 that

$$\nu(sK) = s^{-\alpha} \nu(K) \text{ for } s \in (0, \infty) \text{ and Borel set } K \subset [0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{F}(x)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^d \{X_k > x\}\right) = \nu((\mathbf{1}, \infty]) > 0,$$

and

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_k > x)}{\bar{F}(x)} = \nu((\mathbf{1}_k, \infty]) =: a_k > 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

where $\mathbf{1}_k$ is the vector with the k th element being 1 and the other elements being 0. Relation (2.2) indicates that the tails of X_1, \dots, X_d are regularly varying and mutually comparable. This fact, combined with (2.2), implies that X_1, \dots, X_d are pairwise asymptotically dependent. Additionally, we know from (2.2) and (2.2) that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\overline{F}(x)} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^d \{X_k > b_k x\} \right) = \nu((b_1, \infty] \times \dots \times (b_d, \infty]) > 0$$

holds for any $(b_1, \dots, b_d) \in [0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. See Resnick (1987, 2007) for a comprehensive discussion on MRV and see Embrechts et al. (2009), Böcker and Klüppelberg (2010), Mainik and Rüschendorf (2010), Joe and Li (2011), and Tang and Yuan (2013) for its applications in finance and insurance.

We remark that the concept of MRV is developed from multivariate extreme value theory, which has been extensively applied to investigate extreme phenomena in finance and insurance. The framework of MRV provides us with an effective platform to quantify extreme risks, since, as analyzed above, it can model enormous sizes (heavy-tailed nature) of extreme risks and capture their tail dependences (asymptotic dependence) simultaneously.

In what follows, for any $(b_1, \dots, b_d) \in [0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, we will write

$$\nu((b_1, \infty] \times \dots \times (b_d, \infty]) =: V(b_1, \dots, b_d).$$

2.3. Main Results

Hereafter, all limit relations hold as $x \rightarrow \infty$ unless otherwise stated. For two positive functions f and g , we write $f(x) \lesssim g(x)$ or $g(x) \gtrsim f(x)$ if $\limsup f(x)/g(x) \leq 1$ and write $f(x) \sim g(x)$ if both $f(x) \lesssim g(x)$ and $f(x) \gtrsim g(x)$. To avoid triviality, a nonnegative random variable is always assumed to be nondegenerate at 0.

Now, we are ready to present our first main result for the finite-time ruin probability.

Theorem 2.1 *Consider risk model (1). Let Assumptions 2.1 and 2.2 hold. Then, for every T such that $\lambda(T, \dots, T) > 0$, we have*

$$\psi(x, T) \sim \left[\int_{0-}^T \dots \int_{0-}^T V(\rho_1 e^{rt_1}, \dots, \rho_d e^{rt_d}) \lambda(dt_1, \dots, dt_d) \right] \overline{F}(x).$$

Next, we focus on the infinite-time ruin probability. To this end, we naturally require $r > 0$ in risk model (1) for the convergence of quantities under consideration.

Theorem 2.2 *In addition to the other conditions of Theorem 2.1, if $r > 0$ then (2.1) holds also for $T = \infty$, i.e., we have*

$$\psi(x) \sim \left[\int_{0-}^{\infty} \cdots \int_{0-}^{\infty} V(\rho_1 e^{rt_1}, \dots, \rho_d e^{rt_d}) \lambda(dt_1, \dots, dt_d) \right] \bar{F}(x).$$

Particularly, if the businesses share a common claim-number process, i.e., $N_1(t) \equiv \cdots \equiv N_d(t) \equiv N(t)$, then we can immediately obtain more elegant and transparent forms for (2.1) and (2.2) by applying (2.2).

Corollary 2.1 *In addition to the other conditions of Theorem 2.1, if $N_1(t) \equiv \cdots \equiv N_d(t) \equiv N(t)$ with $\lambda(t) = \mathbb{E}(N(t))$ then*

$$\psi(x, T) \sim \left(\int_{0-}^T e^{-\alpha t} \lambda(dt) \right) V(\rho_1, \dots, \rho_d) \bar{F}(x).$$

Further if $r > 0$ then

$$\psi(x) \sim \frac{\mathbb{E}(e^{-\alpha r \theta})}{1 - \mathbb{E}(e^{-\alpha r \theta})} V(\rho_1, \dots, \rho_d) \bar{F}(x),$$

where θ is the generic random variable of the inter-arrival times of $\{N(t)\}$.

Formulas (2.1)–(2.1) reveal that the ruin probabilities of risk model (1) with our dependence structures assume a form of some constant times $\bar{F}(x)$. Although the constants before $\bar{F}(x)$ are involved in general, the formulas enable us to easily conduct numerical estimates for the ruin probabilities; see, e.g., Section 5 of Tang and Yuan (2013) for some specific examples of the MRV with explicit Radon measures.

Additionally, in view of Yang and Li (2014) and Li (2015), if the claim sizes are asymptotically independent, then the decay rate of the ruin probabilities of risk model (1) should be $(\bar{F}(x))^d$, which is much more rapid than $\bar{F}(x)$ as shown in (2.1)–(2.1). This fact indicates that using the framework of MRV to model the dependences among the claim sizes can prevent the underestimate of risks to a very great extent.

Acknowledgments

The work of Li was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Numbers: 11201245 and 11371020).

References

1. Huang W., Weng C., Zhang Y. Multivariate risk models under heavy-tailed risks // Applied Stochastic Models in Business and Industry. — 2014. — Vol. 30, no. 3. — P. 341–360.

2. *Li J.* The Infinite-time ruin probability for a bidimensional renewal risk model with constant force of interest and dependent claims // Communications in Statistics. Theory and Methods. — 2017. — Vol. 46, no. 4. — P. 1959–1971.
3. *Li X., Wu, J., Zhuang J.* Asymptotic multivariate finite-time ruin probability with statistically dependent heavy-tailed claims // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2015. — Vol. 17, no. 2. — P. 463–477.
4. *Yang H., Li, J.* Asymptotic finite-time ruin probability for a bidimensional renewal risk model with constant interest force and dependent subexponential claims // Insurance: Mathematics and Economics. — 2014. — Vol. 58. — P. 185–192.

UDC 519.216.73

Feynman-type local integration of stochastic PDE

S.V. Ludkovsky*

* *Department of Applied Probability and Informatics,
RUDN University,
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

Abstract. This communication is devoted to an investigation of Gaussian quasi-measures and Feynman integration on infinite dimensional spaces with values in the octonion algebra, also their applications to solutions of PDEs including that of hyperbolic type and related stochastic processes.

Keywords: analytical methods in probability theory, computational methods, Feynman integral, hyperbolic PDE.

1. Introduction

It is well-known that Gaussian quasi-measures and Feynman integrals with values in the field of complex numbers are very important in mathematics and mathematical physics, especially, in quantum mechanics, quantum field theory and partial differential equations.

On the other hand, the Cayley-Dickson algebras \mathcal{A}_r over \mathbf{R} are natural generalizations of the complex field, where $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ denotes the quaternion skew field, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ denotes the octonion algebra, $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$. PDEs with real or complex coefficients of order higher than two is frequently possible to represent as compositions of the first and second order PDEs, but generally with octonion or Cayley-Dickson coefficients. That is why quaternion and octonion algebras have found important applications in partial differential equations, mathematical physics, quantum field theory, hydrodynamics, industrial and computational mathematics, non-commutative geometry.

2. Feynman-type local integration of PDE

Let an operator B_j be realized as an elliptic PDO \hat{B}_j of the second order on the Sobolev space $H^2(\mathbf{R}^{m_j})$ by real variables $x_{1+\beta_{j-1}, \dots, x_{\beta_j}}$, where $m_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_j = m_0 + \dots + m_j$, $m_j \in \mathbf{N}$ for each $j = 1, 2, \dots$

We consider a PDO of the form

$$\hat{B} = - \sum_{j=1}^m a_j \hat{B}_j,$$

where $a_j = -c_j^2$ for each $1 \leq j \leq l$, while $a_j = c_j^2$ for each $l+1 \leq j \leq m$, where $c_j \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ for each $j = 1, \dots, m$, $c \in cl(W_{r,m})$, where $2 \leq r$,

$0 \leq l \leq m$, $c = (c_1, \dots, c_m)$. A domain $W_{r,m}$ is contained in \mathcal{A}_r^m such that $W_{r,m} = V_r^m$, where $V_r = \{z \in \mathcal{A}_r : z = \rho \exp(M\gamma), M \in \mathcal{A}_r, Re(M) = 0, |M| = 1, 0 \leq \gamma < \pi/4, \rho_1 \leq \rho \leq 1\}$, $0 < \rho_1 < 1$ is a marked constant, $Re(z) = (z + z^*)/2$ for $z \in \mathcal{A}_r$, $z = z_0 i_0 + z_1 i_1 + \dots + z_{2^r-1} i_{2^r-1}$, while z_0, \dots, z_{2^r-1} are in \mathbf{R} , whilst $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ is the standard basis of the Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r over \mathbf{R} such that $i_0 = 1, i_l^2 = -1$ and $i_l i_k = -i_k i_l$ for each $l \neq k$ with $1 \leq l$ and $1 \leq k$, where $z^* = \tilde{z} = z_0 i_0 - z_1 i_1 - \dots - z_{2^r-1} i_{2^r-1}$. Let

$$\sigma^* f(x) = \sum_{j=1}^m \sigma_j^* f(x) \text{ and}$$

$$\sigma_j^* f(x) = \sum_{k=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \psi_{k;j} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k},$$

where $\psi_{k;j} \in \mathcal{A}_r$ for each k and j . Then the operator

$$\hat{S} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{B} + \sigma^* \tag{1}$$

is defined on the respective Sobolev space. We denote by $[B_j]$ a matrix corresponding to \hat{B}_j and by B_j a linear operator $B_j : \mathbf{R}^{m_j} \rightarrow \mathbf{R}^{m_j}$ prescribed by its matrix $[B_j]$.

Let w be a stochastic process which may be generalized in $C(T, \mathcal{A}_{r,C}^m)$ induced from the standard Wiener process in the Euclidean space \mathbf{R}^m by transformation with the operator $U = \bigoplus_{j=1}^m a_j^{1/2} B_j$. Let also $V(t, x) : [0, \infty) \times H \rightarrow \mathbf{C}$ be a Borel measurable function of $t \in \mathbf{R}$ and $x \in H$ such that V is bounded on each bounded subset in $[0, \infty) \times \mathcal{A}_{r,C}^m$, where $\mathcal{A}_{r,C}$ denotes the complexified Cayley-Dickson algebra \mathcal{A}_r , $H = \mathcal{A}_{r,C}^m$. Let μ be an $\mathcal{A}_{r,C}$ -valued quasi-measure on $X = C_0(T, H)$ induced by w . Put

$$\nu(t) = \int_0^t V(\tau, w(\tau)) d\tau$$

for each $0 \leq t < \infty$ and

$$K(x, t) = \int_X \{ \exp(-\nu(t)) |w(t) = x \} \frac{\mu_{tU, tp}(dx)}{\lambda_n(dx)} d\mu(w(t)),$$

where $\int_X f(w(t)) d\mu(w(t))$ is the extension of the Feynman integral to the Feynman-type operator on the space $\Psi(U)$ of test fast descending at infinity locally analytic functions.

Let $\hat{L} = \hat{S} + V(x)$ be a PDO, where the PDO \hat{S} is given by Formula (2), where $V(t, x)$ is a bounded function satisfying a uniform Hölder condition everywhere on $[0, \infty) \times \mathcal{A}_{r,C}^m$ may be besides a regular subset.

Then there exists an operator \hat{K} on a dense subspace $\mathcal{D}(\hat{K})$ in $H^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}_{r,C})$ such that \hat{K} provides a generalized solution of the PDE $\hat{L}\hat{K} = 0$.

3. Conclusions

Similar generalizations are for infinite dimensional PDE in separable Hilbert spaces, when operators B_j are of trace class. Other types of hyperbolic PDE also can be studied.

Acknowledgments

The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008 (Ludkovski)).

On Multivariate Geometric Random Sums

I. V. Zolotukhin*

* *St.-Petersburg Department of P.P.Shirshov Institute of Oceanology of RAS, 30, Liniya 1, Vasilievskiy Ostrov, St.-Petersburg, Russia, 199053.*

Abstract. In this paper, we use multivariate geometric distribution to generalize the notion of geometric random sum to the multidimensional case.

The characteristic functions of multivariate random sums are found as well as their projections on an arbitrary coordinate hyperplane. The sufficient conditions for weak convergence of these sums to the Marshall-Olkin multivariate exponential distribution and to the multivariate generalized Laplace distribution are given.

Keywords: multivariate geometric distribution, Marshall-Olkin multivariate exponential distribution, multivariate generalized Laplace distribution, characteristic function.

1. Introduction

Geometric summation arises naturally in the number of fields such as economics, physics, biology, queuing theories. Properties of geometric random sums of the form

$$\sum_{j=1}^M X_j,$$

where X_j are i.i.d. random variables, M is a random variable with the geometric distribution: $P(M = n) = pq^{n-1}$, $q = 1 - p$, ($n = 1, 2, \dots$); M and X_j ($j = 1, 2, \dots$) are independent, have been well studied [1].

It was found that the asymptotic behavior of these sums depends on the expectation $a = EX_j$. If $X_j \geq 0$ and $0 < a < \infty$, then the limit distribution is exponential, and if $a = 0$ and $0 < EX_j^2 < \infty$, then the limit distribution is the Laplace distribution (see [2], p.86), both after a suitable normalization.

In practice, often occur time series of random vectors. To date have been studied those limit distributions that are approximated by geometric sums in the form (1) for i.i.d. random vectors (see, for example, [3] and [4]). However, in the time series of random vectors occurring, for example, in models of financial mathematics, the number of random variables can be different for different components, and these random numbers are dependent on each other. For example, if we consider the time series the value of portfolios investments, or other assets, then each component

of the daily changes of these values is the sum of a random number of random changes, some of which affect only one of the components, while others affect to several ones. The result could be a vector sum in the form

$$Z = (Z_1, \dots, Z_k) = \left(\sum_{j=1}^{M_1} X_1^{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^{M_k} X_k^{(j)} \right),$$

wherein the random indices M_l ($l = 1, \dots, k$) dependent with each other. We consider this case. We introduce a new class of multivariate geometric random sums.

Let $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}$ is the set of k - dimensional indices $\varepsilon = (\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$, each coordinate of which is equal to 0 or 1, and \mathcal{E}_l is the set of indices for which $\varepsilon^{(l)} = 1$.

Let N_ε are the independent geometrically distributed random variables:

$$P(N_\varepsilon = n) = p_\varepsilon q_\varepsilon^{n-1}, n = 1, 2, \dots, p_\varepsilon = 1 - q_\varepsilon,$$

$$M_l = \min_{\varepsilon \in \mathcal{E}_l} \{N_\varepsilon\}, l = 1, \dots, k.$$

The distribution of the vector $M = (M_1, \dots, M_k)$ is introduced and studied in [5], and is called **multivariate geometric distribution (MVG)**.

Survival function of vector M is

$$\begin{aligned} \bar{P}(\mathbf{m}) = \bar{P}(m_1, \dots, m_k) &= P\left(\min_{\varepsilon \in \mathcal{E}_1} \{N_\varepsilon\} > m_1, \dots, \min_{\varepsilon \in \mathcal{E}_k} \{N_\varepsilon\} > m_k\right) = \\ &= \prod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} q_\varepsilon^{\max_i \varepsilon m_i}. \end{aligned}$$

Here $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$, m_j ($j = 1, \dots, k$) are integers, $\varepsilon \mathbf{m}$ is the coordinate-wise product of vectors ε and \mathbf{m} (here and below, a couple of signs like $\alpha\beta$, standing side by side, will mean their coordinate-wise product).

Multivariate geometric distribution has properties similar to those of one-dimensional geometrical laws. In particular, it has property of absence of aftereffect at the shift of all coordinates on the same value n :

$$P(M > \mathbf{n} + \mathbf{m} | M > \mathbf{n}) = P(M > \mathbf{m}), \mathbf{n} = (n, \dots, n).$$

Generalized multivariate geometric random sum is called a random vector sum of the form

$$Z = (Z_1, \dots, Z_k) = \left(\sum_{j=1}^{M_1} X_1^{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^{M_k} X_k^{(j)} \right),$$

where M_l are defined above in (2), $X_r^{(j)}$ ($r = 1, \dots, k$) are independent random variables identically distributed for each l with the known characteristic function

$$E \exp(it_r X_r) = \phi_r(t_r),$$

and M_l and $X_r^{(j)}$ are independent.

Note that the dependance between the components of the vector Z in the formula (3) is due to dependence in the summation indices M_l , and not because of the dependence between the coordinates of the vectors $X_l^{(j)}$.

Multivariate geometric random sums include the two extreme cases.

For $M_l = N_{\mathbf{1}}$ ($l = 1, \dots, k$), $N_\varepsilon = 0$, $\varepsilon \neq \mathbf{1}$, we have the standard geometric vector sums.

And for $M_l = N_{\varepsilon_l}$, where $\varepsilon_l = (0, \dots, 0, \underset{l}{1}, 0, \dots, 0)$, $N_\varepsilon = 0$ for $\varepsilon \neq \varepsilon_l$, each component will be a univariate geometric random sum in the form (1), and components of vector Z are independent.

2. Some details about Multivariate Exponential Distribution and Multivariate Laplace Distribution

The random vector $V = (V_1, \dots, V_k)$ having Marshall-Olkin multivariate exponential distribution (see [6]) is given by the survival function

$$\bar{F}(z) = P(V_1 > z_1, \dots, V_k > z_k) = \exp\left(-\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon \max_{1 \leq i \leq k} \varepsilon z\right), z_i > 0,$$

here $(\lambda_\varepsilon \geq 0, \varepsilon \in \mathcal{E})$ is a compact notation for the distribution parameters. The class of these distributions will be denoted as $MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{E})$.

Explicit expressions for the characteristic function of the random vector $V \in MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{E})$ as well as its projections to arbitrary coordinate hyperplane, have been received in [8]. If to use notations of the present paper, they will be written down as:

$$\Psi_V(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon - i(\mathbf{t}, \mathbf{1})} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon \Psi_V(\bar{\varepsilon}\mathbf{t}),$$

$$\Psi_V(\varepsilon\mathbf{t}) = \frac{1}{\sum_{\delta: \delta \varepsilon > \mathbf{0}} \lambda_\delta - i(\mathbf{t}, \varepsilon)} \sum_{\delta: \delta \varepsilon > \mathbf{0}} \lambda_\delta \Psi_V(\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{t}).$$

The multivariate generalized Laplace distribution was introduced in [7]. This is a mixture by parameter scale for the k -dimensional normal vector

with independent components and zero expectations, if mixing distribution is the Marshall-Olkin multivariate exponential distribution. Random vector with this distribution can be defined as follows:

Let $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ is a normal vector with zero expectation and identity covariance matrix, and $V = (V_1, \dots, V_k)$, $V \in \text{MVE}(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{E})$.

Then the distribution of the vector $W = (\sqrt{V_1}Y_1, \dots, \sqrt{V_k}Y_k)$ shall be the **multivariate generalized Laplace distribution** denoted by $MGLD(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{E})$.

The characteristic function of the vector W is

$$\Psi_W(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon + \frac{1}{2}(\mathbf{t}, \mathbf{t})} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon \Psi_W(\bar{\varepsilon}\mathbf{t}).$$

Let denote

$$\Phi(\mathbf{t}) = \frac{\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon}{\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon + \frac{1}{2}(\mathbf{t}, \mathbf{t})}.$$

It is the characteristic function of the multivariate symmetric Laplace distribution.

Now we can write down $\Psi_W(\mathbf{t})$ as

$$\Psi_W(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{t}) \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} p_\varepsilon \Psi_W(\bar{\varepsilon}\mathbf{t}),$$

where

$$p_\varepsilon = \frac{\lambda_\varepsilon}{\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \lambda_\varepsilon}.$$

Hence the distribution of W is the discrete mixture of multivariate symmetrical Laplace distribution with their convolutions with projections of W on the coordinate hyperplanes.

When $\lambda_{\mathbf{1}} > 0$ and $\lambda_\varepsilon = 0$, $\varepsilon \neq \mathbf{1}$, $\varepsilon \in \mathcal{E}$, we have the symmetric Laplace distribution.

When $\lambda_{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0} > 0$ ($l = 1, \dots, k$) and $\lambda_\varepsilon = 0$ for other cases ($\varepsilon \in \mathcal{E}$), the coordinates of W will be independent random variables with the univariate Laplace distribution.

The characteristic functions of projection of vector W on the coordinate hyperplane ε are

$$\Psi_W(\varepsilon\mathbf{t}) = \frac{1}{\sum_{\delta: \delta\varepsilon > \mathbf{0}} \lambda_\delta + \frac{1}{2}(\varepsilon\mathbf{t}, \varepsilon\mathbf{t})} \sum_{\delta: \delta\varepsilon > \mathbf{0}} \lambda_\delta \Psi_W(\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{t}).$$

3. Main Results

Let denote $\Psi_Z(t) = E \exp(i(t, Z))$ the characteristic function of vector Z ; $\ln \phi(t) = (\ln \phi_1(t_1), \dots, \ln \phi_k(t_k))$ is the coordinate-wise logarithm of the vector function $\phi(t) = (\phi_1(t_1), \dots, \phi_k(t_k))$; $t = (t_1, \dots, t_k)$; $\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2$ is the vector, each i -th coordinate is $\max\{\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}\}$.

Define the partial order on the set \mathcal{E} by the rule:

$$\forall \varepsilon, \delta \in \mathcal{E} \quad \delta \leq \varepsilon, \text{ if } \forall j (j = 1, \dots, k) \quad \delta_j \leq \varepsilon_j.$$

Let $\delta < \varepsilon$ if $\delta \leq \varepsilon$ and $\delta \neq \varepsilon$. Note that $\forall \delta, \varepsilon \in \mathcal{E} \quad \delta \varepsilon \leq \varepsilon$.

Theorem 1. *The characteristic function of the projection of vector Z on the coordinate hyperplane ε is*

$$\begin{aligned} \Psi_Z(\varepsilon t) &= E \exp(i(t, \varepsilon Z)) = \\ &= \frac{\exp(\varepsilon, \ln \varphi(t))}{1 - \exp(\varepsilon, \ln \varphi(t)) \prod_{\gamma: \gamma \varepsilon > 0} q_\gamma} \cdot \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\delta_l: \delta_l \varepsilon > 0 \\ l=1, \dots, j}} \prod_{l=1}^j p_{\delta_l} \prod_{\substack{\gamma: \gamma \varepsilon > 0 \\ \gamma \neq \delta_l \\ l=1, \dots, j}} q_\gamma \Psi_Z \left(\overline{\bigvee_{l=1}^j \delta_l \varepsilon t} \right). \end{aligned}$$

Corollary 1.1.

$$\begin{aligned} \Psi_Z(t) &= E \exp(i(t, Z)) = \\ &= \frac{\exp(\mathbf{1}, \ln \varphi(t))}{1 - \exp(\mathbf{1}, \ln \varphi(t)) \prod_{\delta \in \mathcal{E}} q_\delta} \cdot \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\delta_l \in \mathcal{E} \\ l=1, \dots, j}} \prod_{l=1}^j p_{\delta_l} \prod_{\substack{\gamma \in \mathcal{E} \\ \gamma \neq \delta_l \\ l=1, \dots, j}} q_\gamma \Psi_Z \left(\overline{\bigvee_{l=1}^j \delta_l t} \right). \end{aligned}$$

Corollary 1.2. *The characteristic function of the vector Z projection on the axis $\varepsilon = (1, 0, \dots, 0)$ is*

$$\Psi(\varepsilon t) = E \exp(i(t_1, Z_1)) = \frac{\varphi_1(t_1) (1 - \prod_{\delta \in \mathcal{E}_1} q_\delta)}{1 - \varphi_1(t_1) \prod_{\delta \in \mathcal{E}_1} q_\delta}.$$

Now let denote $p_\varepsilon = \lambda_\varepsilon p$, $\varepsilon \in \mathcal{E}$. We shall search the limit distributions of the vector Z as $p \rightarrow 0$.

Theorem 2. *Let $X_l^{(j)} \geq 0$; $EX_l^{(j)} = a_l$; $0 < a_l < \infty$; $l = 1, \dots, k$, then*

$$\left(\frac{p}{a_1} Z_1, \dots, \frac{p}{a_k} Z_k \right) = \left(\sum_{j=1}^{M_1} \frac{p}{a_1} X_1^{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^{M_k} \frac{p}{a_k} X_k^{(j)} \right) \xrightarrow{p \rightarrow 0} V,$$

$$V \in MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{E}).$$

Theorem 3. Let $EX_l^{(j)} = 0$; $EX_l^2 = \sigma_l^2$; $0 < \sigma_l^2 < \infty$; $l = 1, \dots, k$, then

$$\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_1} Z_1, \dots, \frac{\sqrt{p}}{\sigma_k} Z_k \right) \xrightarrow[p \rightarrow 0]{\mathcal{D}} W, \quad W \in MGLD(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{E}).$$

4. Conclusions

We present the following results:

- The characteristic function of the vector Z as well as projections of Z on any coordinate hyperplane is found.

- It has been shown that the distributions of the vector Z can be recursively restored by distributions of their univariate components.

- It has been shown that, by analogy with the univariate case, after a suitable normalization the limit distributions will be Marshall-Olkin distribution, if $X_l^{(j)} \geq 0$ and $0 < EX_l^{(j)} < \infty$, and multivariate Laplace distribution, if $EX_l^{(j)} = 0$ and $0 < E(X_l^{(j)})^2 < \infty$.

- Thus, it is shown that these distributions possess the property of geometric stability, under the special scheme of geometric summation.

References

1. *Kalashnikov V.* Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. — Dordrecht; Boston: Kluwer Academic, Series: Mathematics and Its Applications, 1997. — Vol. 413. — 270 p.
2. *Korolev V.Y., Bening V.E., Shorgin S.Ya.* Mathematical Foundation of Risk Theory. — M.: Fizmatlit, 2007. — 542 p. (in Russian)
3. *Kozubowski T.G., Rachev S.T.* Multivariate geometric stable laws // J. Comput. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 1, no. 4. — P. 349-385.
4. *Meerschaert M.M., Scheffler H.P.* Limit distributions for sums of independent random vectors. — Wiley, New York, 2001.
5. *Zolotukhin I.V.* A new class of geometrically distributed random vectors with dependent components // Vestnik NovSU. Phys.-Math. Sci. — 2014. — Vol. 80. — P. 23–26. (in Russian)
6. *Marshall A.W., Olkin I.A.* A multivariate exponential distribution // J. Amer. Statist. Assoc. — 1967. — Vol. 62 (317). — P. 30–44.
7. *Zolotukhin I.V., Zolotukhina L.A.* New Class of Multivariate generalized Laplace Distributions // Trans. of XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Riga, 2004.
8. *Zolotukhin I.V.* The Study of the Laplace Transform of Marshall-Olkin Multivariate Exponential Distribution // Topics in Statistical Simulation. — Springer, New York, 2014. — P. 531–539.

Two-sided Bounds for the Convergence Rate of Markov Chains

A. Zeifman^{*}, Ya. Satin[†], K. Kiseleva[‡], V. Korolev[§]

^{*} *Vologda State University,
Institute of Informatics Problems of the FRC CSC RAS, ISEDT RAS, Russia*

[†] *Vologda State University, Russia*

[‡] *RUDN University, Vologda State University, Russia*

[§] *Moscow State University, Institute of Informatics Problems of the FRC CSC
RAS, Moscow, Russia,
Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, China*

Abstract. We study inhomogeneous continuous-time weakly ergodic Markov chains on a finite state space and consider an approach to obtaining upper and lower bounds on the rate of convergence. Some specific queueing models are also discussed.

Keywords: finite continuous-time Markov chain, rate of convergence, birth and death process, ergodicity, bounds, queueing systems.

1. Main section

Studies of ergodic properties of finite inhomogeneous continuous-time Markov chain started in the 70-s of the last century, see for instance [6–8]. Since 1990-s main problems in this direction have been connected with obtaining quantitative estimates of the rate of convergence, see [19].

There are many papers dealing with upper bounds for the rate of convergence, see, for instance, [5, 13, 15, 16]. Usually, either the limiting mode is determined [1], or, on the contrary, the state probabilities are determined as functions of time t and initial conditions [4].

In [23] we presented an approach to finding sharp upper bounds in natural metrics via essential positivity of the reduced intensity matrix of a Markov chain. These bounds are sharp for nonnegative difference of the initial conditions of two probability distributions of a Markov chain. However, in a general situation the assumption of nonnegativity of this difference does not hold and the real lower bound of the rate of convergence can be essentially smaller. At the same time, lower bounds for the convergence rate are very important, because they give an opportunity to determine the time until which the accurate approximation of transient probability characteristics by the limiting probability characteristics is impossible.

As far as we know, these bounds were studied previously only in the papers [10–12, 19, 21] for birth-death processes via the notion of the logarithmic norm of an operator and the corresponding estimates. In this note we deal with the weak ergodicity of (as a rule, inhomogeneous) continuous-time Markov chains and formulate an algorithm for the construction of

lower bounds for the rate of convergence in the special weighted norms related to total variation.

Our first approach is more general, it is closely connected with the notion of the logarithmic norm and the corresponding bounds for the Cauchy matrix [9, 11, 19–22], and allows to obtain general upper and lower bounds for the rate of convergence for a countable state space and general initial conditions.

The second approach is based on the properties of nonnegative and essentially nonnegative matrices; it can be applied to the study of sharpness of upper bounds.

The concept of the logarithmic norm of a square matrix was developed independently in [2, 14] as a tool to derive error bounds in the numerical integration of initial-value problems for a system of ordinary differential equations (see also the survey papers [17, 18]). The logarithmic norm of an operator function and the corresponding bounds for solutions of differential equation in Banach space has been developed in [3]. One can find a detailed discussion in [5, 11].

The second approach was described in details in our recent paper [23].

Here we outline the algorithm of the study.

First, we consider the forward Kolmogorov system for the inhomogeneous Markov chain $X(t)$ in the form

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}(t),$$

where $A(t)$ is the transposed intensity matrix of the process. We can put $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$ and obtain from (1) the reduced system in the form

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t),$$

where $\mathbf{f}(t) = (a_{10}(t), a_{20}(t), \dots, a_{S0}(t))^T$, $\mathbf{z}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_S(t))^T$,

$$B(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) - a_{10}(t) & a_{12}(t) - a_{10}(t) & \cdots & a_{1S}(t) - a_{10}(t) \\ a_{21}(t) - a_{20}(t) & a_{22}(t) - a_{20}(t) & \cdots & a_{2S}(t) - a_{20}(t) \\ a_{31}(t) - a_{30}(t) & a_{32}(t) - a_{30}(t) & \cdots & a_{3S}(t) - a_{30}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{S1}(t) - a_{S0}(t) & a_{S2}(t) - a_{S0}(t) & \cdots & a_{SS}(t) - a_{S0}(t) \end{pmatrix}.$$

All bounds on the rate of convergence to the limiting regime for $X(t)$ correspond to the same bounds of the solutions of system

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t).$$

The main step is finding a transforming matrix D such that the matrix $B^*(t) = DB(t)D^{-1} = (b_{ij}^*(t))_{i,j=1}^S$ is essentially nonnegative.

Consider the quantities $h^*(t) = \max_j \sum_i b_{ij}^*(t)$, $h_*(t) = \min_j \sum_i b_{ij}^*(t)$, and $g^*(t) = \max_j \sum_i (|b_{ii}^*(t)| + \sum_{j \neq i} b_{ji}^*(t))$.

Theorem. Let $X(t)$ be a finite inhomogeneous Markov chain. Let there exist a nonsingular matrix D such that $B^*(t)$ is essentially nonnegative and

$$\int_0^\infty h^*(\tau) d\tau = -\infty.$$

Then $X(t)$ is weakly ergodic and the following bounds hold:

$$\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \leq \exp \left\{ \int_0^t h^*(\tau) d\tau \right\} \|\mathbf{z}^*(0) - \mathbf{z}^{**}(0)\|_{1D},$$

for any corresponding initial conditions $\mathbf{p}^*(0)$, $\mathbf{p}^{**}(0)$, and

$$\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D} \geq \exp \left\{ \int_0^t h_*(\tau) d\tau \right\} \|\mathbf{z}^*(0) - \mathbf{z}^{**}(0)\|_{1D},$$

if the initial conditions are such that $D(\mathbf{z}^*(0) - \mathbf{z}^{**}(0)) \geq \mathbf{0}$. Moreover,

$$\|\mathbf{z}^*(t) - \mathbf{z}^{**}(t)\|_{1D^*} \geq \exp \left\{ - \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right\} \|\mathbf{z}^*(0) - \mathbf{z}^{**}(0)\|_{1D^*}$$

for any corresponding initial conditions $\mathbf{p}^*(0)$, $\mathbf{p}^{**}(0)$.

Remark 1. There are some classes of Markov chains for which it is possible to find sufficiently accurate bounds on the rate of convergence. Namely, we can do so for birth-death-catastrophe process in [21], for a class of Markovian queues with batch arrivals and group services in [22] and for their combinations in [24].

Remark 2. A finite birth-death process with constant rates of birth $\lambda_k(t) = a$ and $\mu_{k+1}(t) = b$ was considered in [9, 12], where both upper and lower sharp bounds were obtained. Namely, the corresponding $D = D^*$, sharp $\beta_* = \beta^* = a + b - 2\sqrt{ab} \cos \frac{\pi}{S+1} \rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ as $S \rightarrow \infty$, and sharp $g^* = a + b + 2\sqrt{ab} \cos \frac{\pi}{S+1} \rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ as $S \rightarrow \infty$ were found, where $\beta_* = \beta^* = -h^* = -h_*$.

Remark 3. The obtained lower bounds find real applications to specific models of queueing systems and biology with a very fast entry into limit mode, as it was illustrated by the corresponding examples and plots in [21].

Acknowledgments

This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement no. 02.a03.21.0008 of 24 June 2016), and by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 15-01-01698.

References

1. *Chakravarthy, S. R.* A catastrophic queueing model with delayed action // Applied Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 46. — P. 631–649.
2. *Dahlquist, G.* Stability and Error Bounds in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. Inaugural dissertation, University of Stockholm, Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB, Uppsala 1958. Reprinted in: Transactions of the Royal Institute of Technology, No. 130, Stockholm, 1959.
3. *Dalecki, Ju., Krein, M.* Stability of solutions of differential equations in Banach space. — American Mathematical Society Translations. 1974. — Vol. 43. — 386 p.
4. *Di Crescenzo, A., Giorno, V., Nobile, A. G.* Constructing transient birth-death processes by means of suitable transformations // Applied Mathematics and Computation. — 2016. — Vol. 281. — P. 152–171.
5. *Van Doorn, E. A., Zeifman, A. I., Panfilova, T. L.* Bounds and asymptotics for the rate of convergence of birth-death processes // Theory Probab. Appl. — 2010. — Vol. 54. — P. 97–113.
6. *Gnedenko, B. V., Soloviev, A.* On the conditions of the existence of final probabilities for a Markov process // Math. Oper. Statist. — 1973. — Vol. 4. — P. 379–390.
7. *Gnedenko, B. V., Makarov, I. P.* Properties of solutions of the loss periodic intensities problem // Diff. Eqns. — 1971. — Vol. 7. — P. 1696–1698.
8. *Gnedenko D. B.* On a generalization of Erlang formulae // Zastosow. Mat. — 1971. — Vol. 12. — P. 239–242.
9. *Granovsky, B. L., Zeifman, A. I.* The decay function of nonhomogeneous birth-death processes, with application to mean-field models // Stochastic Process. Appl. — 1997. — Vol. 72. — P. 105–120.
10. *Granovsky, B. L., Zeifman, A. I.* The N -limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains // Appl. Stoch. Models Bus. Ind. — 2000. — Vol. 16, no. 4. — P. 235–248.
11. *Granovsky, B. L., Zeifman, A. I.* Nonstationary Queues: Estimation of the Rate of Convergence // Queueing Syst. — 2004. — Vol. 46. — P. 363–388.
12. *Granovsky, B. L., Zeifman, A. I.* On the lower bound of the spectrum of some mean-field models // Theory Probab. Appl. — 2005. — Vol. 49. — P. 148–155.

13. *Kartashov, N. V.* Criteria for uniform ergodicity and strong stability of Markov chains with a common phase space // *Theory Probab. Appl.* — 1985. — Vol. 30. — P. 71 – 89.
14. *Lozinskiĭ, S. M.* Error estimate for numerical integration of ordinary differential equations // *I. Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika.* — 1958. — No. 5. — P. 52–90. (In Russian.)
15. *Mitrophanov, A. Yu.* Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains // *J. Appl. Probab.* — 2003. — Vol. 40. — P. 970–979.
16. *Mitrophanov, A. Yu.* The spectral gap and perturbation bounds for reversible continuous-time Markov chains // *J. Appl. Probab.* — 2004. — Vol. 41. — P. 1219–1222.
17. *Söderlind, G.* The logarithmic norm. History and modern theory. BIT // *Numerical Mathematics.* — 2006. — Vol 46. — P. 631–652.
18. *Ström, T.* On Logarithmic Norms. SIAM // *J. Numer. Anal.* — 1975. — Vol. 12. — P. 741–753.
19. *Zeifman, A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes // *Stochastic Process. Appl.* — 1995. — Vol. 59. — P. 157–173.
20. *Zeifman, A. I., Leorato, S., Orsingher, E., Satin, Ya., Shilova, G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // *Queueing Syst.* — 2006. — Vol. 52. — P. 139–151.
21. *Zeifman, A. I., Satin, Ya., Panfilova, T.* Limiting characteristics for finite birth-death-catastrophe processes // *Math. Biosci.* — 2013. — Vol. 245. — P. 96–102.
22. *Zeifman, A. I., Korolev, V., Korotysheva, A., Satin, Y., Bening, V.* Perturbation bounds and truncations for a class of Markovian queues // *Queueing Syst.* — 2014. — Vol. 76. — P. 205–221.
23. *Zeifman, A. I., Korolev, V. Y.* Two-sided Bounds on the Rate of Convergence for Continuous-time Finite Inhomogeneous Markov Chains // *Statistics & Probability Letters.* — 2015. — Vol. 103. — P. 30–36.
24. *Zeifman, A., Korotysheva, A., Satin, Y., Razumchik, R., Korolev, V., Kiseleva, K.* Bounds on the rate of convergence for inhomogeneous $M/M/S$ systems with either state-dependent transitions, or batch arrivals and service, or both // arXiv preprint, 2016, arXiv:1609.09634.

Some Algorithms of Record Generation

A.I. Pakhteev

*Institute of Physics, Mathematics and Information Technology,
Immanuel Kant Baltic Federal University,
A.Nevskogo 14, Kaliningrad, 236041 Russia*

Abstract. In the present work, we discuss algorithms of record generation when records are taken from a gamma population.

Keywords: records, gamma-distribution, rejection and inverse-transform methods.

1. Introduction

Let X_1, X_2, \dots be a sequence of random variables defined on a common probability space. Let us introduce the sequences of record times $L(n)$ and record values $X(n)$ as follows:

$$L(1) = 1,$$

$$L(n+1) = \min \{j : j > L(n), X_j > X_{L(n)}\}, \quad X(n) = X_{L(n)} \quad \text{for } n \geq 1.$$

The theory of records is much discussed and well developed; see, for example, [1]. A new and interesting turn in this theory is associated with simulation of record data; see the works [2], [3], [4], [5], [6] and [7].

The simulation of records is important for modeling such experiments where only record data is available. The concept of record sample was introduced in [8]. One situation where such samples arise is in industrial stress and life-testing wherein measurements are made sequentially and only values larger than all previous values are recorded. For some other examples, see [9], [10] and [11]. It should also be noted that record samples are used in statistics in data reduction procedures.

The Gamma distribution is important for statistics and simulation. It belongs to the exponential family, and many research methods applicable to the Gamma distribution are also applicable to the other distributions of this family. Generating Gamma random variables, in its turn, is an interesting simulation problem.

The goal of the present work is to develop and discuss generation algorithms of Gamma records. Generation algorithms of Gamma records are proposed in our work first time. The corresponding algorithms are based on the rejection method. Before presenting these algorithms we introduce the direct method of record generation by which records from any population can be generated. However, if a large number of weak records is needed this method is computationally burdensome and slow.

The direct method. *The value $X(1) = X_1$ is generated and kept. For $n \geq 1$, one can apply the recursive approach, which assumes that $X(n)$ is already obtained. One then generates observations X_i till one of them, say X_j , is greater than $X(n)$. Then $X(n+1) = X_j$ becomes the next record value, which is also kept.*

Let in the following X_1, X_2, \dots be independent and identically distributed random variables with a Gamma distribution $F(x | \alpha)$, where $\alpha > 0$ is a shape parameter. Let also $f(x | \alpha)$ be the corresponding density function, i.e.

$$f(x | \alpha) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (x, \alpha > 0).$$

It is known that the sequence $X(1), X(2), \dots$ forms a Markov chain and

$$f_{X(n+1)|X(n)}(x_{n+1} | x_n, \alpha) = \frac{f(x_{n+1} | \alpha)}{1 - F(x_n | \alpha)} \quad (x_{n+1} > x_n),$$

where $F(x_n | \alpha) = \int_0^{x_n} f(u | \alpha) du$. In the following we will use (1) for modeling Gamma records. In the case of Gamma distribution the inverse function F^{-1} cannot be obtained explicitly. One can apply here either tables of the inverse functions F^{-1} or the rejection method. In our work, the algorithms of generation of record values will be based on the rejection method. In our talk we compare algorithms based on the rejection method and algorithms based on tables of F^{-1} . This comparison shows that the algorithms based on the rejection method are more efficient.

2. Simulation algorithms

2.1. Simulation algorithm of $X(n)$ for $\alpha \in (0, 1)$

Algorithm: The sequence $X(n)$ ($n \geq 1$) can be generated in accordance with the following algorithm.

STEP 1: Generate $X(1) = X_1$ with $F(x | \alpha)$ by the rejection method. For $n \geq 1$, apply the rejection method and the following recursive approach. Assume that $X(n) = x_n$ is already obtained.

STEP 2: Generate a random number $U_1 = u_1$. Generate $Y = y$ with

$$g(y | x_n) = e^{-y+x_n} \quad (y > x_n),$$

namely: $y = x_n - \log u_1$.

STEP 3: Generate a random number $U_2 = u_2$. If $u_2 < \left(\frac{y}{x_n}\right)^{\alpha-1}$, set $X(n+1) = y$. Otherwise, return to STEP 2.

Remark: One can show that $c^* = c^*(x_n) \rightarrow 1$ as $x_n \rightarrow \infty$.

Since for Gamma records $X(n) \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty$, Remark 2.1 points out that Algorithm 2.1 (which is based on the rejection method) works eventually as an algorithm based on the inverse-transform method. That is that with time almost every generation in a generation experiment is accepted and becomes a new record. That is Algorithm 2.1 is effective and speedy.

2.2. Simulation algorithm of $X(n)$ for $\alpha > 1$

Algorithm: The sequence $X(n)$ ($n \geq 1$) can be generated as follows.

STEP 1: Generate $X(1) = X_1$ with $F(x | \alpha)$ by the rejection method. For $n \geq 1$, apply the rejection method and the following recursive approach. Assume that $X(n) = x_n$ is already obtained.

STEP 2: Generate a random number $U_1 = u_1$. Generate $Y = y$ with

$$g(y | x_n, \mu_A^*) = \frac{1}{\mu_A^*} e^{-\frac{y-x_n}{\mu_A^*}} \quad (y > x_n),$$

where $\mu_A^* = \frac{2x_n}{x_n - \alpha + \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + 4x_n}}$. The last generation can be done as $y = x_n - \mu_A^* \log u_1$.

STEP 3: Generate a random number $U_2 = u_2$. If

$$u_2 < \left(\frac{y \left(1 - \frac{1}{\mu_A^*} \right)}{\alpha - 1} \right)^{\alpha-1} e^{-y \left(1 - \frac{1}{\mu_A^*} \right) + \alpha - 1},$$

set $X(n + 1) = y$. Otherwise, return to STEP 2.

Remark: One can show that $c_A^* = c_A^*(x_n) \rightarrow 1$ as $x_n \rightarrow \infty$.

Remark 2.2 also indicates that Algorithm 2.2 works with time as an algorithm based on the inverse-transform method. That is Algorithm 2.2 is also effective and speedy.

3. Conclusions

We proposed two algorithms of record generation when records were taken from a Gamma population with shape parameter $\alpha < 1$ and $\alpha > 1$, respectively. By analyzing their asymptotic performance, we showed that though these algorithms are based on the rejection method, they worked with time as algorithms based on the inverse-transform method, i.e. they are speedy and effective. They are more effective than the algorithms based on the tables of inverse distribution.

References

1. *Neuzorov, V. B.* Records: Mathematical Theory, Translation of Mathematical Monographs. — American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

2. *Bairamov, I. and Stepanov, A.* Numbers of near bivariate record-concomitant observations // *Journal of Multivariate Analysis*. — 2011. — Vol. 102. — P. 908–917.
3. *Balakrishnan, N., So, H.Y. and Zhu, X.J.* On Box-Muller Transformation and Simulation of Normal Record Data // *Communication in Statistics – Simulation and Computations*. — 2016. — Vol. 45. — P. 3670–3682.
4. *Luckett, D.J.* *Statistical Inference Based on Upper Record Values*. — The College of William and Mary, 2013.
5. *Nevezorov, V.B. and Stepanov, A.* Records with confirmation // *Statist. Probab. Lett.* — 2014. — Vol. 95. — P. 39–47.
6. *Pakhteev, A. and Stepanov, A.* Simulation of Gamma Records // *Statist. Probab. Lett.* — 2016. — Vol. 119. — P. 204–212.
7. *Pakhteev, A. and Stepanov, A.* Generation of Records by Means of the Rejection Method // *Vestnik of I. Kant Baltic Federal University*. — 2016. — Vol. 3. — P. 24–31.
8. *Samaniego, F. J. and Whitaker, L. R.* On estimating popular characteristics from record breaking observations I. Parametric results // *Naval Research Logistics Quarterly*. — 1986. — Vol. 33. — P. 531–543, 1986.
9. *Hofmann, G. and Nagaraja, H. N.* Fisher information in record data // *Metrika*. — 2001. — Vol. 57. — P. 177–193.
10. *Hofmann, G.* Comparing Fisher information in record data and random observations // *Statistical Papers*. — 2004. — Vol. 45. — P. 517–528.
11. *Balakrishnan, N. and Stepanov, A.* On the Fisher information in record data // *Statist. Probab. Lett.* — 2006. — Vol. 76. — P. 537–545.

UDC 519.2

Markov stochastic processes in biology – almost the same than in mathematics but a bit different

M. Sokół*

* *Faculty of Biology, Biological and Chemical Research Centre,
University of Warsaw,
Zwirki i Wigury 101, 02-089 Warsaw, Poland*

Abstract. Due to annual and diurnal fluctuations almost all stochastic processes in biology are non-homogeneous. They can be defined by any function $p : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$ or $q : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$ where X is a set of states, W is a limited subset of X , \mathcal{F} is a set of time-depended integrable functions $f : [0, T) \rightarrow [0, \infty)$. At any time t for any state $w \in W$ the sum $\sum_X p(w, x)(t)$ or the integration $\int_X p(w, x)(t)dx$ are equal to 1 (discrete time processes), and the sum $q(w, x)(t)$ is equal 0 or the integration $\int_X q(w, x)(t)dx$ (continuous time processes) is positive but finite. This is not only obvious generalization of a stochastic/intensity matrix/field but also modification of them. Limitation of W is significant but X including all possible states is often infinite. These Markov stochastic processes have non-quadratic stochastic matrices and fields. It is possible because realizations of these processes are interrupted when the state after transitions is outside of W .

For all function $p : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$ and $q : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$ there exist stochastic processes with Markov property. It can be simulated by computer programs. It has correctly defined probability space while for some infinite quadratic matrices it is not true.

Keywords: stochastic matrix, stochastic field, intensity matrix, intensity field.

1. Introduction

A stochastic matrix is a square matrix, which entries are non-negative real numbers and each row (right matrix) or column (left matrix) summing to 1 [2]. Intensity matrixes is a square matrix, which entries are non-negative real numbers, expect diagonal with non-positive entries. Each row (right matrix) or column (left matrix) of this matrix summing to 0 [5]. Their continuous equivalentes are named random fields [1], [3]. These lexical definitions of stochastic and intensity matrices and fields are insufficient for the applications.

Due to diurnal or seasonal fluctuations of a probability it is necessary to consider the non-homogeneous Markov processes. The entries in stochastic and intensity matrices must be replaced by time-depended functions, which values are probabilities or probability rates. The set of such function will be noted as \mathcal{F} .

2. Modification

The biologists calculate probabilities inserted in stochastic or intensity matrix using a regression between value of state and frequency of events. General rule keeping in biology runs: "it is not possible to prolong the regressions beyond the observed range". Biological systems are too complicated to predict what it is happening for extremal values of state. It is seen for a simple birth and death process in discrete time applied to biological populations (figure 1). The same rules apply to stochastic fields,

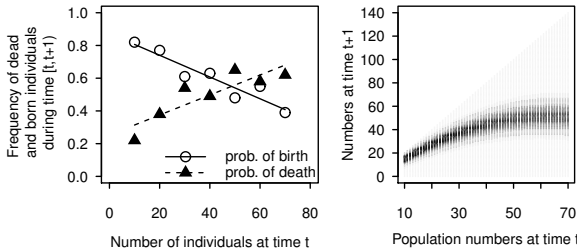


Figure 1. On left - the regressions between population numbers k at time t and frequency of born and dead individuals during time $[t, t + 1)$ calculated on interval $[10, 70]$ only. For $k < 10$ and $k > 70$ the value of probability of birth and death are impossible to foresee. The formulas $p_r(k)$ and $p_s(k)$ allow calculating a probability of change population numbers k to n during time $[t, t + 1)$ using a formula:

$$p(k, n)(t) = \sum_r \binom{k}{r} \binom{k}{k-n+r} (p_r(k))^r (1 - p_r(k))^{k-r} (p_s(k))^{k-n+r} (1 - p_s(k))^{n-r}.$$

These probabilities are shown on right. The darker points indicate greater value of probabilities. They have positive value for $k \in [10, 70]$ and $n \in [0, 2k]$.

Minimal size of this matrix is $[10, 70] \times [0, 140]$.

intensity matrices and intensity fields. The set of states, for which probabilities or probability rates can be estimated is limited. It will be named W . The set for finish states cannot be limited.

3. Definitions of stochastic and intensity "matrix"/"field"

The terms "matrix" and "field" suggest two-dimensional objects. But, when a state is a vector $w = (n_1, n_2, \dots)$, then the ordering of the states is not natural. For discrete-time discrete-value processes it is better to consider a function $p : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$, where X is a set of events, $W \subset X$ is limited and $p(w, v)(t) \geq 0$ for all $w \in W$ and $v \in X$, and:

$$\sum_{v \in X} p(w, v)(t) = 1 \quad \text{for all } w \in W \text{ and } t \in [0, T].$$

For continuous-time discrete-value processes an intensity matrix may be changed to a function $q : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$, such that $q(w, v)(t) \geq 0$ if $w \neq v$ and $q(w, w)(t) \leq 0$, and:

$$\sum_{v \in X} q(w, v)(t) = 0 \quad \text{for all } w \in W \text{ and } t \in [0, T).$$

Functional view on described terms causes, that a simple stochastic matrix would be write in another orientation than we has usually done it (figure 1, on right).

For discrete-time continuous-value processes a stochastic field is a function $p : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$, such that $p(w, v)(t) \geq 0$ for all $w \in W$ and $v \in X$. and:

$$\int_X p(w, v)(t) dv = 1 \quad \text{for all } w \in W \text{ and } t \in [0, T).$$

For continuous-time continuous-value processes an intensity field is a function $q : W \times X \rightarrow \mathcal{F}$, such that $q(w, v)(t) \geq 0$ for all $w \in W$ and $v \in X$ and there exist such $0 < M < \infty$ that:

$$\int_X q(w, v)(t) dv < M \quad \text{for all } w \in W \text{ and } t \in [0, T).$$

4. Simulation and probability space

A simulation of a Markov processes for stochastic matrix is shown on figure 2. There exist simulators of Markov stochastic processes for each stochastic intensity matrix fields.

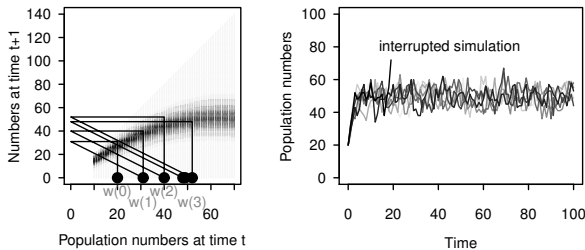


Figure 2. On left - the stochastic matrix for birth and death process in discrete time. On right - the sample of the eight realizations of this process to maximal time $T = 100$. When the population receives numbers greater than 70 the simulation is interrupted. This phenomena is interpreted as the population input into an unknown system of regulatory mechanisms.

By a repeating of the simulation a set Ω of all possible realization is formed. There exists a probability space $(\Omega, \sigma(\Omega), P)$ such that for all $A \in \sigma(\Omega)$ the $P(A)$ is a probability that random realization including to A . Construction of this probability space is similar to Lebesgue measure definition. It has already published for an intensity matrix [4]. It formes a probability space for the stochastic process $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$ such that $\xi_t : \Omega \ni \varphi \rightarrow \varphi(t) \in X$.

References

1. *Adler R. J., Taylor J. E.* Random Fields and Geometry. — Springer Science and Business Media, 2009.
2. *Asmussen S. R.* Applied Probability and Queues. — Application of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability. — Vol. 51. — Springer. 2003.
3. *Khoshnevisan D.* Multiparameter Processes: An Introduction to Random Fields. — Springer Science and Business Media, 2006.
4. *Sokół M.* A probability space of continuous-time discrete value stochastic process with Markov property // Journal of Advancis in Mathematics. — 2016. — Vol.12 — P. 5975–5991.
5. *Syski R.* Passage Times for Markov Chains. — IOS Press, 1992.

UDC 51(091)

Mathematical Methods in Practical Mechanics: From Heron of Alexandria to Galileo

E. Zaytsev*

** Department of History of Mathematics
S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology
Baltiiskaya 14, Moscow, Russia.*

Abstract. The paper is devoted to the history of mathematical methods in practical mechanics used, in particular, for the description of motion of "simple machines." It is shown that the wide application of these methods has begun in the 16th c. after the introduction of counterweight in lifting technology.

Keywords: Mathematical methods in mechanics, history of pre-classical mechanics, simple machines, hoist, Heron of Alexandria, Galileo.

1. Introduction

The opposition between dynamics and statics is nowadays rather loose, as both disciplines are governed by the same laws of classical mechanics (in statics these laws are operative within the principle of virtual work).

In pre-classical mechanics, to the contrary, dynamics and statics were strictly separated due to the general idea about the absolute opposition between motion and rest. Now and then, attempts were made to bridge the gap between the two disciplines by reducing the rules of statics to the laws of Aristotelian dynamics (Physics V, 7), as e.g., in the science of weights developed in the school of Jordanus Nemorarius (13th c.). But these attempts were by no means successful. A short revival of this tactics in the middle of the 16th c. proved to be theoretically unproductive as well.

In the second half of the 16th c., a different approach emerged within which statics assumed the role of the theoretical foundation of dynamics. Now, the law of inverse proportionality (of weights and arms on scales in equilibrium) was applied to the movements of the so called "simple machines" (lever, wheel and axle, compound pulley, inclined plane, wedge and screw). The emergence of this approach marked the turning point in the development of theoretical mechanics that from that time on has got as its main objective the description of motion in mathematical terms.

2. Practical mechanics in antiquity

In techniques, in contrast to nature, the opposition between motion and rest is not absolute. A key example is the wheel which while rotating around the fixed axle exhibits both of the conflicting features. Describing

its motion, the author of the pseudo-Aristotelian "Mechanical Problems" wrote: "it is a very great marvel that contraries should be present together, and the circle is made up of contraries. For to begin with, it is formed by motion and rest, things which are by nature opposed to one another." [1, 847b 18-21].

"Mechanical problems" (3rd c. BC) is the earliest surviving work on practical mechanics, being at the origin of a series of special treatises on the subject including: the 10th Book of "On architecture" by Vitruvius (1st c. BC), works on mechanics by Heron of Alexandria (1st c. AD) and the 8th Book of "Mathematical Collection" by Pappus of Alexandria (3rd c. AD).

"Mechanical problems" are characterized by two main features (i) the reduction of the majority of technical (artificial) motions to that of the lever, reduced in turn to the balance, and finally to the circular motion; and (ii) the utter disregard for quantitative parameters of these motions. The only exception is question 3 which constitutes an attempt to describe the movement of the lever in terms of inverse proportionality between the forces and the arms of their application. The author asks: "Why is it that . . . the exercise of little force raises great weights with the help of a lever . . . ?" His answer runs as follows. "Does the reason lie in the fact that . . . the lever acts like the beam of a balance with the cord attached below and divided into two unequal parts? . . . As the weight moved is to the weight moving it, so, inversely, is the length of the arm bearing the weight to the length of the arm nearer to the power. The further one is from the fulcrum, the more easily will one raise the weight . . ." [1, 850b1-3].

The fact that the fragment is concise and totally isolated within the treatise suggests that the treatise was not aimed at the quantitative analysis of technical motion. The same is true of the other ancient texts on mechanics in which one finds neither calculations, nor numerical data with regard to that kind of motion; they contain qualitative estimations only. Thus, of the lever it is customarily noticed that the larger the leverage of the driving force application, the greater will be the gain in force. Similarly, of the wheel and the axle it is indicated that the gain in lift increases following the augmentation of the ratio of the diameter of the wheel to the diameter of the axle. Concerning the compound pulley (polyspast), it is noted that the increase in lift is due to the increase in the number of blocks. No specification in terms of numbers is usually given.

One exception is, however, known. This is "Mechanics" by Heron of Alexandria, more specifically, its second, theoretical part [2]. In it, Heron did attempt to quantify the movements of the "simple machines" by having derived the laws of their motions from the rule of equilibrium of weights on scales and using the theory of proportions.

In his work, Heron has established mathematical relations between two kinds of forces. One of them is that of the worker who drives the machine, while the other is the force of gravity that resists its motion. The former force is animal and active, while the latter is mechanical and

passive. While having expressed the relations between the two forces in terms of a mathematical ratio, Heron first ensured their homogeneity by equating the effort of the worker to the weight that could be lifted by him without using technical devices, viz. to 5 talents (about 130 kg.). The identification of the vital force of the worker with that of the weight made them both partaking to a common genus — that of gravity (otherwise, they could not be considered as terms of a mathematical ratio).

Heron successfully reduced the movements of the lever, of the block, and of the wheel and the axle to the law of equilibrium and correctly solved the problems by using the model of two concentric circles. In the case of compound pulley and wedge, the reduction of motions to static conditions has not been, in fact, achieved. While having correctly defined the numerical ratios between the lifting force and the lifted weight (in the case of the compound pulley) and the force of blow and its effect (in the case of the wedge), he did not give any details of the reductive procedure. Dealing with another problem, that of finding the force needed to move a ball up an inclined plane, Heron did apply the proclaimed tactics (using the equilibrium conditions between the parts of the ball on the either sides of its vertical section passing through the point of its tangency with the plane), but he failed to provide the solution of the problem in terms of the specific ratio.

Although Heron's attempts to quantify the motions of the "simple machines" look rather impressive from the standpoint of classical mechanics, in antiquity they found — as far as we know — no response. It is worth to mention, that Pappus while reproducing the descriptions of the "simple machines" borrowed from the practical part of Heron's treatise, totally neglected the material of its theoretical (mathematical) part.

All in all, the contents of the surviving sources testify that the idea of mathematical treatment of technical motions was alien to ancient mechanics. The same can be said about its medieval offspring.

3. Practical mechanics in the 16th century

Fundamentally different in this respect was the practical mechanics of the second half of the 16th c. Treatises compiled at that time paid a considerable attention to the mathematical aspects of the motions of technical devices. This tendency culminated in the early treatise "Mechanics" by Galileo (about 1593). In it Galileo exposed methods for calculating the ratios of forces for all of the "simple machines", based on the law of equilibrium of weights [3].

Remarkable is, that this novel approach to the description of technical motion has originated not in the work by a theorist. A prominent role in its formation was played by G. del Monte, whose practical manual "Mechanica" was published in 1577, some fifteen years before Galileo started his scientific carrier. Beside the theorists, like Galileo and G. Benedetti, the manual of del Monte has strongly influenced more practically oriented

authors as, for example, B. Lorini ("On Fortifications", 1593) and B. Baldi (Commentary on "Mechanical Problems", 1621). The application of quantitative estimations in practical mechanics seems to go back to Leonardo da Vinci.

Now, the following question arises: what changes occurred in practical mechanics in the 16th century that might have triggered the birth of the idea of mathematizing of technical movements?

In order to answer it, let us turn to the hoisting machines. The main feature of ancient and medieval hoists was their reliance on muscular power. It was either a manual effort applied to ropes, levers, wheels, pulleys, etc., or a foot effort applied to treadwheels by workers walking from step to step. Within such a practice, it was hardly possible to produce a movement obeying strict numerical ratios. The first hindrance was the above-mentioned heterogeneity of the forces: that of the human power setting the hoists in motion, and that of the mechanical force of gravity resisting it. To establish a mathematical relation, one of the forces must have been first identified with the other (in one way or another). In most cases, it was the mechanical force that was treated as the animal one. Within this practice, relations between the forces could be described in qualitative terms only, that is, "greater than", "less than", or "equal".

The next hindrance was — to use a modern parlance — a non-additivity of animal forces and consequently of the weights (as reduced to them). The joint action of the workers, e.g., pulling a weight, was greater than the sum of their individual efforts (this property, odd as it seems from the viewpoint of classical mechanic, was repeatedly emphasized by pre-classical authors) [4]. The non-additivity of manual forces can be in part explained by the fact that while lifting a heavy load, the workers try to maximize efforts and synchronize actions, rather than making them smooth and step by step cumulative (which is a prerequisite for mathematical description of motion).

The situation changed in the 15th-16th c. with the arrival of hoists equipped with counterweights. The practical value of these devices consisted in that they allowed a previously balanced load to be lifted by a tiny effort ("infinitesimally" small with respect to the load). In addition, the use of such devices permitted to reduce the size of the hoists which allowed them to be used within the narrow building sites of towns and in harbors.

The theoretical value of these machines — and this is what we are concerned about in this paper — consisted in that in their use both obstacles on the way of mathematization of motion have been eliminated: (i) the heterogeneity of forces involved and (ii) the alleged superiority of the joint force over the sum of its parts. In hoists with counterweight both forces — driving and resisting (the counterweight) — were of the same genus, so that the necessary condition for their comparison in terms of numerical ratio has been now fulfilled. Since gravity (or rather, weight) is additive, the equivalence of the force and the sum of its parts, has been

ascertained as well. In addition, the use of the hoists with counterweights suggested the idea of reduction of their motion to the static condition of equilibrium, the solution of which — in terms of inverse proportionality of forces and arms — has been known from the times of Archimedes.

Acknowledgments

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 15-03-00218a).

References

1. *Aristotle*. *Mechanica* // *The Works of Aristotle*. Vol. 6. / W.D. Ross (ed.). — London, Clarendon Press, 1913.
2. *Héron d'Alexandrie*. *Les mécaniques ou l'élèveur* / Carra de Vaux (trad. et publ.). — Paris, Imprimerie nationale, 1894.
3. *Galileo Galilei*. *Mechanics* // *Galileo Galilei. Selected Works*. Vol. 2. — M.: Nauka, 1964. — P. 5–38. (In Russian).
4. *Zaytsev E.A.* *The Origins of Theoretical Mechanics (Antiquity, Middle Ages and the Beginning of the Modern Times)* // *S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology. Annual Scientific Conference 2015*. Vol. 1. — M.: Lenand, 2015. — P. 132–141. (In Russian).

Probabilistic algorithms of constructing numerical solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations

Ya. I. Belopolskaya¹, A.O. Stepanova¹

¹ *Department of Mathematics,
St Petersburg University of Architecture and Civil Engineering,
2-ya Krasnoarmejskaja str. 4 and POMI RAN, nab. Fontanka 27,
St. Petersburg, Russia*

Abstract. In this paper we have two main goals. One of them is to construct stochastic processes associated with a class of systems of semilinear parabolic equations which allow to obtain a probabilistic representation of a solution to the Cauchy problem for a system from this class. The second goal is to reduce the Cauchy problem solution to a closed system of stochastic relations, prove the existence and uniqueness theorem for this system and apply it to develop a numerical algorithm to get a required solution of the problem under consideration.

Keywords: semilinear parabolic equations, Cauchy problem, diffusion processes, Markov chains, probabilistic representations, numerical solutions.

1. Introduction

Systems of the second order parabolic equations arise as mathematical models of various phenomena in physics, chemistry, biology, economics and finance and other fields. In some cases one can find that there exist stochastic processes associated with them (actually, not merely diffusion processes). This allows to interpret these systems as systems of forward or backward Kolmogorov equations for these processes. This interpretation not only reveals intrinsic links between macro and micro processes but also allows to develop new effective algorithms of numerical solution of the considered parabolic system.

In this paper we consider the backward Cauchy problem for a system of semilinear and quasilinear parabolic equations of the form

$$\frac{\partial u^m}{\partial s} + \mathcal{L}_m^u u^m + [Q^u u]^m = 0, \quad u^m(T, x) = u_0^m(x) \quad m = 1, \dots, d_1, \quad (1)$$

with a bounded smooth "initial" function $u_0(x) \in R^{d_1}, x \in R^d$. Here d, d_1 are fixed integers, $\mathcal{L}_m^v u^m = \langle a^m, \nabla u^m \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr} A^m \nabla^2 u^m [A^m]^*$ and the matrix $Q^u = (q_{ml}(x, u))$ possesses the properties of a Q -matrix :

- 1) $q_{ml}(x, u)$ is uniformly bounded in $x \in R^d$ and has polylinear growth in $u \in R^{d_1}$ for fixed $l, m \in V = \{1, 2, \dots, d_1\}$;
- 2) $q_{ml}(x, u) \geq 0$ for any $x \in R^d, u \in R^{d_1}$ and $l \neq m$;

$$3) q_{mm}(x, u) = -\sum_{l \neq m} q_{ml}(x, u) \text{ for any } x \in R^d, u \in R^{d_1}, m \in V.$$

We aim first to construct stochastic processes which allow to obtain a probabilistic representation of a classical solution of the Cauchy problem (1) and apply this representation to construct a numerical approximation of the solution. Then we construct stochastic processes associated with a viscosity solution of the Cauchy problem (1) construct a numerical approximation of the solution.

2. Probabilistic representation of a classical solution of the Cauchy problem for a system of semilinear PDEs

Let (Ω, \mathcal{F}, P) be a given probability space, $w(t) \in R^d$ be a Wiener process and $\gamma(t)$ be a Markov chain with the generator Q , defined on this space. Consider a system of relations including a stochastic differential equation (SDE) with respect to a process $\xi(t) \in R^d$

$$d\xi(t) = a^u(\xi(t), \gamma(t))dt + A^u(\xi(t), \gamma(t))dw(t), \xi(s) = x, \gamma(s) = m, \quad (2)$$

where $\gamma(t)$ is the Markov chain with the transition probability

$$P\{\gamma(t + \Delta t) = l | \gamma(t) = m, \xi(\theta), \gamma(\theta), \theta \leq t\} = q_{ml}^u(\xi(t))\Delta t + o(\Delta t), \quad (3)$$

when $l \neq m$ and a relation

$$u(s, x) = E[u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))]. \quad (4)$$

Here $a : R^d \times V \times R^{d_1} \rightarrow R^d, A : R^d \times V \times R^{d_1} \rightarrow R^d \otimes R^d$ and we use notations of the form $a^u(x, m) \equiv a(x, m, u(x, m))$.

To construct a probabilistic representation of the classical solution to the Cauchy problem (1) we need an alternative representation of the Markov chain $\gamma(t)$ via stochastic integral with respect to a random Poisson measures $p(dz, dt)$.

To describe this representation for fixed $x \in R^d, v \in R^{d_1}$ we consider a random Poisson measure $p(dt, dz)$ defined on the space $\Omega \times [0, T] \times G$, where $G \subset R_+^n$. Next we choose a set of the consecutive left-closed, right-open intervals $\Delta_{lm}(x, v)$ covering G and having the length $q_{lm}(x, v) = q_{lm}^v(x)$ and let $Ep(dt, dz) = dt dz$, where dz is the Lebesgue measure.

At the end define a scalar function $g^{x,v}(m, z)$ by relations $g^{x,v}(m, z) = m - l$, when $z \in \Delta_{lm}(x, v)$, and 0 otherwise or $g^{x,v}(m, z) = \sum_{m=1}^M (m - l)I_{\{z \in \Delta_{lm}(x, v)\}}$. Then a stochastic differential of the Markov process $\gamma(t)$ with the transition probability (2) has the form

$$d\gamma(t) = \int_G g^u(\xi(t), \gamma(t-), z)p(dt, dz), \quad \gamma(s) = m, \dots \quad (5)$$

It should be mentioned that relations (2), (2), (2) make a closed system. To find a solution to this system we need some conditions on its coefficients.

Condition C 1. Coefficients $a^u(x, m), A^u(x, m)$ of SDE (2) are Lipschitz continuous in x and u , have a sublinear growth in x and polylinear growth in u for fixed m as well as the matrix $Q^u(x)$ is.

Theorem 1. Assume that for each $m \in V$ there exists a unique classical solution $u(s, x, m)$ of the Cauchy problem (1) and for this u_m coefficients of SDE (2) and (2) and the matrix $Q^u(X)$ satisfy **C 1**. Then there exists a unique solution of the system (2), (2) and the function $u(s, x, m)$ admits the representation (2).

Let us state conditions to ensure the existence and uniqueness of a solution of the system (2), (2),(2) and the function $u(s, x, m)$ given by (2) is a unique classical solution of the Cauchy problem (1).

We say that a triple $(\xi_{s,x}(t), \gamma_{s,m}(t), u(s, x, m))$ satisfies the system (2), (2), (2) if $(\xi_{s,x}(t), \gamma_{s,m}(t))$ is a two-component \mathcal{F}_t -adapted process such that

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x + \int_s^t a^u(\xi(\theta), \gamma(\theta))dt + \int_s^t A^u(\xi(\theta), \gamma(\theta))dw(\theta), \\ \gamma(t) &= m + \int_s^t \int_R g^u(\xi(\theta), \gamma(\theta), z)p(d\theta, dz), \end{aligned}$$

hold with probability 1 and $u(s, x, m)$ given by (2) are bounded Lipschitz continuous in z functions defined on $[0, T] \times R^d \times V$.

Condition C 2. Assume that **C 1** holds and $a(x, v, m), A(x, v, m), Q(x, v)$ are k -times differentiable in x and v , while $u_{0,m}(x)$ are bounded and k - times differentiable for each $m \in V$.

Theorem 2. Assume that **C 2** holds for $k = 1$. Then there exists an interval $[T_1, T] \subset [0, T]$ such that for all $s \in [T_1, T]$ there exists a unique solution of the system (2),(2), (2).

Theorem 3. Assume that **C 2** holds for $k = 2$. Then there exists an interval $[T_1, T] \subset [0, T]$, Then there exists an interval such that for all $s \in [T_2, T]$, $T_2 \leq T_1$, there exists a unique solution of the system (2),(2), (2) and $u(s, x)$ given by (2) is the unique classical solution of (1).

To prove the existence of a solution to (2), (2), (2) we construct successive approximations

$$\begin{aligned} \xi^0(\theta) &= x, \gamma^0(\theta) = m, u_1(\theta, x, m) = u_0^m(x), \\ \xi^1(t) &= x + \int_s^t a(\xi^1(\theta), \gamma^1(\theta), u_1(\theta, \xi^1(\theta), \gamma^1(\theta)))d\theta, \\ &+ \int_s^t A(\xi^1(\theta), \gamma^1(\theta), u_1(\theta, \xi^1(\theta), \gamma^1(\theta)))dw(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^1(t) &= m + \int_s^t \int_R g(\xi_1(\theta), u_1(\theta, \xi^1(\theta)), \gamma^1(\theta), z) p(d\theta, dz), \\ u_2^m(s, x) &= E[u_0^m(\xi_{s,x}^1(T), \gamma_{s,m}^1(T))]. \end{aligned}$$

We continue the recursive procedure to derive equations for processes $\xi_{s,x}^n(t), \gamma_{s,m}^n(t)$ and functions $u_n^m(s, x)$. We can prove under the above conditions [2] that $\xi_{s,x}^n(t), \gamma_{s,m}^n(t)$ converge in the square mean sense to solutions $\xi_{s,x}(t)$, and $\gamma_{s,m}(t)$ of SDE (2) and (2), while functions $u_n^m(s, x)$ for each $s \in (T_2, t]$ uniformly in x converge to a bounded Lipschitz continuous function $u^m(s, x)$.

Linear systems of the form (1) with coefficients $A^u(x) = A(x), a^u(x) = a(x), q^u(x) = q$ were studied in [1], where probabilistic representations of a classical solution to the corresponding linear system were derived. These results were extended to nonlinear systems in [2] and this allows to use the representation (2) of the classical solution of the Cauchy problem (1) to obtain numerical results.

Let $s = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T, \Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{T-s}{n}, \zeta \in \{-1, 1\}$ $P(\zeta = -1) = P(\zeta = 1) = \frac{1}{2}$. Applying the explicit Euler scheme, iteration process and the simplest approximation of a random variable $w(t + \Delta t) - w(t)$ by a random variable $\kappa = \zeta\sqrt{\Delta t}$, we develop an explicit method of solution to (1)

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\theta, x, m) &= u_0(x, m), \bar{\xi}^0(\theta) = x, \bar{\gamma}^0(\theta) = m, \quad \theta \in [s, T], \\ \bar{\xi}^1(t_{k+1}) &= x + a(x, m, \bar{u}_1(t_{k+1}, x, m))\Delta t \\ &\quad + A(x, m, \bar{u}_1(t_{k+1}, x, m))\zeta\sqrt{\Delta t}, \\ \bar{\gamma}(t_{k+1}) &= l + \int_R g(m, z) p(\bar{u}^1(t_{k+1}, x, m), \Delta t, dz), \\ \bar{u}(t_k, x, m) &= E\bar{u}(t_{k+1}, \bar{\xi}_{t_k,x}(t_{k+1}), \bar{\gamma}_{t_k,l}(t_{k+1})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M [\bar{u}(t_{k+1}, x + \tilde{a}_k \Delta t + \tilde{A}_k \sqrt{\Delta t}, j) + \bar{u}(t_{k+1}, x + \tilde{a}_k \Delta t - \tilde{A}_k \sqrt{\Delta t}, j)] q_{m,j}^{\bar{u}} \Delta t, \end{aligned}$$

where $\tilde{a}_k = a(\xi(t_k), \bar{u}(t_{k+1}, \xi(t_k), \gamma(t_k))), \tilde{A}_k = A(\xi(t_k), \bar{u}(t_{k+1}, \xi(t_k), \gamma(t_k)))$. Since the two component process $(\xi(\theta), \gamma(\theta)) \in R^d \times V$ is a Markov process, we know that the relation

$$u(s, x, m) = Eu_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T)) = U(s, T)u_0(x, m) \tag{6}$$

gives rise to a nonlinear evolution family $U(s, T)$. Set

$$\bar{U}(t_k, t_{k+1}u = \bar{u}(t_k, x, m) = E\bar{u}(t_{k+1}, \bar{\xi}_{t_k,x}(t_{k+1}), \bar{\gamma}_{t_k,m}(t_{k+1}))$$

and note that similar to the linear case [3], under **C 2** condition we get an estimate

$$\sup_x |u_m(t_k, x) - \bar{u}_m(t_k, x)| \leq C(\Delta t)^2.$$

This results (see [4]) that one can approximate the evolution family $U(s, t)$ defined by (2) using a (nonevolution) family

$$V_n(s, T)u_0(x, m) = \prod_{k=1}^n \bar{U}(t_{k-1}, t_k)u_0(x, m).$$

3. Conclusions

We have derived probabilistic representations of classical solutions of the Cauchy problem for a class of semilinear parabolic equations. These representations are used to construct an explicit algorithm for obtaining a numerical solution to the considered Cauchy problem.

Acknowledgments

Financial support of RSF grant No 17-11-01136 is gratefully acknowledged.

References

1. *Yin G., Zhu C.* Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications. — Springer, 2010.
2. *Belopolskaya Ya. I.* Probabilistic models of conservation and balance laws with switching regimes // Zap. nauchn. sem. POMI. Probability and statistics. 24. — 2016. — Vol. 454. — P. 5–42. (In Russian)
3. *Mao X., Truman A., Yuan C.* Euler-Maruyama approximations in mean-reverting stochastic volatility model under regime-switching // J. Appl. Math. Stoch. Anal. — 2006. — Vol. 2006. — Article ID 80967.
4. *Belopolskaya Ya. I., Nemchenko E. I.* Probabilistic representations and numerical algorithms of constructing classical and viscosity solutions of the Cauchy problem for quasilinear parabolic systems // Zap. nauchn. sem. POMI. Probability and statistics. 23. — 2015. — Vol. 442. — P. 18–47. (In Russian)

UDC 519.248, 517.929

Analytic-Numerical Investigation of the Dual Risk Model with Investments: Survival Probability Functions as the Solutions of Singular Problems for Integro-Differential Equations

T. A. Belkina*, N. B. Konyukhova†, B. V. Slavko‡

* *Central Economics and Mathematics Institute of RAS,
Nakhimovsky prosp. 47, Moscow, 117418, Russia*

† *Dorodnicyn Computing Center of RAS FRC CSC of RAS,
Vavilov str. 40, Moscow, 119333, Russia*

‡ *Numerical Technologies Ltd.,
Yaltinskaya str. 5b, Kiev, 02099, Ukraine*

Abstract. We study the life annuity insurance model when simple investment strategies (SISs) of the two types are used: risky investments and risk-free ones. According to a SIS of the first type, the insurance company invests a constant positive part of its surplus into a risky asset while the remaining part is invested into a risk-free asset. A risk-free SIS means that the whole surplus is invested into a risk-free asset. We formulate and study some associated singular problems for linear integro-differential equations (IDEs). For the case of exponential distribution of revenue sizes, we state that survival probabilities as the functions of the initial surplus (IS) are unique solutions of the corresponding problems. Using the results of computational experiments, we conclude that in the region of small sizes of IS the risky SIS may be more effective tool for increasing of the survival probability than risk-free one.

Keywords: survival probability, dual risk model, risky and risk-free investments, integro-differential equations, singular problems.

1. Introduction

We consider the life annuity insurance model [1], where the surplus of a company (in the absence of investments) is of the form

$$R_t = u - ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Here R_t is the surplus of a company at time $t \geq 0$; u is the IS, $c > 0$ is the life annuity rate (or the pension payments per unit of time), assumed to be deterministic and fixed. $N(t)$ is a homogeneous Poisson process with intensity $\lambda > 0$ that, for any $t > 0$, determines the number of random revenues up to the time t ; Z_k ($k = 1, 2, \dots$) are independent identically distributed random variables with a distribution function $F(z)$ ($F(0) = 0$, $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$) that determine the revenue sizes and are assumed to be independent of $N(t)$.

The considered insurance model is dual to the classical non-life collective risk model (well-known as the Cramér-Lundberg model [1]). In comparison with the classical model, the circumstances in the dual model are reversed: the components of the insurance risk process obtain opposite signs, so that jumps in the dual model are positive, while the deterministic component becomes decreasing (due to pension payments). The jumps of the process determine the revenue sizes; these revenues arise at the moments of the death of policyholders. The considered model is also called "dual risk model" [2].

Let a fixed part α of the surplus be continuously invested into risky asset with price S_t following the geometric Brownian motion

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t, \quad t \geq 0,$$

where μ is the stock return rate, σ is the volatility, w_t is a standard Brownian motion independent of $N(t)$ and Z_i 's. The rest part $(1 - \alpha)$ of the surplus is invested in a risk-free asset which evolves as $dB_t = rB_t dt$, $t \geq 0$, where $r > 0$ is the interest rate.

Then the resulting surplus process X_t is governed by the equation

$$dX_t = \alpha(\mu - r)X_t dt + rX_t dt + \alpha\sigma X_t dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

with the initial condition $X_0 = u$, where R_t is defined by (1).

If $0 < \alpha \leq 1$ then there is a risky SIS, and if $\alpha = 0$ then we have the risk-free SIS.

Remark 1 *The case $\alpha > 0$ is equivalent to the case when whole of the surplus is invested into risky asset with modified parameters $\mu_\alpha = \alpha\mu + (1 - \alpha)r$, $\sigma_\alpha = \alpha\sigma$. Then, for the corresponding surplus process, the equation (1) is fulfilled with $\alpha = 1$ and μ_α , σ_α instead of μ and σ respectively:*

$$dX_t = \mu_\alpha X_t dt + \sigma_\alpha X_t dw_t + dR_t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

For the case $\alpha = 0$, we define $\mu_0 = r$, $\sigma_0 = 0$, and the equations (1) and (1) have the same form:

$$dX_t = r X_t dt + dR_t, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Denote by $\varphi(u)$ the survival probability (SP): $\varphi(u) = \mathbf{P}(X_t \geq 0, t \geq 0)$. Then $\Psi(u) = 1 - \varphi(u)$ is the ruin probability (RP).

Let $\varphi_0(u) = \mathbf{P}(R_t \geq 0, t \geq 0)$ be the SP for the process (1) and $\Psi_0(u) = 1 - \varphi_0(u)$ be the corresponding RP (in the absence of investments). In the case of exponential distribution of revenue sizes, namely when

$$F(z) = 1 - \exp(-z/m), \quad m > 0, \quad (5)$$

and if the safety loading is positive, i.e., the inequality $\lambda m > c$ is valid, it is easy to show that $\Psi_0(u) = \exp(-(\lambda m - c)u/(mc))$.

Theorem 1 [3] *For the process (1), let $F(z)$ be defined by (1), $m > 0$, $\sigma_\alpha^2 > 0$, $\mu_\alpha > 0$, $\beta := 2\mu_\alpha/\sigma_\alpha^2 - 1$. Then: (1) if $\beta > 0$ then $\Psi(u) = Ku^{-\beta}(1 + o(1))$, $u \rightarrow \infty$, for some constant $K > 0$; (2) if $\beta \leq 0$ then $\Psi(u) = 1$, for any $u \geq 0$.*

This statement in combination with the exponential representation in corresponding model without investments leads to the conclusion that investment of the constant part of the surplus into risky assets can impair the insurers solvency at least in the region of large values of IS.

Main goal of our paper is to identify the impact of risky SISs on the solvency in comparison to the effect of risk-free SIS in the dual risk model for all possible IS values. For the case of risky investments, some results of given paper (along with other ones) are briefly represented in [5].

2. Main results

2.1. Preliminary propositions. For $\alpha \geq 0$, we will consider the process $X_t = X_t^\alpha$ defined by (1) with initial state $X_0 = u$. Recall at first that the infinitesimal generator \mathcal{A}^α of the process X_t^α has the form

$$(\mathcal{A}^\alpha f)(u) = \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 u^2 f''(u) + f'(u)(\mu_\alpha u - c) - \lambda f(u) + \lambda \int_0^\infty f(u+z) dF(z), \tag{6}$$

for any function $f(u)$ from a certain subclass of the space of real-valued, continuously differentiable (on some intervals) functions; more precisely, in the case $\alpha > 0$ we deal with $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ of twice continuously differentiable on $(0, \infty)$ functions.

For the case $\alpha > 0$, it is emphasized in [3] that the main difficulty in deriving the corresponding IDE

$$(\mathcal{A}^\alpha \varphi)(u) = 0, \quad u > 0, \tag{7}$$

is to prove the smoothness of the SP $\varphi(u) = \varphi_\alpha(u)$ of the process X_t^α . In this paper we apply the approach based on sufficiency principle [4] which allows us to avoid the a priori proof of the smoothness of the SP on the corresponding interval as well as the justification of the boundary conditions at infinity (note that, for $\alpha = 0$, the SP is not smooth on $(0, \infty)$ in general case). We apply this approach to the case $\alpha > 0$ as well as to the case $\alpha = 0$.

Definition 1 *Let \mathcal{K} be the class of functions $\varphi(u)$ belonging to $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ and satisfying conditions*

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 1. \tag{8}$$

Denote also by \mathcal{L} the class of functions $\varphi(u)$ defined on $[0, \infty)$, continuously differentiable on $(0, c/r)$ and satisfying conditions

$$\varphi(0) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow c/r-0} \varphi(u) = 1, \quad \varphi(u) = 1, \quad u \geq c/r. \tag{9}$$

For the proof of the following lemmas, we use the approach of [4].

Lemma 1 *Let all the parameters in (2) be positive numbers and the inequality*

$$2\mu_\alpha > \sigma_\alpha^2 \tag{10}$$

be fulfilled. Suppose IDE (2) has a solution $\varphi \in \mathcal{K}$. Then, for arbitrary $u \geq 0$, $\varphi(u)$ is the SP for the process (1) with initial state $X_0 = u$.¹

Lemma 2 *For $\alpha = 0$, let in (2) all the parameters be fixed numbers, where $c > 0$, $\lambda > 0$, $\mu_0 = r > 0$, $\sigma_0 = 0$. Let the function $\varphi \in \mathcal{L}$ be satisfying IDE (2) for all $u > 0$ (perhaps, with exception of the point c/r). Then, for arbitrary $u \geq 0$, $\varphi(u)$ is the SP for the process (1) with initial state $X_0 = u$.*

2.2. Main results for the case of exponential distribution of revenue sizes. Using the results formulated above and some preliminary investigations of the corresponding singular problems for IDE (2) with $F(z)$ of the form (1), we establish the following statements for the process defined by (1), where $\alpha \geq 0$.

Theorem 2 *For $\alpha > 0$, let $\mu_\alpha > 0$, $\sigma_\alpha \neq 0$ and (2) be satisfied. Then: (I) the SP $\varphi(u)$ of the process (1) with $X_0 = u$ belongs to the class \mathcal{K} and is the unique solution in this class to the singular boundary value IDE problem (2), (2); (II) $\varphi(u)$ may be defined by the formula $\varphi(u) = 1 - \int_u^\infty \psi(s)ds$, where $\psi(u) = \varphi'(u)$ is the solution on \mathbb{R}_+ of the singular problem for ODE:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 u^2 \psi''(u) + (\mu_\alpha u + \sigma_\alpha^2 u - c - \frac{1}{2m}\sigma_\alpha^2 u^2)\psi'(u) + \\ & + (\mu_\alpha - \lambda - \frac{\mu_\alpha u - c}{m})\psi(u) = 0, \quad u > 0, \\ & \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi'(u) = 0, \quad \int_0^\infty \psi(s)ds = 1. \end{aligned}$$

Theorem 3 *For $\alpha = 0$, let $\mu_0 = r > 0$, $\sigma_0 = 0$. Then: (I) the SP $\varphi(u)$ of the process (1) with $X_0 = u$ belongs to the class \mathcal{L} and is the unique solution in this class to the singular IDE problem (2), (2) (it satisfies (2)*

¹For the SP in the case of risky investments, the formulation of Theorem 2 in [5] contains a mistake: the first condition from (2) is absent therein.

in the sense of Lemma 2); (II) $\varphi(u)$ on the interval $[0, c/r)$ has the form

$$\varphi(u) = 1 - \int_u^{c/r} \psi(s) ds, \text{ where } \psi(u), u \in [0, c/r), \text{ is defined by the formula}$$

$$\psi(u) = \left[\int_0^{c/r} (c/r - u)^{\lambda/r-1} \exp(u/m) du \right]^{-1} (c/r - u)^{\lambda/r-1} \exp(u/m).$$

Let us remark that, for $\alpha = 0$ and $\lambda \leq r$, the SP is *non-smooth viscosity solution* of the IDE (2) (concept of the *viscosity solutions* is applied to analogous model in [6]).

3. Conclusions

The studies given in previous sections allow us to suggest computationally simple and theoretically justified algorithms for numerical calculation of the SP in the considered models with SISs. We use IDE approach and so called sufficiency principle based on verification arguments [4], which state that the solutions of certain singular problems for IDEs define the corresponding SPs. Computational experiments show that, for small values of IS, risky SIS with moderate volatility can be more effective way to minimize the probability of bankruptcy although risk-free investment provides the survival with probability 1 for IS greater than c/r .

References

1. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. — Springer, 1991.
2. *Albrecher H., Badescu A., Landriault D.* On the dual risk model with tax payments // Insurance Math. Econom. — 2008. — Vol. 42. — P. 1086–1094.
3. *Kabanov Yu., Pergamenschikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous: the case of negative risk sums // Finance Stochast. — 2016. — Vol. 20, no. 2. — P. 355–379.
4. *Belkina T.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability // Markov Processes Relat. Fields. — 2014. — Vol. 20. — P. 505–525.
5. *Belkina T.A., Konyukhova N.B., Slavko B.V.* Survival probability in the life annuity insurance model with stochastic return on investments // CEUR-WS — 2016. — Vol. 1726. — P. 1–12 (<http://ceur-ws.org/Vol-1726/>).
6. *Belkina T., Kabanov Yu.* Viscosity solutions of integro-differential equations for nonruin probabilities // Theory Probab. Appl. — 2016. — Vol. 60, no. 4. — P. 671–679.

Алгоритм точного вычисления распределений разделимых статистик и его применения

А.М. Зубков*, М.В. Филина*

* Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Аннотация. Описан вычислительно эффективный алгоритм точного вычисления распределений делимых статистик. Он был применен для вычисления распределений статистики Пирсона и некоторых статистик в полиномиальных схемах размещения частиц по ячейкам. Проведено сравнение полученных точных распределений для конечных выборок с соответствующими предельными распределениями.

Ключевые слова: точные распределения статистик, точные вычисления распределений.

1. Введение

Для проверки статистических гипотез используются различные критерии, распределения статистик которых обычно аппроксимируются стандартными распределениями из соответствующих предельных теорем. Но вопрос о точности таких аппроксимаций в случаях небольших объемов выборок изучен недостаточно. Кроме того, в некоторых прикладных задачах необходимо обеспечить малое значение вероятности ошибки первого рода, и в этом случае требуются точные оценки хвостов распределений. Точное вычисление распределений во многих случаях сопряжено с высокой вычислительной сложностью или большим объемом необходимой оперативной памяти.

Данная задача исследовалась различными авторами. Например, для вычисления функции распределения статистики Пирсона в [1] использовались производящие функции, а в [2] — быстрое преобразование Фурье. Методы вычисления распределений делимых статистик (также использующие производящие функции) были предложены в [3]. В данной работе описан вычислительно эффективный алгоритм расчета точных распределений делимых статистик в полиномиальной схеме наблюдений. Этот алгоритм основан на применении неоднородных по времени цепей Маркова.

2. Основная часть

Разделимыми статистиками называются случайные величины следующего вида:

$$\zeta = \sum_{j=1}^N f_j(\nu_j(T, \mathbf{p})) \quad (1)$$

где $f_1(x), \dots, f_N(x)$ — заданные функции, а $\nu_1(T, \mathbf{p}), \dots, \nu_N(T, \mathbf{p})$ — абсолютные частоты исходов $1, \dots, N$ в T испытаниях по полиномиальной схеме с вектором \mathbf{p} вероятностей исходов.

Например, если $f_j(x) = \frac{(x - Tq_j)^2}{Tq_j}$ ($j = 1, \dots, N$), то

$$\zeta = \sum_{j=1}^N f_j(\nu_j) = \sum_{j=1}^N \frac{(\nu_j - Tq_j)^2}{Tq_j} \quad (2)$$

является статистикой Пирсона; если $\mathbf{q} = \text{const}$, $\min\{q_1, \dots, q_N\} > 0$ и $T \rightarrow \infty$, то при $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ распределения ζ сходятся к распределению хи-квадрат с $N - 1$ степенями свободы, а в схеме серий с $\mathbf{q} = \text{const}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{a}/\sqrt{T}$ распределения ζ аппроксимируются нецентральными распределениями хи-квадрат.

При небольших значениях T и N таблицы распределения разделимой статистики (2) можно составлять с помощью ЭВМ, перебирая все C_{T+N-1}^{N-1} возможных значений вектора частот (ν_1, \dots, ν_N) : если $x_0 = -\infty < x_1 < \dots < x_M = \infty$, то при любом $m = 1, \dots, M$

$$\mathbf{P} \left\{ x_{m-1} < \sum_{j=1}^N f_j(\nu_j) \leq x_m \right\} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \geq 0, \\ k_1 + \dots + k_N = T \\ x_{m-1} < \sum_{j=1}^N f_j(k_j) \leq x_m}} \frac{T!}{k_1! \dots k_N!} \prod_{j=1}^N p_j^{k_j}.$$

Но вычислительная сложность такого перебора ограничивает применимость этого метода только небольшими значениями параметров N и T .

Для построения более эффективного алгоритма вычисления точных распределений разделимых статистик рассмотрим неоднородную по времени конечную двумерную цепь Маркова $\zeta_n = (\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)})$, $n = 0, 1, \dots, N$, с множеством состояний $\{0, \dots, N\} \times S$, где S — множество всех возможных значений $\sum_{j=1}^n f_j(k_j)$, $n = 1, \dots, N$, $k_1, \dots, k_N \geq 0$, $k_1 + \dots + k_N = T$.

Таким образом,

$$\left(\zeta_0^{(1)}, \zeta_0^{(2)} \right) = (0, 0),$$

$$\left(\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)} \right) = \left(\sum_{j=1}^n \nu_j, \sum_{j=1}^n f_j(\nu_j(T, \mathbf{p})) \right), \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3)$$

$$\left(\zeta_N^{(1)}, \zeta_N^{(2)} \right) = (T, \zeta(T, N)).$$

Тогда $\mathbf{P}\{\zeta_0 = (0, 0)\} = 1$ и переходные вероятности цепи (2) имеют вид

$$p_{n-1}((u, v), (x, y)) = \mathbf{P}\{\zeta_n = (x, y) | \zeta_{n-1} = (u, v)\} = \quad (4)$$

$$= \begin{cases} C_{T-u}^{x-u} \left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{x-u} \left(1 - \frac{p_n}{P_n}\right)^{T-x}, & 0 \leq u \leq x \leq T, y = v + f_n(x - u), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $P_n = \sum_{k=n}^N p_k$, $n = 1, \dots, N$.

Распределение разделимой статистики (2) совпадает с распределением компоненты $\zeta_N^{(2)}$ в цепи Маркова (2).

В общем случае (когда функции $f_j : \{0, 1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ могут принимать произвольные действительные значения) непосредственное вычисление распределения ζ по формулам (2) может оказаться практически невозможным, так как для хранения промежуточных распределений ζ_n требуются массивы объема $O(N \max\{C_{T+k}^k : k = 1, \dots, N-1\})$, что даже при умеренных значениях T и N потребует слишком большого объема оперативной памяти. Достаточный для вычислений объем памяти существенно уменьшается, если все функции f_j — целочисленные и неотрицательные.

Например, при вычислении распределения статистики Пирсона в случае, когда $q_1 = q_2 = \dots = q_N = 1/N$, можно преобразовать формулу (2) к виду

$$X_N^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(\nu_j - T/N)^2}{T/N} = \frac{N}{T} \left(\sum_{j=1}^N \left(\nu_j - \left\langle \frac{T}{N} \right\rangle \right)^2 - N \left(\frac{T}{N} - \left\langle \frac{T}{N} \right\rangle \right)^2 \right), \quad (5)$$

где $\langle x \rangle = [x + \frac{1}{2}]$ обозначает ближайшее целое к x . Тогда все слагаемые суммы $\sum_{j=1}^N (\nu_j - \langle T/N \rangle)^2$ — целые числа, ее максимальное значение не превосходит NT^2 , следовательно, распределение этой суммы можно вычислять по формулам (2), используя память объема $O(NT^3)$, за $O(N^2T^3)$ арифметических операций.

Если функции f_j неотрицательны, то траектории цепи Маркова ζ_n монотонно не убывают по каждой координате. Поэтому при вычислении функции распределения статистики Пирсона в области значений, не превышающих заданное значение M , для сокращения времени вычислений и объема используемой памяти можно не учитывать значения сумм вида $\sum_{j \geq 1} (\nu_j - T/N)^2$, превышающие MT/N . Достаточный объем памяти тогда оценивается величиной $O(MT^2/N)$ при вычислениях по формуле (2).

Несколько примеров конкретных разделимых статистик, к которым применим описанный алгоритм, имеются в [5], [6]. Результаты

точных вычислений распределений статистики Пирсона для различных полиномиальных схем приведены в [7], [8], [9]. Алгоритмы были реализованы в виде программ на языке C++. В частности, для равновероятных схем они позволяют вычислять распределения с числом исходов порядка нескольких сотен, а испытаний — нескольких тысяч.

Алгоритм был применен также для вычисления других статистик в полиномиальных схемах размещения частиц по ячейкам. Например, предельными распределениями числа пустых ячеек $\mu_0(N, T)$ могут быть распределение Пуассона или нормальное распределение в зависимости от предельных соотношений между параметрами N и T (см. [4]). Для вычисления точного распределения числа пустых ячеек можно воспользоваться приведенным выше алгоритмом, рассмотрев статистику $\mu_0(N, T)$ как сумму функций-индикаторов $f_j(\nu_j) = I\{\nu_j = 0\}$, где ν_j — число частиц в j -й ячейке. При $f_j(\nu_j) = I\{\nu_j = r\}$ статистика $\mu_r(N, T)$ представляет число ячеек, в которых находится ровно r частиц, где $r = 0, 1, 2, \dots$

Проведенные вычисления показали, что при некоторых сочетаниях параметров хвосты точных распределений отличаются от хвостов обычно используемых аппроксимаций в несколько раз.

3. Заключение

Предложенный алгоритм позволяет вычислять точные распределения разделимых статистик при конкретных значениях параметров вероятностных схем. Это может быть полезным для уточнений статистических выводов в случаях, когда объем выборки ограничен и критические значения, выбранные по предельному и точному распределениям, существенно различаются. Применение алгоритма не ограничивается приведенными в данной работе статистиками и может быть существенно расширено.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Литература

1. *Holzman G. I., Good I. J.* The Poisson and chi-squared approximation as compared with the true upper-tail probability of Pearson's χ^2 for equiprobable multinomials // *J. Statist. Plann. Inference.* — 1986. — Vol.13, no. 3. — P. 283–295.
2. *Good I. J., Gover T. N., Mitchell G. J.* Exact distributions for χ^2 and for likelihood-ratio statistic for the equiprobable multinomial distribution // *J. Amer. Statist. Assoc.* — 1970. — Vol. 65. — P. 267–283.

3. *Селиванов Б. И.* О вычислении допредельных распределений разделимых статистик полиномиальной схемы // *Дискретная математика*. — 2006. — Т. 18, вып. 3. — С. 85–94.
4. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. — М.: Наука, 1976.
5. *Зубков А. М.* Рекуррентные формулы для распределений функционалов от дискретных случайных величин // *Обозр. прикл. промышл. математики*. — 1996. — Т. 3, вып. 4. — С. 567–573.
6. *Зубков А. М.* Методы расчета распределений сумм случайных величин // *Труды по дискретной математике*. — М.: Физматлит, 2002. — Т. 5. — С. 51–60.
7. *Filina M. V., Zubkov A. M.* Exact computation of Pearson statistics distribution and some experimental results // *Austrian J. Statist.* — 2008. — Vol. 37, no. 1. — P. 129–135.
8. *Filina M. V., Zubkov A. M.* Tail properties of Pearson statistics distributions // *Austrian J. Statist.* — 2011. — Vol. 40, no. 1 & 2. — P. 47–54.
9. *Filina M. V., Zubkov A. M.* Some remarks on the noncentral Pearson statistics distributions // *Computer Data Analysis and Modeling. Proc. XI Int. Conf., Minsk, 2016.* — Publ. center BSU. — P. 155–158.

UDC 519.213.42+519.712

Algorithm of exact computation of divisible statistics distributions and its applications

A.M. Zubkov*, M.V. Filina*

** Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia*

Computationally efficient algorithm realizing exact computation of divisible statistics distributions for multinomial scheme is described. The algorithm is based on the embedded nonhomogeneous Markov chain. It was applied for computation of the Pearson statistics distribution and distributions of some statistics of random allocation of particles into cells. Comparisons of exact numerical values of distribution functions of statistics with usually used approximations from corresponding limit theorems show that exact tail probabilities may be in several times larger than that of approximating distributions.

Keywords: exact distributions of statistics, exact computation of distributions.

UDC 519.21

Integro-local limit theorems for multidimensional compound renewal processes

A. A. Mogulskii*[†]

* *Laboratory of Probability and Mathematical Statistics,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia*

[†] *Department of Probability Theory and Mathematical Statistics,
Novosibirsk State University,
Pirogova str. 2, Novosibirsk, 630090, Russia*

Abstract. We establish integro-local limit theorems for compound renewal processes.

Keywords: compound renewal process, Cramer's condition, large deviations, integro-local limit theorem.

1. Formulation of the problem

Let $(\tau, \zeta), (\tau_1, \zeta_1), (\tau_2, \zeta_2), \dots$ —be a sequence i.i.d. random vectors,

$$\tau > 0, \quad \zeta = (\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)}) \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1.$$

Let

$$T_0 := 0, \quad T_{n+1} := T_n + \tau_{n+1}, \quad \mathbf{Z}_0 := \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}_{n+1} := \mathbf{Z}_n + \zeta_{n+1};$$

let for $t \geq 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : T_k > t\}, \quad \nu(t) := \max\{k \geq 0 : T_k \leq t\}.$$

The compound renewal processes $\mathbf{Z}(t), \mathbf{Y}(t)$ for the sequence $(\tau_j, \zeta_j), j \geq 1$, are defined as (see [1], [2])

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)}, \quad \mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)} = \mathbf{Z}(t) + \zeta_{\eta(t)} \quad t \geq 0.$$

Let the Cramer's moment condition hold:

$[\mathbf{C}_0]$. For some $\delta > 0$

$$\mathbf{E}e^{\delta\tau + \delta|\zeta|} < \infty.$$

For a vector $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ let

$$\Delta[\mathbf{x}] := \prod_{j=1}^d [x_{(d)}, x_{(d)} + \Delta], \quad \Delta = \Delta_T > 0,$$

$\Delta \rightarrow 0$ slowly enough in not lattice case and $\Delta = 1$ in arithmetic case. We study integro-local limit theorems for $\mathbf{Z}(T)$, $\mathbf{Y}(T)$ as $T \rightarrow \infty$, i.e. the exact asymptotics for the probabilities

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(T) \in \Delta[\mathbf{x}]) = ?, \quad \mathbf{P}(\mathbf{Z}(T) \in \Delta[\mathbf{x}]) = ?$$

in the range of normal and large deviations.

This is joint work with E.I. Prokopenko.

2. Deviation (rate) function

For $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda, \mu_{(1)}, \dots, \mu_{(d)}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ let us define

$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}},$$

where $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta} := \mu_{(1)}\zeta_{(1)} + \dots + \mu_{(d)}\zeta_{(d)}$;

$$\mathcal{A}^{\leq 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leq 0\}, \quad \lambda_+ := \sup\{\lambda : \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\}.$$

Then for $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ put

$$A(\boldsymbol{\mu}) := -\sup\{\lambda : (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leq 0}\},$$

where $\sup\{\lambda : \lambda \in \emptyset\} = -\infty$;

$$\hat{A}(\boldsymbol{\mu}) := \max\{A(\boldsymbol{\mu}), \lambda_+\}.$$

Finally, for $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ define deviation (rate) functions $D(\boldsymbol{\alpha})$ and $\hat{D}(\boldsymbol{\alpha})$:

$$D(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - A(\boldsymbol{\mu})\}, \quad \hat{D}(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - \hat{A}(\boldsymbol{\mu})\}.$$

3. The Large Deviation Principle

Definition 1. Process $\{\frac{\mathbf{Z}(T)}{T}\}$ satisfies the large deviation principle (LDP) in \mathbb{R}^d with a good rate function $\hat{D}(\boldsymbol{\alpha})$, if for all sets $B \subset \mathbb{R}^d$

(i)

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}(T)}{T} \in B\right) \leq - \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in [B]} \hat{D}(\boldsymbol{\alpha}),$$

where $[B]$ is closure of B ;

(ii)

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}(T)}{T} \in B\right) \geq - \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in (B)} \hat{D}(\boldsymbol{\alpha}),$$

where $[B]$ is interior of B ;

(iii) the set $\{\alpha \in \mathbb{R}^d : \hat{D}(\alpha) \leq c\}$ is compact for all $c \geq 0$.

Theorem 1 ([2]). Assume

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau \geq T) \geq -\lambda_+.$$

Then process $\{\frac{\mathbf{Z}(T)}{T}\}$ satisfies LDP in \mathbb{R}^d with a good rate function $\hat{D}(\alpha)$, also

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{Z}(T)} = -\hat{A}(\mu).$$

If, in additionally,

$$\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$$

hold, then

$$\hat{A}(\mu) = A(\mu), \quad \hat{D}(\alpha) = D(\alpha),$$

and condition (3) can be omitted.

In case $d = 1$, $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$, Theorem 1 was established in [1].

4. The exact asymptotics in regular case for $\mathbf{Z}(T)$ and $\mathbf{Y}(T)$

Let us define $\mu = \mu(\alpha) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ so that

$$D(\alpha) = \sup_{\mu} \{\mu \alpha - A(\mu)\} = \mu(\alpha) \alpha - A(\mu(\alpha)).$$

Then $(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) := (-A(\mu(\alpha)), \mu(\alpha))$ belongs to the boundary $\partial \mathcal{A}^{\leq 0}$ of the set $\mathcal{A}^{\leq 0}$. Let put

$$\mathfrak{A} := \{\alpha \in \mathbb{R}^d : (\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) \in (\mathcal{A})\}, \quad \mathfrak{C} := \{\alpha \in \mathbb{R}^d : \mu(\alpha) \in (\mathcal{M})\},$$

where

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad \mathcal{M} := \{\mu : \mathbf{E} e^{\mu \zeta} < \infty\}.$$

Put

$$\mathfrak{T} := \{\alpha : \lambda(\alpha) \geq \lambda_+\}.$$

Theorem 2. ([3]) Let

$$\alpha := \frac{\mathbf{x}}{T} \rightarrow \alpha^0 \quad \text{as } T \rightarrow \infty.$$

I. If $\alpha^0 \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{T}$, then

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(T) \in \Delta[\mathbf{x}]) = \frac{\Delta^d}{T^{\frac{d}{2}}} I_{\mathbf{Z}}(\alpha) e^{-TD(\alpha)} (1 + o(1)).$$

II. If $\alpha^0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, then

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(T) \in \Delta[\mathbf{x}]) = \frac{\Delta^d}{T^{\frac{d}{2}}} I_{\mathbf{Y}}(\alpha) e^{-TD(\alpha)} (1 + o(1)),$$

where the continuous functions $I_{\mathbf{Z}}(\alpha)$, $I_{\mathbf{Y}}(\alpha)$ are known in explicit form. Theorem 2 in case $d = 1$ was established in [1].

5. The exact asymptotics in non-regular case for $\mathbf{Z}(T)$

$[\mathbf{F}_\tau]$. For all $t > 0$

$$\mathbf{P}(\tau \geq t) = L(t) e^{-\lambda_+ + ct^\gamma},$$

where $\gamma \in [0, 1)$, $c \in \mathbb{R}$, $L(t) = t^\beta l(t)$ —regularly varying as $t \rightarrow \infty$ function.

Theorem 3. ([3]) Assume $[\mathbf{F}_\tau]$ holds. Let $\kappa := [\frac{1}{1-\gamma}]$; $\alpha^0 \in \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{T})$, $\alpha^0 \neq \mathbf{0}$. Then for $\alpha := \frac{\mathbf{x}}{T} \rightarrow \alpha^0$ we have

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(T) \in \Delta[\mathbf{x}]) =$$

$$\frac{\Delta^d L(T)}{T^{\frac{d(d-1)}{2}}} C(\alpha) e^{-T\hat{D}(\alpha) + \sum_{k=1}^{\kappa} T^{k\gamma - (k-1)} g_k(\alpha)} (1 + o(1)),$$

where the continuous functions $C(\alpha), g_1(\alpha), \dots, g_\kappa(\alpha)$ are known in explicit form.

6. The exact asymptotics of finite-dimensional distributions for $\mathbf{Z}(T)$

Let

$$U_0 = 0, \quad U_1 \rightarrow \infty, \dots, U_m \rightarrow \infty; \quad W_j := U_0 + \dots + U_j.$$

In [3] were found fairly extensive conditions, under which for

$$\alpha_0 := \mathbf{0}, \quad \alpha_j := \frac{\mathbf{x}_j}{U_j} \rightarrow \alpha_j^0, \quad j = 1, \dots, m,$$

holds

$$\mathbf{P}(\cap_{j=1}^m \{\mathbf{Z}(W_j) - \mathbf{Z}(W_{j-1}) \in \Delta_j[\mathbf{x}_j]\}) = \prod_{j=1}^m \frac{\Delta_j^d}{U_j^{\frac{d}{2}}} I_{\mathbf{Z}}(\alpha_{j-1}, \alpha_j) e^{-U_j D(\alpha_j)} (1 + o(1)).$$

In article [1], in case $d = 1$ proposed conditions, under which (6) holds.

References

1. *Borovkov A. A., Mogulskii A. A.*, Integro-local limit theorems for compound renewal processes under Cramer condition. I, II. (to appear).
2. *Mogulskii A. A., Prokopenko E.Í.*, Large deviation principle in phase space of the multidimensional compound renewal processes under Cramer condition. (to appear).
3. *Mogulskii A. A., Prokopenko E.Í.*, Integro-local limit theorems for the multidimensional compound renewal processes under Cramer condition. I, II, III.(to appear).

Оптимальный тест проверки гипотезы об условной независимости в многомерном нормальном распределении

П. А. Колданов*, А. П. Колданов*,
В. А. Калягин*, П.М. Пардалос*[†]

* *Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур,
НИУ Высшая школа экономики, Нижегородский филиал
ул. Б.-Печерская, д.25, Нижний Новгород, Россия*

[†] *Center for Applied Optimization,
University of Florida, USA*

Аннотация. Для проверки гипотезы об условной независимости в многомерном нормальном распределении широко используется тест, основанный на выборочном частном коэффициенте корреляции. В настоящей работе построен равномерно наиболее мощный несмещенный (РНМН) тест структуры Неймана проверки этой гипотезы. Показано, что построенный РНМН тест эквивалентен тесту основанному на выборочном частном коэффициенте корреляции и, тем самым, тест частных корреляций является РНМН тестом проверки условной независимости компонент нормального вектора.

Ключевые слова: условная независимость, экспоненциальные семейства, многомерное нормальное распределение, тесты структуры Немана, равномерно наиболее мощный несмещенный тест.

1. Введение.

Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ — случайный вектор с многомерным нормальным распределением. Частный коэффициент корреляции $\rho_{i,j \bullet N(i,j)}$ между X_i, X_j при заданных $X_k, k \in N(i, j) = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i, j\}$, определяется как корреляция между X_i, X_j в двумерном условном распределении X_i, X_j при заданных $X_k, k \in N(i, j)$. Известно (см. [1], стр. 35), что это распределение является нормальным. Поэтому условная независимость X_i, X_j при заданных $X_k, k \in N(i, j)$, эквивалентна равенству $\rho_{i,j \bullet N(i,j)} = 0$.

Для проверки гипотезы $\rho_{i,j \bullet N(i,j)} = 0$ используется стандартный тест, основанный на выборочном частном коэффициенте корреляции (см. [1], стр. 143). В то же время, насколько известно авторам настоящей работы, неизвестно, является ли стандартный тест равномерно наиболее мощным несмещенным (РНМН). В настоящей работе построен РНМН тест структуры Неймана проверки гипотезы об условной независимости. Доказано, что РНМН тест эквивалентен стандартному. Таким образом, стандартный тест проверки условной независимости является РНМН.

2. Обозначения и постановка задачи.

Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ имеет многомерное нормальное распределение $N(\mu, \Sigma)$, где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ — вектор математических ожиданий, $\Sigma = (\sigma_{i,j})$ — ковариационная матрица $i, j = 1, 2, \dots, N$. Пусть $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, — выборка размера n из распределения вектора X и

$$s_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_i(t) - \bar{x}_i)(x_j(t) - \bar{x}_j),$$

— выборочная ковариация между X_i, X_j , где $\bar{x}_i = (1/n) \sum_{t=1}^n x_i(t)$. Обозначим $S = (s_{i,j})$ — выборочная ковариационная матрица, $\Sigma^{-1} = (\sigma^{i,j})$ — обратная матрица к Σ , $\rho_{i,j \bullet N(i,j)} = \rho^{i,j}$. Задача проверки попарной условной независимости X_i, X_j заключается в проверке гипотезы:

$$h_{i,j} : \rho^{i,j} = 0 \text{ против альтернативы } k_{i,j} : \rho^{i,j} \neq 0. \quad (1)$$

Как показано в ([2], стр. 129) частный коэффициент корреляции между X_i, X_j при заданных $X_k, k \in N(i,j) = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i, j\}$, можно представить через элементы обратной ковариационной матрицы в виде

$$\rho^{i,j} = -\frac{\sigma^{i,j}}{\sqrt{\sigma^{i,i}\sigma^{j,j}}}.$$

Поэтому задача проверки попарной условной независимости (2) может быть сформулирована как задача проверки гипотезы

$$h_{i,j} : \sigma^{i,j} = 0, \text{ против } k_{i,j} : \sigma^{i,j} \neq 0. \quad (2)$$

3. Тесты структуры Неймана.

Для проверки гипотезы (2) будем использовать тесты структуры Неймана (см. [3], стр. 115). Пусть $f(x; \theta)$ — плотность экспоненциального семейства:

$$f(x; \theta) = c(\theta) \exp \left(\sum_{j=1}^M \theta_j T_j(x) \right) m(x).$$

РНМН тест проверки гипотезы

$$h_j : \theta_j = \theta_j^0 \text{ против альтернативы } k_j : \theta_j \neq \theta_j^0,$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_j &= 1 - \mathbf{I}(A_j), \\ A_j &= \{c'_j(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_M) < t_j < c''_j(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_M)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $t_i = T_i(x)$, $i = 1, \dots, M$. Константы c'_j , c''_j определяются из уравнений (см. [3], стр. 120)

$$\int_{c'_j}^{c''_j} f(t_j; \theta_j^0 | T_i = t_i, i = 1, \dots, M; i \neq j) dt_j = 1 - \alpha \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{c'_j} t_j f(t_j; \theta_j^0 | T_i = t_i, i = 1, \dots, M; i \neq j) dt_j + \\ & + \int_{c''_j}^{+\infty} t_j f(t_j; \theta_j^0 | T_i = t_i, i = 1, \dots, M; i \neq j) dt_j = \\ & = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} t_j f(t_j; \theta_j^0 | T_i = t_i, i = 1, \dots, M; i \neq j) dt_j \end{aligned} \quad (5)$$

где $f(t_j; \theta_j^0 | T_i = t_i, i = 1, \dots, M; i \neq j)$ — плотность условного распределения T_j , α — уровень значимости. При этом если $\varphi_j = 1$, то гипотеза h_j отвергается.

4. Равномерно наиболее мощный несмещенный тест для проверки гипотезы об условной независимости.

Как известно (см. [1], стр. 252), совместным распределением $s_{k,l}$, $k, l = 1, 2, \dots, N$, $n > N$, является распределение Уишарта с плотностью:

$$\begin{aligned} f(\{s_{k,l}\}) &= \\ &= \frac{[\det(\sigma^{k,l})]^{n/2} \times [\det(s_{k,l})]^{(n-N-2)/2} \times \exp[-(1/2) \sum_k \sum_l s_{k,l} \sigma^{k,l}]}{2^{(Nn/2)} \times \pi^{N(N-1)/4} \times \Gamma(n/2) \Gamma((n-1)/2) \cdots \Gamma((n-N+1)/2)}, \end{aligned}$$

если матрица $S = (s_{k,l})$ положительно определена, и $f(\{s_{k,l}\}) = 0$ иначе. Функция плотности распределения Уишарта может быть записана следующим образом:

$$f(\{s_{k,l}\}) = C(\{\sigma^{k,l}\}) \exp[-\sigma^{i,j} s_{i,j} - \frac{1}{2} \sum_{(k,l) \neq (i,j); (k,l) \neq (j,i)} s_{k,l} \sigma^{k,l}] m(\{s_{k,l}\}),$$

где

$$C(\{\sigma^{k,l}\}) = c_1^{-1} [\det(\sigma^{k,l})]^{n/2},$$

$$c_1 = 2^{(Nn/2)} \times \pi^{N(N-1)/4} \times \Gamma(n/2) \Gamma((n-1)/2) \cdots \Gamma((n-N+1)/2),$$

$$m(\{s_{k,l}\}) = [\det(s_{k,l})]^{(n-N-2)/2}.$$

В соответствии с (3), (3), (3) РНМН тест проверки гипотезы (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(\{s_{k,l}\}) &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } c'_{i,j}(\{s_{k,l}\}) < s_{i,j} < c''_{i,j}(\{s_{k,l}\}), (k,l) \neq (i,j) \\ 1, & \text{если } s_{i,j} \leq c'_{i,j}(\{s_{k,l}\}) \text{ или } s_{i,j} \geq c''_{i,j}(\{s_{k,l}\}), (k,l) \neq (i,j), \end{cases} \\ &\quad \frac{\int_{I \cap [c'_{i,j}; c''_{i,j}]} [\det(s_{k,l})]^{(n-N-2)/2} ds_{i,j}}{\int_I [\det(s_{k,l})]^{(n-N-2)/2} ds_{i,j}} = 1 - \alpha, \\ &\quad \int_{I \cap (-\infty; c'_{i,j}]} s_{i,j} [\det(s_{k,l})]^{(n-N-2)/2} ds_{i,j} + \\ &\quad + \int_{I \cap [c''_{i,j}; +\infty)} s_{i,j} [\det(s_{k,l})]^{(n-N-2)/2} ds_{i,j} = \\ &\quad = \alpha \int_I s_{i,j} [\det(s_{k,l})]^{(n-N-2)/2} ds_{i,j}, \end{aligned}$$

где I — интервал значений $s_{i,j}$, такой что матрица $S = (s_{k,l})$ положительно определена и α — заданный уровень значимости теста. Если $\varphi_{i,j}(\{s_{k,l}\}) = 1$, то гипотеза $h_{i,j} : \sigma^{i,j} = 0$ отвергается. Подчеркнем условный характер теста $\varphi_{i,j}(\{s_{k,l}\})$, который заключается в том, что пороги $c'_{i,j}, c''_{i,j}$ зависят от значений $s_{k,l}, (k,l) \neq (i,j)$.

В [4] показано, что РНМН тест проверки гипотезы об условной независимости X_i, X_j можно представить в виде:

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} 0, & 2q - 1 < \frac{as_{i,j} - \frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + ac}} < 1 - 2q \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6)$$

где a, b, c определяются, как коэффициенты в представлении $\det(s_{k,l})$ полиномом второй степени относительно $s_{i,j}$, q есть $\frac{\alpha}{2}$ -квантиль бета-распределения $Be(\frac{n-N}{2}, \frac{n-N}{2})$.

5. Стандартный тест.

Хорошо известный тест, основанный на выборочных частных корреляциях $r^{i,j}$, проверки гипотезы $\rho^{i,j} = 0$ имеет вид:

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} 0, & |r^{i,j}| \leq c_{i,j} \\ 1, & |r^{i,j}| > c_{i,j}, \end{cases} \quad (7)$$

где $c_{i,j}$ есть $(1 - \alpha/2)$ -квантиль распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n - N + 1)/2}{\Gamma((n - N)/2)} (1 - x^2)^{(n - N - 2)/2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Теорема [4]: Тест (5) эквивалентен РНМН тесту (4) проверки гипотезы $\rho^{i,j} = 0$ против $\rho^{i,j} \neq 0$.

Следовательно, РНМН тест проверки гипотезы об условной независимости X_i и X_j может быть записан в следующем виде:

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} 0, & 2q - 1 < r^{i,j} < 1 - 2q \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

где q есть $\frac{\alpha}{2}$ -квантиль бета-распределения $Be(\frac{n-N}{2}, \frac{n-N}{2})$.

Литература

1. *Anderson T.* An introduction to multivariate statistical analysis. 3-d edition. — Wiley-Interscience, New York, 2003.
2. *Lauritzen S.L.* Graphical models. — Oxford University Press, 1996.
3. *Lehmann E.L., Romano J.P.* Testing statistical hypotheses. 3-d edition. — Springer, New York, 2005.
4. *Koldanov P., Koldanov A., Kalyagin V., Pardalos P.* Uniformly most powerful unbiased test for conditional independence in Gaussian graphical model // Statistics and Probability Letters. — 2017. — Vol.122. — P. 90-95.

UDC 519.233.32

Optimal test of conditional independence testing in multivariate normal distribution

P. A. Koldanov*, A. P. Koldanov*, V. A. Kalyagin*,
P. M. Pardalos*[†]

* *Laboratory of algorithms and technologies for network analysis,
NRU Hughtre School of Economics
B.-Pecherskay str, 25, Nijni Novgorod, Russia*

[†] *Center for Applied Optimization,
University of Florida, USA*

In practical applications partial correlation tests are widely used. In the paper uniformly most powerful unbiased (UMP) test of Neymann structure is obtained. It turns out, that this test can be reduced to usual partial correlation test. It is shown that constructed UMP test is equivalent to partial correlation test. Then partial correlation test is UMP for conditional independence testing.

Keywords: conditional independence, exponential families, multivariate normal distribution, sample partial correlation test, tests of Neyman structure, uniformly most powerful unbiased tests.

Asymptotic behavior of reliability function for multidimensional aggregated Weibull type reliability indices

Yu. Farkas*, E. Hashorva*, V. I. Piterbarg†

* Faculty of business and economics,
Lausanne university,
Dorigny CH-1015 Lausanne, Switzerland.

† Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

Abstract. We study asymptotic behavior of an multidimensional reliability function (ruin probability) for multidimensional aggregated reliability index which is a linear combination of single indexes distributed by Weibull like laws.

Keywords: Total reliability index, dependent reliability indexes; Weibull-like reliability indexes, multidimensional ruin probability, multidimensional distribution tails.

1. Introduction

We study asymptotic behavior of the multidimensional reliability function, see book [1],

$$P(u; \mathbf{c}, \Lambda) := \mathbf{P}(Q_{n,m} \geq c_m u, \quad m = 1, \dots, d),$$

as $u \rightarrow \infty$, for multidimensional aggregated reliability index $\{Q_{n,m}, m = 1, \dots, d\}$, components of vector $\mathbf{c} = \{c_m, m = 1, \dots, d\}$, are positive coefficients of proportionality of the indexes. Reliability indices $Q_{n,m}$ are defined as weighted sums $Q_{n,m} = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,m} X_i$ of basic indices X_i , which are modeled by independent random variables having Weibull like tail distributions

$$\mathbf{P}(X_i \geq x) = g_i(x)e^{-x^p} = x^{\alpha_i} \ell_i(x)e^{-x^p}, \quad x \geq 0,$$

where $p > 1$ and $\ell_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, slowly varying on infinity. The matrix $\Lambda := \{\lambda_{i,m}, i = 1, \dots, n, m = 1, \dots, d\}$ is the matrix of factors of the risks being shared. We assume non-degeneracy of the aggregated reliability index,

$$d \leq n \text{ and } \text{rank } \Lambda = d,$$

otherwise some indexes are linear combinations of other ones. Such schemes are also used in financial and actuarial models for study ruin probabilities of financial/actuarial portfolios.

From theory of slowly varying functions, see book [2], it follows that we may and do assume in case when the densities exist, that, with some other $\ell_i(x)$,

$$f_i(x) = \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}} p x^{\alpha_i + p - 1} \ell_i(x) e^{-x^p}, \quad i = 1, \dots, n.$$

In case $P(u; \mathbf{c}, \Lambda)$ is absolutely continuous in u it makes a sense to introduce the density of multidimensional reliability

$$p(u; \mathbf{c}, \Lambda) := -\frac{d}{du} P(u; \mathbf{c}, \Lambda).$$

In case $d = 1$, $p(u; \mathbf{c}, \Lambda)$ is simply the probability density of the reliability index.

The main tools of studies are Laplace saddle point asymptotic method and Lemma of consistency of ruin probability.

2. One-dimensional case

We need a notation of shortened reliability indexes with some other X'_i s, with the same as above assumptions.

$$Q'_{k,m} = \sum_{i=1}^k \lambda_{i,m} X'_i, \quad m = 1, \dots, d, \quad k = 1, \dots, n.$$

Assume that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(X'_i \geq x)}{\mathbf{P}(X_i \geq x)} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Lemma 1 For any arbitrarily small $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Q_{n,m} \geq c_m u, \quad m = 1, \dots, d) \\ &= (1 + o(1)) \mathbf{P}(Q'_{n,m} \geq c_m u, \quad m = 1, \dots, d) + R(u; \delta), \end{aligned}$$

as $u \rightarrow \infty$, with

$$R(u; \delta) = O\left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(Q'_{k,m} \geq (1 - \delta)c_m u, m = 1, \dots, d)\right)$$

as $u \rightarrow \infty$.

In this section we evaluate the asymptotic behavior of

$$P(u; \Lambda) := \mathbf{P}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n \geq u)$$

as $u \rightarrow \infty$.

This problem is not new, it has been solved by several authors. Very simple way can be performed, for example, using induction, a lemma of Piterbarg, see book [6], and the above consistency Lemma 1.

Taking in mind multidimensional case, in order to show our geometrical approach, we show in this simple case how to evaluate this asymptotic by Laplace asymptotic method. Besides, some steps of the proof are used in the case of d -dimensional case.

First assume that the risks X_i , $i = 1, \dots, n$, have densities:

$$\mathbf{P}(Q_n \geq u) = u^n \int_{\mathcal{C}} \prod_{i=1}^n g'_i(u y_i) e^{-u^p \|\mathbf{y}\|_p^p} d\mathbf{y},$$

where $g'_i(x) := px^{\alpha_i+p-1} \ell_i(x)$ is described above, and

$$\mathcal{C} := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \geq 1, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

The main steps of applying here Laplace asymptotic method are as following:

- First find the minimum of $\|\mathbf{y}\|_p := (\sum_{i=1}^n y_i^p)^{1/p}$ and the point of minimum on \mathcal{C} .
- Find the behavior of $\|\mathbf{y}\|_p$ at the point of minimum.
- Find an “informative” small compact subset of \mathcal{C} .
- Finally compute an elementary integral.

Now just use Lemma 1 to pass from the absolutely continuous case to the general one.

Theorem 1 *Let X_1, \dots, X_n be independent reliability indexes with tails (1) and λ_i , $i = 1, \dots, n$, are positive weights, then*

$$\begin{aligned} P(u; \Lambda) &= \frac{(1 + o(1))(2\pi)^{(n-1)/2} p^{n/2-1/2}}{(p-1)^{n/2-1/2} \sigma^{\alpha+(n-1)p/2+1/2}} \times \\ &\times \prod_{i=1}^n \left(\lambda_i^{\frac{\alpha_i+p/2}{p-1}} \ell_i(u) \right) u^{\alpha+(n-1)p/2} e^{-\sigma^{1-p} u^p} \end{aligned}$$

as $u \rightarrow \infty$, where $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, and $\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{p/(p-1)}$.

Further, if the indexes have densities, then for the ruin density one has,

$$p(u; \Lambda) = -\frac{d}{du} P(u; \Lambda) = (1 + o(1)) p \sigma^{1-p} u^{p-1} P(u; \Lambda)$$

as $u \rightarrow \infty$.

3. Multidimensional case

Now we study the asymptotic behavior of multidimensional ruin probability. We have,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Q'_{n,m} > c_m u, \quad m = 1, \dots, d) &= \int_{u\mathcal{A}} \prod_{i=1}^n g'_i(x_i) e^{-\sum x_i^p} d\mathbf{x} \\ &= u^n \int_{\mathcal{A}} \prod_{i=1}^n F_i(uy_i) e^{-\|\mathbf{y}\|_p^p u^p} d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

with

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_{i,m} y_i \geq c_m, m = 1, \dots, d, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

We assume immediately that the risks have densities. It can be shown that even in case $d = 2$ and $p = 2$, for some c_1, c_2 , the residual in Consistency Lemma 1 has the same exponential order as the ruin probability.

Now we again are in a position to study the asymptotic behavior as $u \rightarrow \infty$ of the Laplace type integral.

Several remarks on the evaluation of the asymptotic behavior of the above integral, see paper [5]

- In multidimensional case we are looking for the minimum of $\|\mathbf{y}\|_p$ subject to $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$. Denote the point of minimum by \mathbf{y}_0 , it can lie on a hyperplane of dimension $k \in [0, \dots, d - 1]$ which is the intersection of hyperplanes with equality signs in the description of \mathcal{A} . Denote by $\mathcal{I} \subset [1, \dots, d]$, the corresponding set of indices, so that $|\mathcal{I}| = k$. We see that this first Optimization problem is more complicated than for $d = 1$. We use here Lagrange multipliers.
- Now we use Taylor expansion at \mathbf{y}_0 to reduce our asymptotic study to an integral with the quadratic form under the exponent. This Optimization problem 2 is also complicated! But we may use here the results of E. Hashorva and J. Hüslér mentioned on Gaussian multidimensional tails, see paper [4].
- So, we have here two optimization problems, initially for Weibull like density and then for Gaussian density.

This way leads to the main theorem on the asymptotic behavior of the multidimensional ruin probability.

We formulate the main result for ruin probability of several portfolios of Weibull like reliability indexes.

Theorem 2 *Let X_1, \dots, X_n , $n \geq d$, be independent Weibull like random variables (reliability indexes) having probability densities. Let the matrix Λ has rank d . Then for the ruin probability (reliability function) we have:*

1. In case $|\mathcal{I}| > 1$,

$$P(u; \mathbf{c}, \Lambda) = \frac{(1 + o(1))(2\pi)^{(n-|\mathcal{I}|)/2} P_I}{(p(p-1))^{n/2} \sqrt{\det R_{II}}} \prod_{i=1}^n y_{0,i}^{1-p/2} u^{n-\frac{1}{2}np+\alpha-\frac{1}{2}|\mathcal{I}|p} \times \\ \times \prod_{i=1}^n \ell_i(u) \exp\left(-\frac{u^p}{2} \left(\frac{p-2}{p-1} \|\mathbf{y}_0\|_p^p + \langle \hat{\mathbf{c}}_I, R_{II}^{-1} \hat{\mathbf{c}}_I \rangle\right)\right)$$

as $u \rightarrow \infty$. Above we denoted $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\mathbf{y}_0 = (y_{0,i}, i = 1, \dots, n)$ is the solution to Optimization Problem 1, $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{\mathbf{c}}_I, \hat{\mathbf{c}}_J)$ is the solution to Optimization Problem 2, the index sets $I, J \subset \mathcal{I}$, the constant P_I , and the matrix R_{II} are defined in Hashorva-Hüsler Theorem.

2. In case $|\mathcal{I}| = 1$, that is, $\mathcal{I} = \{m_0\}$, the assertion of the above one-dimensional Theorem takes place with changing λ_i on $\lambda_{i,m_0}/c_{m_0}$ or u on $c_{m_0}u$.

3. Further, for the ruin density,

$$p(u; \mathbf{c}, \Lambda) = (1 + o(1))p \|\mathbf{y}_0\|_p^p u^{p-1} P(u; \mathbf{c}, \Lambda)$$

as $u \rightarrow \infty$.

4. Examples

1. The case $d = 2$ can be considered in details, here $|\mathcal{I}| = 1$ or 2. Therefore the second optimization problem is reduced to consideration of one-dimensional and two-dimensional Gaussian distributions.

2. Permutation symmetric Gaussian like ($p = 2$) indexes also can be considered. It means that the asymptotic behavior of the ruin probability does not depend on their permutations. In Gaussian case it simply means that all non-diagonal elements of the covariance matrix are equal one to another.

References

1. Gnedenko B. V., Belyaev Ju. K., Solov'yov A. D. Mathematical methods in the theory of reliability. — M.: Nauka, 1965.
2. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. — Cambridge University Press, 1987.
3. Hashorva, E., Hüsler, J. On multivariate Gaussian tails // Ann. Inst. Statist. Math. — 2003. — Vol. 55, no. 3. — P. 507–522.
4. Hashorva, E., Hüsler, J. — On Asymptotics of Multivariate Integrals with Applications to Records // Stochastic Models. — 2002. — Vol. 18, no. 1. — P. 41–69.

-
5. *Korshunov D. A., Piterbarg V. I., Hashorva E.* On the asymptotic Laplace method and its application to random chaos // *Mathematical Notes*. — 2015. — Vol. 97, no. 5-6. — P. 878–891.
 6. *Piterbarg V. I.* *Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields*. — AMS, 2012. — Vol. 148.

Analysis of Two-Heterogeneous Server Queueing System

H. Okan Isguder*, U. U. Kocer*

* *Department of Statistics,
Dokuz Eylul University,
Tinaztepe Campus, Izmir, 35390, Turkey*

Abstract. This study mainly concerned with the K -capacity queueing system with recurrent input and two heterogeneous servers. Arriving customers choose server from the empty servers with equal probability. At an arrival time the customer joins the queue if both servers are busy. In addition, an arrival leaves without service when the system capacity is achieved. The defined system is represented by semi-Markov process and embedded Markov chain is obtained. Steady-state probabilities are found and loss probability is calculated by analyzing stream of overflows.

Keywords: embedded Markov chain, heterogeneous servers, finite capacity queue, loss probability, stream of overflows.

1. Introduction

Heterogeneous server queueing models were first studied by [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] are some examples of the literature on heterogeneous server queueing models. The analysis of $GI/M/n/n$ queueing loss system was presented by [8]. They analyzed the stream of overflows and obtained Laplace-Stieltjes transform of the distribution of stream of overflows are presented. In addition, they formulated the steady-state probabilities by using embedded Markov chain of the semi-Markov process. In this study, by using the results given by [8], the loss probability is calculated for the $GI/M/2/K$ queueing system. This study is an extension of [8] in that, it is assumed in this study there is a waiting space and there are two servers. Model description and assumptions are introduced in the following section. In section 3, the semi-Markov process representing the system is constructed and the analysis of the model is presented. The steady-state probabilities and loss probability are obtained in section 4. Finally discussion and conclusions are presented.

2. Model description and assumptions

Let t_0, t_1, \dots be the arrival times of the customers, where $t_0 < t_1 < \dots$. The interarrival times are independent identically distributed with distribution function $F(t)$ and $\alpha = \int_0^\infty [1 - F(t)]dt < \infty$. The service time of each customer in server k is a random variable represented by η_k and has an exponential distribution with parameter μ_k ($k = 1, 2$). An arriving

customer may choose any one of the free servers with equal probability. When all servers are busy, customers join the queue. The system capacity is K . When the system capacity is reached, an arriving customer leaves the system without taking any service.

Let $X(t)$ be the number of customers at time t and $X_n = X(t_n - 0), n \geq 1$. X_n is the number of customers being in the system at the time of the n -th arrival. The semi-Markov process that represents the system is defined as follows:

$$\xi(t) = X_n, t_n \leq t < t_{n+1}, n \geq 1.$$

The kernel of the process $\{\xi(t), t \geq 0\}$ is

$$Q_{ij}(x) = P\{X_{n+1} = j, t_{n+1} - t_n < x | X_n = i\}, \tag{1}$$

for all $x \geq 0$ and $0 \leq i, j \leq K$. For each state i, j the kernel function given by (2) can be written as follows:

$$\begin{aligned} Q_{00}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x [(1 - e^{-\mu_1 t}) + (1 - e^{-\mu_2 t})] dF(t), \\ Q_{01}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x (e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t}) dF(t), \\ Q_{10}(x) &= \int_0^x (1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t}) dF(t), \\ Q_{11}(x) &= \int_0^x [e^{-\mu_1 t}(1 - e^{-\mu_2 t}) + e^{-\mu_2 t}(1 - e^{-\mu_1 t})] dF(t), \\ Q_{12}(x) &= \int_0^x e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} dF(t), \end{aligned}$$

for $i + 1 \geq j \geq 2$ and $i \geq 2$

$$Q_{ij}(x) = \int_0^x \frac{[(\mu_1 + \mu_2)t]^{i+1-j}}{(i + 1 - j)!} e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} dF(t),$$

for $i + 1 > 2$ and $j = 0$

$$\begin{aligned} Q_{ij}(x) &= \int_0^x \left[\int_0^t \frac{(\mu_1 + \mu_2)^{i+1-2}}{(i - 2)!} y^{i-2} e^{-(\mu_1 + \mu_2)y} \right. \\ &\quad \left. (1 - e^{-\mu_1(t-y)})(1 - e^{-\mu_2(t-y)}) dy \right] dF(t), \end{aligned}$$

for $i + 1 > 2$ and $j = 1$

$$\begin{aligned} Q_{ij}(x) &= \int_0^x \left[\int_0^t \frac{(\mu_1 + \mu_2)^{i+1-2}}{(i - 2)!} y^{i-2} e^{-(\mu_1 + \mu_2)y} [e^{-\mu_1(t-y)} \right. \\ &\quad \left. (1 - e^{-\mu_2(t-y)}) + e^{-\mu_2(t-y)} (1 - e^{-\mu_1(t-y)})] dy \right] dF(t), \end{aligned}$$

$$Q_{ij}(x) = 0, j \geq i + 1,$$

Let $q_{ij}(s)$ represent the Laplace-Stieltjes transform of $Q_{ij}(x)$ such that:

$$q_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dQ_{ij}(x), 0 \leq i, j \leq K (\operatorname{Re}\{s\} \geq 0).$$

Hence $q(s) = [q_{ij}(s)]_0^K$ is obtained in matrix form as follows:

$$q(s) = \begin{pmatrix} q_{00}(s) & q_{01}(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_{10}(s) & q_{11}(s) & q_{12}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{20}(s) & q_{21}(s) & q_{22}(s) & q_{23}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{K-1,0}(s) & q_{K-1,1}(s) & q_{K-1,2}(s) & q_{K-1,3}(s) & \cdots & q_{K-1,K}(s) \\ q_{K-1,0}(s) & q_{K-1,1}(s) & q_{K-1,2}(s) & q_{K-1,3}(s) & \cdots & q_{K-1,K}(s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

From (2) $q(s)$ is a lower Hessenberg matrix. Let the transition probabilities are defined as $p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ and $P = [p_{ij}]_0^K$. Hence p_{ij} for each i, j can be obtained from the equation $p_{ij} = q_{ij}(0)$.

3. Steady-state probabilities and the loss probability

The stream of overflow analysis for $GI/M/n/n$ heterogeneous-server queueing system without waiting space is presented by [8] and both the steady-state probabilities and the loss probability are obtained as a function of the transition probabilities. Based on the results given by [8], the steady-state probabilities and the loss probability for $GI/M/2/K$ queueing system are obtained respectively as follows:

$$P_n = \frac{D_{nn}(0)}{D(1, 1, \dots, 1)}, \quad n = 1, 2, \dots, K.$$

$$P_{loss} = \frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{K-1,K}}{D(1, 1, \dots, 1)}, \quad (3)$$

where $D_{nn}(0)$ are the cofactors of the (n, n) th entries of matrix $[I - q(0)]$ and

$$D(1, 1, \dots, 1) = \begin{vmatrix} 1 & -p_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 - p_{11} & -p_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -p_{K-1,1} & -p_{K-1,2} & \cdots & -p_{K-1,K} \\ 1 & -p_{K-1,1} & -p_{K-1,2} & \cdots & 1 - p_{K-1,K} \end{vmatrix}$$

By using (3) the loss probability for the $GI/M/2/4$ queueing model is obtained as following;

$$P_{loss} = \frac{p_{01}p_{12}p_{23}p_{34}}{(1 - p_{11} + p_{01})A + p_{12}B + p_{01}p_{12}C},$$

where, $A = (1 - p_{22})(1 - p_{33} - p_{34}) - p_{23}p_{32}$, $B = -p_{21}(1 - p_{33} - p_{34}) - p_{23}p_{31}$, $C = (1 - p_{33} - p_{34} + p_{23})$, and

$$p_{01} = \frac{1}{2}[f(\mu_1) + f(\mu_2)],$$

$$p_{11} = f(\mu_1) + f(\mu_2) - 2f(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{12} = f(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{21} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} f(\mu_1) + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} f(\mu_2) - \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1\mu_2} f(\mu_1 + \mu_2) - 2(\mu_1 + \mu_2)f^2(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{22} = (\mu_1 + \mu_2)f^2(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{23} = f(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{31} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_2^2} f(\mu_1) + \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1^2} f(\mu_2) - \left[\frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1^2} + \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_2^2} \right] f(\mu_1 + \mu_2) - \left[\frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1} + \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_2} \right] f^2(\mu_1 + \mu_2)$$

$$- 2(\mu_1 + \mu_2)^2 f^3(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{32} = (\mu_1 + \mu_2)^2 f^3(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{33} = (\mu_1 + \mu_2)f^2(\mu_1 + \mu_2),$$

$$p_{34} = f(\mu_1 + \mu_2).$$

4. Conclusions

Heterogeneous server $GI/M/2/K$ queuing system is analyzed by semi-Markov process and embedded Markov chain of the process is obtained. The steady-state probabilities are obtained and the loss probabilities are calculated. Since the steady state probabilities are expressed using the determinant, these probabilities can be computed easily once the transition matrix is known. The calculation of the average number waiting in line and also obtaining the distribution function of the waiting time may be the further research directions.

References

1. *Gumbel M.* Waiting lines with heterogeneous servers // Operations Research. — 1960. — Vol. 8, no. 4. — P. 219–225.
2. *Lin B. W., Elsayed E. A.* A general solution for multichannel queueing systems with ordered entry // Computers & Operations Research. — 1978. — Vol. 5, no. 4. — P. 504–511.
3. *Neuts F. M., Takahashi Y.* Asymptotic behavior of the stationary distributions in the $GI/PH/c$ queue with heterogeneous servers // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. — 1981. — Vol. 57, no. 4. — P. 441–452.
4. *Fakinos D.* The blocking system with heterogeneous servers // The Journal of the Operational Research Society. — 1980. — Vol. 31, no. 10. — P. 919–927.
5. *Nawijn M. W.* A note on many-server queueing systems with ordered entry, with an application to conveyor theory // Journal of Applied Probability. — 1983. — Vol. 20, no. 1. — P. 144–152.
6. *Pourbabai B., Sonderman D.* Service utilization factors in queueing loss systems with ordered entry and heterogeneous servers // Journal of Applied Probability. — 1986. — Vol. 23, no. 1. — P. 236–242.
7. *Isguder H. O., Kocer U. K., Celikoglu C. C.* Generalization of the Takacs' formula for $GI/M/n/0$ queueing system with heterogeneous servers // WCE 2011 (World Congress on Engineering) / International Association of Engineers. — 2011. — Vol. 1. — P. 45–47.
8. *Isguder H. O., Kocer U. U.* Analysis of $GI/M/n/n$ queueing system with ordered entry and no waiting line // Applied Mathematical Modelling. — 2014. — Vol. 38, no. 3. — P. 1024–1032.

УДК 519.214

О неклассических вариантах теоремы Линдеберга-Феллера

Ш. К. Форманов*

* Отдел теории вероятностей и математической статистики,
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29, Ташкент, Узбекистан, 100125

Аннотация. Хорошо известно, что классическое условие Линдеберга является достаточным для справедливости центральной предельной теоремы (CLT). Оно также будет необходимым в случае, когда слагаемые удовлетворяют условию равномерной бесконечной малости (теорема Феллера). Предельные теоремы для распределения сумм независимых случайных величин, не использующие условия равномерной бесконечной малости, стали называться неклассическими.

В настоящей работе приведен неклассический вариант теоремы Линдеберга-Феллера. Установлены точные оценки характеристик Линдеберга, Ротаря, использующихся при доказательствах неклассических вариантов CLT через разности функций распределения сумм независимых случайных величин (в схеме серий) и стандартной нормальной функции распределения. Эти результаты уточняют теорему Феллера.

Ключевые слова: Центральная предельная теорема, условия равномерной бесконечной малости, неклассическая теорема Линдеберга-Феллера.

Пусть $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}, n = 1, 2, \dots$ - последовательность серий независимых случайных величин (с.в.).

Будем считать, что

$$EX_{nj} = 0, \quad EX_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$S_n = X_{n1} + \dots + X_{nn}, \quad \sum_{j=1}^n \sigma_{nj}^2 = 1.$$

Положим

$$F_n(x) = P(S_n < x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

$$\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|.$$

Хорошо известно, что условие

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sigma_{nj} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (U)$$

называется условием равномерной бесконечной малости последовательности независимых с.в. $\{X_{nj}, j \geq 1\}$. Будем говорить, что эта последовательность с.в. удовлетворяет условию Линдеберга, если для любого $\varepsilon > 0$

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (L)$$

Здесь $I(A)$ обозначает индикатор события A . Хорошо известно, что при выполнении условия (L)

$$\Delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и представляет собой содержание Центральной Предельной Теоремы (CLT). Уточнением последней теоремы является теорема Линдеберга-Феллера, которую в логической схеме можно представить в виде

$$(U) \& (L) \Leftrightarrow (CLT)$$

т.е. при выполнении условия равномерной бесконечной малости (U) условие Линдеберга выполняется.

Следуя В.М.Золотареву [1] предельные теоремы, доказанные без привлечения условия (U), называются неклассическими. Первые неклассические варианты CLT доказаны В.М.Золотаревым в 1967 году и В.И.Ротарем в 1975 году (см. [1], [2]).

В работах [3], [4] приведена следующая оценка величины $L_n(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$), которая обобщает теоремы Линдеберга-Феллера.

Теорема А. Существует абсолютная константа $C > 0$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$

$$(1 - e^{-\varepsilon^2/4}) \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \leq C(\Delta_n + \sum_{j=1}^n \sigma_{nj}^4). \quad (1)$$

Замечание. Очевидно, что при выполнении условия (U) в силу условия $\sum_{j=1}^n \sigma_{nj}^2 = 1$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{nj}^4 \leq \max_j \sigma_{nj}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из оценки (1) следует, что если последовательность независимых с.в. $\{X_{nj}, j \geq 1\}$ удовлетворяет CLT (т.е. $\Delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$), то условие Линдеберга

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \rightarrow 0$$

выполняется для любого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим

$$F_{nj}(x) = P(X_{nj} < x),$$

$\Phi_{nj}(x)$ - функция нормального распределения с параметром $(0, \sigma_{nj}^2)$ ($j = 1, 2, \dots$) и для любого $\varepsilon > 0$

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|x|>\varepsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx.$$

Теорема В. (В.И.Ротарь [2]). Для того, чтобы имела место CLT, необходимо и достаточно

$$R_n(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Приведенная теорема В является неклассическом вариантом CLT и обобщением теоремы Линдберга-Феллера. На самом деле можно доказать, что имеет место оценка: при некотором $C > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$R_n(\varepsilon) \leq C(L_n(\varepsilon) + \max_j \sigma_{nj}^2).$$

Условие (1)

$$\{R_n(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

называют «разностным аналогом» условия Линдберга.

Теорема Линдберга-Феллера и теорема В обобщены в работе Ш.К.Форманова [5] с использованием характеристики «близости распределений» величины

$$\alpha_n(T) = \sum_j \sup_{|t| \leq T} |f_{nj}(t) - g_{nj}(t)|, \quad T > 0,$$

где $f_{nj}(t)$ и $g_{nj}(t)$ - характеристические функции соответствующих распределений F_{nj} и Φ_{nj} . Введем следующие обозначения:

$$R_n^{(1)} = R_n(1) = \sum_j \int_{|x| \geq 1} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx,$$

$$R_n^{(2)} = \sum_j \int_{|x| \leq 1} x^2 |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx,$$

$$R_n^{(3)} = \sum_j \int_{|x| \leq 1} |x|^3 |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx,$$

$$\delta_n = R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + R_n^{(3)}.$$

Теорема 1. Имеет место логическое соотношение

$$\{R_n(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \varepsilon > 0\} \Leftrightarrow \{\delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\}.$$

Путем сравнения теоремы В и теоремы 1 получаем, что справедлива следующая

Теорема 2. Для того, чтобы для последовательности $\{X_{nj}, j \geq 1\}$ имела место СЛТ, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

По ходу доказательства теорем 1 и 2 можно установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 3. При некотором $C > 0$

$$R_n(\varepsilon) \leq C(\delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2)$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. При некотором $C > 0$

$$\delta_n \leq C(\Delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2).$$

Теорема 5. При некотором $C > 0$

$$R_n(\varepsilon) \leq C(\Delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2)$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Теорема 6. При любом $T > 0$ и некотором $C > 0$

$$\alpha_n(T) \leq C(\Delta_n + \max_j \sigma_{nj}^2).$$

Заключение

Теоремы 3-6 обобщают приведенную выше теорему Линдеберга-Феллера и являются аналогами теоремы А в терминах различных числовых характеристик, используемых при доказательствах неклассических вариантов СЛТ. Из теоремы 1 следует, что теорема 2 является обобщением теоремы В (В.И.Ротарь), поскольку из условия (2) следует выполнения предельного соотношения

$$\delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

При этом следует отметить, что проверка последнего условия осуществляется легче, чем проверка условия

$$R_n(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Литература

1. *Золоторев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986. — 415 с.
2. *Rotar V.* Probability Theory. — World Scientific Publishing. 1997. — 417 p.
3. *Hall P.* Rates on convergence in the central limit theorem. — Pitman Adv. Publ. Progr. Boston-London. 1984. — 257 p.
4. *Chen L.H.Y., Shao Q.-M.* Steins method for normal approximation. — Lect. Note. Ser., 2005. — 61 p.
5. *Formanov Sh. K.* The Stein-Tikhomirov method and nonclassical CLT // VIth Inter. Conf. Modern Problems in Theor. and Appl. Probab. Novosibirsk, 2016. — P. 19–20.

UDC 519.214

On nonclassical versions of the Lindeberg-Feller theorem**Sh. K. Formanov***

** Department of Probability theory and mathematical statistics,
Institute of mathematics Uzbek Academy of Sciences,
Durmon yoli str. 29, Tashkent, 100125, Uzbekistan*

It is well known that the classical Lindeberg condition is sufficient for validity of the central limit theorem. It will be also a necessary if the summands satisfy the condition of infinite smallness (Feller's theorem). The limit theorems for the distributions of the sums of independent random variables which do not use the condition of infinite smallness were called non-classical.

In this paper a non-classical version of Lindeberg-Feller theorem is given. The exact bounds for the Lindeberg, Rotar characteristics using the difference of the distribution of sum of independent random variables and a standard normal distribution are established. These results improve Feller's theorem.

Keywords: The central limit theorem, the conditions for uniform infinite smallness, the nonclassical theorem of Lindeberg-Feller.

О некоторых недавних исследованиях в тауберовой теории и их применениях в теории вероятностей

А. Л. Якимив*

* Отдел теории вероятностей и математической статистики,
Математический институт им. В.А. Стеклова,
ул. Губкина, д. 8, Москва, Россия, 119991

Аннотация. Доклад состоит из двух частей: воспоминаний об А.Д. Соловьёве и небольшого обзора некоторых недавних исследований в тауберовой теории с их вероятностными применениями. В воспоминаниях входит период 1974–1977 годов, когда автор был ещё студентом на кафедре теории вероятностей МГУ. Также туда входит период 1997–1998 годов, когда Александр Дмитриевич был назначен Советом МИАН оппонентом диссертации автора на тему: “Вероятностные приложения тауберовых теорем”. Во второй части доклада будут сформулированы результаты в тауберовой теории, полученные недавно А.А. Боровковым (2008), С. Резником и Г. Самородническим (2015), С.М. Али (2016) и автором (2017), а также их применения при исследовании асимптотики “хвостов” быстро убывающих на бесконечности устойчивых законов, для изучения совместного распределения двух случайных величин, описывающих рост направленных сетей, в финансовой математике и при исследовании поведения распределений типа кратного степенного ряда на границе их существования, соответственно.

Ключевые слова: тауберовы теоремы, вероятностные применения.

1. Введение. Воспоминания об А.Д. Соловьёве

Многие из нас, студентов кафедры теории вероятностей МГУ 1974–1977 годов, любили ходить на общекафедральный семинар по теории массового обслуживания и теории надёжности под руководством Б.В. Гнеденко, А.Д. Соловьёва и Ю.К. Беляева. Уже тогда по факультету ходила большая слава об Александре Дмитриевиче, как об одном из создателей теории надёжности, великолепном аналитике и блестящем лекторе. Поэтому мы с удовольствием слушали его выступления на этом семинаре. Иногда удавалось присутствовать и на его лекциях. И, хотя мы многие из материалов лекций уже знали, но они подавались в таком блестящем виде, что воспринимались как совершенно новые.

Познакомиться поближе с А.Д. Соловьёвым мне удалось примерно 20 лет назад, когда я представил к защите в МИАН диссертацию на тему: “Вероятностные приложения тауберовых теорем”. Помню, я очень обрадовался, когда мой научный руководитель профессор Борис Александрович Севастьянов предложил кандидатуру Александра Дмитриевича в качестве одного из оппонентов. В самом деле, он, как всемирно известный аналитик и выдающийся специалист по теории вероятностей и её приложениям, смог бы по достоинству оценить как аналитическую часть диссертации, так и вероятностную. Уже при

первой встрече, когда я принёс ему свою диссертацию, он меня сильно удивил. Он спросил сразу, к какой книге по тауберовой теории наиболее близка аналитическая часть моей диссертации. Оказалось, что он очень хорошо знаком с тауберовой теорией. Дело в том, что, как известно, в теории вероятностей и её приложениях применяется большое количество аналитических методов, и с каждым годом их становится всё больше, и знать их все просто не представляется возможным. Позже, за чашкой чая, он рассказал, что, будучи ещё аспирантом, он сдавал экзамен по тауберовой теории. В частности, туда входила известная книга Г. Харди “Расходящиеся ряды” и тауберовы теоремы Н. Винера. В этом, как мне кажется, чувствовалось влияние его научного руководителя, блестящего аналитика, профессора Александра Осиповича Гельфонда. После защиты диссертации, он у меня спросил, удалось ли ему хорошо выступить, так как в этот день он себя немного неважно чувствовал после участия в конференции в Польше. Я ответил, что его выступление, несмотря на плохое самочувствие, было, как всегда, очень ярким. И с этим согласились присутствовавшие поблизости члены Совета. И ещё я хочу сказать, что Борис Александрович Севастьянов, большой друг Александра Дмитриевича, часто рассказывал о нём. В частности, он говорил, что Александр Дмитриевич умел очень быстро и безошибочно прикидывать предполагаемый результат. В заключение скажу, что я очень рад, что жизнь меня свела со столь выдающимся учёным.

2. Несколько тауберовых теорем и их вероятностные применения

Как всегда, имеется большое количество теорем тауберова типа, в том числе и недавних. В этой части доклада будут приведены некоторые последние результаты в тауберовой теории, наиболее интересных, по мнению докладчика, с точки зрения их применения в теории вероятностей.

Пусть ξ - с.в. с распределением F , $\psi(\lambda) = E \exp(\lambda\xi) < \infty \quad \forall \lambda \geq 0$, причём $\psi(\lambda) \rightarrow \infty \quad (\lambda \rightarrow \infty)$. Положим $m(\lambda) = \ln \psi(\lambda)$, $a(\lambda) = m'(\lambda)$, $b^2 = b^2(\lambda) = m''(\lambda)$, $\Lambda(x) = \sup_{\lambda} (\lambda x - m(\lambda))$ (преобразование Лежандра $m(\lambda)$), $\lambda(x)$ - точка, в которой этот супремум достигается. А.А. Боровков в [2] доказал следующую тауберову теорему.

Теорема 1 Пусть для произвольного фиксированного $t_0 > 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $|t| \leq t_0$ выполняется $m''(\lambda + it/b) = m''(\lambda)(1 + o(1))$ и отношение $|\psi(\lambda + it/b)|/\psi(\lambda)$ интегрируемо по t равномерно по всем достаточно большим λ . Тогда распределение F имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda''(x)}} \exp(-\Lambda(x))(1 + o(1)) \quad (x \rightarrow \infty).$$

В статье С.М. Али [1] рассматривается произвольная действительная с.в. Z , для которой на некотором конечном интервале действительной

прямой существует функция $\Lambda(\mu) \equiv \ln \mathbf{E} e^{\mu Z} < \infty \forall \mu : 0 < \mu < \mu^* < \infty$, причём $\Lambda(\mu) \rightarrow \infty (\mu \rightarrow \mu^*)$ и $\varphi(x) = \ln \Lambda(\mu^* - 1/x)$, $x \geq 1/\mu^*$. Справедлива следующая тауберова теорема.

Теорема 2 Пусть функция $f^{(-1)}(x)$, обратная к функции

$$f(x) = x^2 \varphi'(x),$$

правильно меняется на бесконечности вместе со всеми модулями её производных, причём показатель $f^{(-1)}(x)$ равен $\gamma \in (0, 1)$. Тогда

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} (\ln \mathbf{P}\{Z > x\} + \Lambda^*(x)) / \ln x \in [-c, 0]$$

и

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} (\ln \mathbf{P}\{Z > x\} + \Lambda^*(x)) / \ln x \leq -c,$$

где $\Lambda^*(x) = \sup_{\mu \in (0, \mu^*)} (\mu x - \Lambda(\mu))$, $c = (1 - \gamma)/2$.

Третий результат касается изучения асимптотики на бесконечности распределений многомерных случайных величин С. Резника и Г. Самородниченко [3]. Через $M_+(E)$ обозначим совокупность мер Радона на ограниченных борелевских множествах топологического пространства E , то есть, конечных на компактных множествах из E . При $U_t, U \in M_+(E)$ мы будем писать, что $U_t \xrightarrow{v} U$ при $t \rightarrow \infty$, если $\int_E f(x) U_t(dx) \rightarrow \int_E f(x) U(dx)$ для произвольной непрерывной функции f на E с компактным носителем. Пусть $U \in M_+(R_+^n)$, причём $\tilde{U}(\lambda) = \int_{R_+^n} e^{-(\lambda, \mathbf{x})} U(d\mathbf{x}) < \infty$, $\forall \lambda > \mathbf{0}$ (последнее неравенство значит, что $\lambda \in \text{int } R_+^n$). Кроме этого, пусть заданы функции $b_i(t)$, правильно меняющиеся на бесконечности с показателями $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, причём $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Положим $U_t(\mathbf{x}) = U(\mathbf{b}(t)\mathbf{x})/t$ ($\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}$), где вектор $\mathbf{b}(t)\mathbf{x}$ состоит из соответствующих покомпонентных произведений. Пусть для произвольного $\mathbf{x} > \mathbf{0}$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^n [v_i > y]} \exp\left(-\sum_{i=1}^n v_i/x_i\right) U_t(d\mathbf{v}) = 0.$$

Теорема 3 Если при $t \rightarrow \infty$ для всех $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ $\tilde{U}(\mathbf{1}/\mathbf{b}(t)\mathbf{x})/t \rightarrow \Psi(\mathbf{x}) < \infty$, где $\mathbf{1}/\mathbf{b}(t)\mathbf{x} = (1/(b_1(t)x_1), \dots, 1/(b_n(t)x_n))$, то существует функция $U_\infty(\mathbf{x})$ такая, что $\tilde{U}_\infty(\lambda) = \Psi(\mathbf{1}/\lambda) \forall \lambda > \mathbf{0}$, причём $U_t \xrightarrow{v} U$ и $U_t(\mathbf{x}) = U(\mathbf{b}(t)\mathbf{x})/t \rightarrow U_\infty(\mathbf{x})$ ($\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}$).

Рассмотрим множество $[0, \infty]$, компактифицированное точкой ∞ . Положим $E = [0, \infty]^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Далее в статье рассматривается вектор (X, Y) ,

где с.в. X и Y имеют наглядную интерпретацию в задаче роста направленных сетей. Для них доказывается, что

$$tP\{(X/a(t) \geq x, Y/b(t) \geq y)\} \rightarrow \nu_0(x, y) \equiv \nu([x, \infty] \times [y, \infty]), \quad \forall x, y > 0.$$

Доказательство сводится к k -кратному дифференцированию по x производящей функции $\varphi(x, y) = EX^x Y^y$, где k - таково, что $EX^k = \infty$ и далее к этой производящей функции применяется тауберова теорема 3, откуда выводится указанное выше соотношение. Пусть задана кратная последовательность $a(i) \geq 0, i \in Z_+^n$, причём при $x \in (0, 1)^n$ сходится степенной ряд

$$B(x) = \sum_{i \in Z_+^n} a(i)x^i \equiv \sum_{i_1, \dots, i_n \in Z_+} a(i_1, \dots, i_n)x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} > 0$$

и расходится при $x = \mathbf{1} \equiv (1, \dots, 1)$. Мы будем говорить, что с. в. ξ_x имеет распределение типа степенного ряда, если

$$P\{\xi_x = i\} = \frac{a(i)x^i}{B(x)}, \quad \forall i \in Z_+^n, \quad x \in (0, 1)^n.$$

Такие распределения используются в обобщённой схеме размещения [4]. Из замечания 3 статьи автора [5] следует

Лемма 1 Пусть для произвольного $\lambda \in R_+^n \equiv (0, \infty)^n$ при

$$b = (b_1, \dots, b_n) \in R_+^n, \quad \min_{j=1, \dots, n} b_j \rightarrow \infty$$

верно

$$\frac{B(\exp(-\lambda/b))}{B(\exp(-\mathbf{1}/b))} \rightarrow \Psi(\lambda) \in (0, \infty),$$

где $\exp(-\lambda/b) = (\exp(-\lambda_1/b_1), \dots, \exp(-\lambda_n/b_n))$. Тогда существуют такие числа $\alpha_j \geq 0$, что $\Psi(\lambda) = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{\alpha_j}, \forall \lambda \in R_+^n$. Пусть \mathfrak{A} - δ -кольцо ограниченных борелевских множеств из R_+^n . Положим при $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu_b(A) = \frac{1}{B(\exp(-\mathbf{1}/b))} \sum_{i: i \in Z_+^n, i/b \in A} a(i),$$

$$\nu(A) = \int_{A \cap [0, \infty)^n} \nu_1(dy_1) \dots \nu_n(dy_n),$$

где $\nu_j(dy_j) = y_j^{\alpha_j-1} dy_j / \Gamma(\alpha_j)$, если $\alpha_j > 0$ и мера ν_j сосредоточена в нуле с весом 1, если $\alpha_j = 0$. Тогда при $b = (b_1, \dots, b_n) \in R_+^n, u \min_{j=1, \dots, n} b_j \rightarrow \infty \mu_b \Rightarrow \mu$, то есть $\mu_b(A) \rightarrow \nu(A)$ для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ с $\nu(\partial A) = 0$.

Теорема 4 Пусть выполнены все предположения леммы 1, причём все $\alpha_j > 0$. Кроме этого, предположим, что для каждого $j = 1, \dots, n$ выполнено одно из следующих соотношений: при $b = (b_1, \dots, b_n) \in R_+^n$ и $\min_{i=1, \dots, n} b_i \rightarrow \infty$ для произвольной функции $z_j = z_j(b) > 1$, $z_j = 1 + o(1)$ выполнено одно из следующих неравенств:

$$\liminf_{\min_{i=1, \dots, n} b_i \rightarrow \infty} (f(b_1, \dots, b_{j-1}, z_j b_j, b_{j+1}, \dots, b_n) - f(b))/g(b) \geq 0;$$

$$\limsup_{\min_{i=1, \dots, n} b_i \rightarrow \infty} (f(b_1, \dots, b_{j-1}, z_j b_j, b_{j+1}, \dots, b_n) - f(b))/g(b) \leq 0,$$

где $f(b) = a([b])$, $g(b) = B(\exp(-\mathbf{1}/b))/\prod_{j=1}^n b_j$. Тогда для произвольного фиксированного $y = (y_1, \dots, y_n) \in R_+^n$ при $\min_{i=1, \dots, n} b_i \rightarrow +\infty$

$$\frac{a([by])}{g(b)} = \frac{f(y_1 b_1, \dots, y_n b_n)}{g(b)} \rightarrow \varphi(y) \equiv \frac{\prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j - 1}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}.$$

При этом последнее соотношение выполнено равномерно по $y \in K$ для произвольного компакта $K \subset R_+^n$. Здесь $a([by]) = a([b_1 y_1], \dots, [b_n y_n])$.

Из леммы 1 и теоремы 4 выводится следующий результат.

Теорема 5 Если выполнены условия леммы 1, то

$$\xi_x(\mathbf{1} - x) \xrightarrow{D} (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

при $x \uparrow \mathbf{1}$, где с.в. $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ независимы и γ_j имеет Γ -распределение с параметром α_j , если $\alpha_j > 0$ и сосредоточена в нуле, если $\alpha_j = 0$. Если выполнены предположения теоремы 4, то

$$\frac{P\{\xi_x = [y/(\mathbf{1} - x)]\}}{\prod_{j=1}^n (1 - x_j)} \rightarrow \frac{\prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j - 1} e^{-y_j}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}$$

при $x \uparrow \mathbf{1}$ равномерно по $y \in K$ для произвольного компакта $K \subset R_+^n$.

В [4] одномерный результат доказан методом моментов. Доказательство теоремы 5 при помощи леммы 1 и теоремы 4 существенно проще. Автор глубоко признателен рецензентам за ценные замечания.

Литература

1. Aly S. M. From moment explosion to the asymptotic behavior of the cumulative distribution for a random variable // Теория вероятн. и ее примен. — 2016. — Т. 61, вып. 3. — С. 489–508.

2. *Боровков А. А.* Тауберовы и абелевы теоремы для быстро убывающих распределений и их приложения к устойчивым законам // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, вып. 5. — С. 1007–1018.
3. *Resnick S., Samorodnitsky G.* Tauberian theory for multivariate regularly varying distributions with application to preferential attachment networks // *Extremes*. — 2015. — Vol. 18, no. 3. — P. 349–367.
4. *Тымашиёв А. Н.* Распределения типа степенного ряда и обобщённая схема размещения. — М.: Академия, 2016. — ISBN: 978-5902936-25-1.
5. *Якымив А. Л.* Тауберова теорема для кратных степенных рядов // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, вып. 2. — С. 143–172.

UDC 517.521.75; 519.2

On some recent investigations on Tauberian theory and their applications to probability theory

A. L. Yakymiv*

* *Department of Probability Theory and Mathematical Statistics,
Steklov Mathematical Institute RAS,
Gubkin St. 8, 119991 Moscow, Russia*

The report consists of two parts: memories of A.D. Solovyov and the small review of some recent researches in the Tauberian theory with their probabilistic applications. The period of 1974–1977 when the author was still a student at department of probability theory of MSU enters memoirs. Also there the period of 1997–1998 when Alexander Dmitrievich has been appointed by Council of MIAN the opponent of the author's dissertation: "Probabilistic applications of Tauberian theorems". In the second part of the report the results in the Tauberian theory received recently by A.A. Borovkov (2008), S. Reznick and G. Samorodnitsky (2015), S.M. Ali (2016) and the author (2017) and also their applications will be formulated at a research of an asymptotics of "tails" of the stable laws which are quickly decreasing on infinity, for studying of joint distribution of two random variables describing growth of the directed networks, in financial mathematics and at a research of behavior of generalized multiple power series distributions at the boundary of their existence, respectively.

Keywords: Tauberian theorems, probabilistic applications.

UDC 517.521

On a generalization of the Leibniz theorem

G. A. Zverkina*[†]

* *Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia*

[†] *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of
Sciences
65 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia*

Abstract. The well-known Leibniz theorem (Leibniz Criterion or alternating series test) of convergence of alternating series is generalised for the case when the absolute value of terms of series are “not absolutely monotonously” convergent to zero. Questions of accuracy of the estimation for the series remainder are considered.

Keywords: alternating series test, Leibniz theorem, convergence rate, Leibniz Criterion.

1. Introduction

The Leibniz theorem (Leibniz Criterion or alternating series test) provides the possibility to demonstrate the convergence of an alternating series with decreasing to zero components. However in some cases values of series components decrease to zero fluctuating. In some this case it can use the facts proved below.

2. Generalization of the Leibniz theorem

Definition 1. The sequence $\{a_n\}$ is called $Z(w)$ -monotonously increasing (decreasing) on set \mathfrak{D} ($w \in \mathbb{N}$) if $\forall k \in \mathfrak{D}$ it is carried out $a_{k+w} \geq a_k$ (respectively $a_{k+w} \leq a_k$). \diamond

Theorem 1. If the sequence a_n is $Z(2w - 1)$ -monotonously decreasing for $n \geq n_0$ ($w, n \in \mathbb{N}$) and $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, then the series $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges. And $|R_m| \leq \sum_{n=m+1}^{m+2w} a_k$, where R_m is the series remainder:

$$R_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^n a_n. \quad \square$$

Remark 1. $Z(2w)$ -monotonicity of $\{a_n\}$ and $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, not imply

the convergence of $\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k$. \diamond

Example 1. $a_n = \begin{cases} k^{-2} & \text{if } n = 2k, \\ k^{-1} & \text{if } n = 2k - 1, \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -\infty. \quad \square$

If $w = 1$, then $Z(2w - 1)$ -monotonicity turns into usual monotonicity ($0 \leq a_{n+1} \leq a_n$), and the Theorem 1 turns into the well-known Leibniz Theorem about alternating series:

Theorem 2 (G.W. von Leibniz, 1682). *If $a_n \searrow 0$, then the series*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ converges.} \quad \square$$

Corollary 1. Denote $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$. If $a_n \searrow 0$, then

$$|R_m| \leq R_m^L \stackrel{\text{def}}{=} a_{m+1}; \tag{1}$$

$$\text{or } R_m = \theta \cdot a_{m+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{2}$$

□

Denote Z -series – a series satisfying to conditions of Theorem 1, and L -series – a series satisfying to conditions of Theorem 2. It’s well-known, the Leibniz theorem is a special case of Dirichlet’s theorem (Dirichlet test):

Theorem 3 (J.P.G. Lejeune Dirichlet). *If $\forall N \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| < M$, where M is some constant, and for all $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,*

then the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges. □

Below (Examples 2, 3, 4) we give samples of series for which Theorem 1 allows to prove convergence, but Dirichlet’s Theorem is inapplicable or its application involves the big technical difficulties.

Proof of Theorem 1 represents the $Z(2w-1)$ -series as the sum of $(2w-1)$ convergent series; we skip it here (see [1]). ■

Remark 2. $S - S_m = \sum_{j=1}^{2w-1} (-1)^{m+j} \tilde{\theta}_{m+j} a_{m+j}$, $0 \leq \tilde{\theta}_r \leq 1$, or

$$|S - S_m| \leq R_m^Z \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \sum_{r=1}^{w-1} a_{m+2r}, \sum_{r=1}^w a_{m+2r-1} \right\}. \text{ Generally, this}$$

estimation is not improved asymptotically. ◇

Example 2. Let the sequence a_n be defined as follows:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k} + \frac{1}{2^k}, & \text{if } n = 3(2k - 1) - 2 \text{ or } n = 3(2k - 1); \\ \frac{1}{10^k}, & \text{if } n = 3(2k - 1) - 1 \text{ or } n = 3 \cdot 2k - 1; \\ \frac{1}{k}, & \text{if } n = 3 \cdot 2k - 2 \text{ or } n = 3 \cdot 2k; \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\{a_n\}$ is $Z(3)$ -monotonous, and a series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ is not

L -series; $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = 2$. Here $R_{6k+3} \sim \frac{2}{k}$, $R_{6k} = \frac{1}{2^{k-1}}$, that is the absolute value of the remainder of a series has big fluctuations. This series cannot be easily examined by Dirichlet test (Theorem 3). □

3. Conditions of applicability of the Theorem 1

Often components of a numerical series represent values of some continuous function in integer points: $a_n = f(n)$. Therefore for research of convergence of series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$ in the case when $f(x)$ is not a monotonous function, it is natural to extend the concept of Z -monotonicity to continuous functions.

Definition 2. Function $f(x)$ is called $Z(T)$ -monotonously increasing (decreasing) on the set \mathfrak{D} ($T > 0$) if for all $x \in \mathfrak{D}$ it is carried out $f(x+T) \geq f(x)$ (respectively $f(x+T) \leq f(x)$). \diamond

But the fact, that $f(x)$ is $Z(T)$ -monotonous function, not implies that the sequence $f(n)$ is $Z(k)$ -monotonous. E.g., the function $\varphi(x) = \ln x + x \sin^2 x$ is $Z(2\pi)$ -monotonously increasing for $x > 0$, however for any natural k it is not $Z(k)$ -monotonous. Therefore it is necessary to introduce the concept of the strong (or very) Z -monotony.

Definition 3. Function $f(x)$ is called Zv -monotonously¹ increasing (decreasing) on set \mathfrak{D} , if there exists $T > 0$ such that $f(x+T+\tau) \geq f(x)$ (respectively $f(x+T+\tau) \leq f(x)$) for all $x \in \mathfrak{D}$, and for all $\tau > 0$. \diamond

Let us introduce the parameter of Zv -monotonous increasing [decreasing] function on set \mathfrak{D} : $Par_{Zv}(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{T > 0 : \forall \tau > 0, \forall x \in \mathfrak{D}, f(x+T+\tau) \geq [\leq] f(x)\}$. If $Par_{Zv}(f(x)) = 0$, then $f(x)$ is monotonous in usual sense.

If $f(x)$ is Zv -monotonous functions $f(x)$ on a set \mathfrak{D} , then there exists the monotonous² function $\varphi(x)$, such that $\forall t \in \mathfrak{D}$ the value $f(t)$ is between numbers $\varphi(t)$ and $\varphi(t+T)$, where $T \geq Par_{Zv}(f(x))$. Therefore for the proof of Zv -monotonous increase (decrease) of function $f(x)$ it is enough to find two monotonous increasing (or decreasing) functions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, such that $\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x)$ and there exists $T > 0$ such that $\varphi_1(x+T) > \varphi_2(x)$ for all $x \in \mathfrak{D}$ (here $T \geq Par_{Zv}(f(x))$). In most cases it is difficult to define parameter Zv -monotonous function, but it is possible to obtain an estimation of this parameter.

Example 3. Let $0 < \alpha \leq 1$ and $p(x)$ is bounded: $|p(x)| < M$. Then $f(x) = x^\alpha + p(x)x^{\alpha-1}$ is Zv -monotonously increasing for $x > \frac{(1-\alpha)M}{\alpha}$. \square

Theorem 4. If $f(x)$ Zv -monotonously decreases and $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ then

a series $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n f(n)$ converges. \square

¹ Z -very-monotonously.

²Non-strict monotonicity means: $\varphi(x)$ is monotonous on \mathfrak{D} , if $\forall a < b \in \mathfrak{D}, \varphi(a) \leq \varphi(b)$; or $\forall a < b \in \mathfrak{D} \varphi(a) \geq \varphi(b)$.

Proof. Let us find some odd number $2w - 1 \geq Par_{Zv}(f(x))$. Then $\{f(n)\}$ is $Z(2w - 1)$ -monotonous, and $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n f(n)$ converges. ■

Example 4. The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\beta}{n+p(n)}$ converges, if $0 \leq \beta < 1$ and the function $p(x)$ is bounded (see Example 3). □

Example 5. The function $g(x) = \frac{1}{x+2 \cos x}$ is Zv -monotonous and $Par_{Zv}(g(x)) \leq 2\pi < 7$. Hence, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n+2 \cos n}$ is convergent Z -series. So, the series remainder $R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n+2 \cos n} \leq a_{m+1} + a_{m+3} + a_{m+5} + a_{m+7}$. This estimate and bounds for $Par_{Zv}(g(x))$ can be improved. □

4. On the accuracy of the estimation of the remainder of L -series and Z -series.

For a long time it is noticed, that the estimation (2) in most cases gives very good accuracy. But, as the L -series which research differently as by means of a criterion (theorem) of Leibniz is impossible, its converge usually very slowly, and it would be desirable to have a method of specification of estimations from Corollary 1 or Remark 2.

Example 6. For a well-known series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ the estimation (2) gives an inequality $|R_m| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \leq R_m^L = \frac{1}{m+1}$. More accurately: $|R_m| = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(m+2k-1)(m+2k)}$; $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m+2}{m+1} \right) < |R_m| < \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m}{m-1} \right)$; $|R_m| \sim \frac{1}{2m}$ as $m \rightarrow \infty$. So, the relative error of (2) is about $\frac{1}{2}$. □

Example 7. Let's consider another L -series: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{if } n = 2k - 1; \\ \frac{1}{k} - \frac{1}{2k}, & \text{if } n = 2k, \end{cases}$ or $a_n = \frac{1}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - \frac{1+(-1)^n}{2^{\frac{n}{2}+1}}$. For $n > 7$, $a_n \downarrow 0$, and $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1$.

Further, $R_n = \begin{cases} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k}, & \text{if } n = 2k - 1; \\ \frac{1}{2k}, & \text{if } n = 2k; \end{cases} \quad |R_{2n-1}| \sim \frac{2}{n+1}, \quad |R_{2n}| \sim \frac{1}{2^n}$, and accuracy of an estimation has a big fluctuations. In this case it is possible to speak about unsatisfactory accuracy of an estimation (2). The presented case has some similarity to Example 2. □

Theorem 5. *If the sequence $\{a_n\}$ monotonously decreases to 0 ($a_n \downarrow 0$) at $n > n_0$, and at $n > n_0$ the condition $a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ is satisfied, then for $m > n_0$, $\frac{1}{2}a_{m+1} \leq |R_m| \leq \frac{1}{2}a_m$. \square*

We skip the proof (see [1]).

Corollary 2. *For a $Z(p)$ -series ($p = 2w - 1$) $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ it is possible*

to give the following general estimation of the remainder of a series:

$R_m = (-1)^m(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \dots - \delta_{p-1} + \delta_p)$, where δ_k is a remainder of L -series. Thus, $\frac{1}{2}a_{n+i} \leq \delta_i \leq a_{n+i}$. Therefore

$$\begin{aligned} |R_m| &\leq a_{m+1} - \frac{1}{2}a_{m+2} + a_{m+3} - \frac{1}{2}a_{m+4} + \dots - \frac{1}{2}a_{m+p-1} + a_{m+p} \leq \\ &\leq \max_{s=0, \dots, w} \{a_{m+2s-1}\} \cdot \frac{p+1}{2} - \frac{1}{2} \min_{s=1, \dots, w-1} \{a_{m+2s}\} \cdot \frac{p-1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

In Example 5 we have: a series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n+2 \cos n}$ converges, and $|R_m| \lesssim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}$.

5. Some remarks

Theorem 1 can be generalized by different natural way. For example, let denote the series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ($a_k \neq 0$ for all $k \in \mathbb{N}$) as a w -periodical-single series if for some $w \in \mathbb{N}$ it is carried out for all $k > k_0$ $\text{sign}(a_k) = -\text{sign}(a_{k+w})$, here $\text{sign}(a_k) = 1$ if $a_k > 0$ and $\text{sign}(a_k) = -1$ if $a_k < 0$. Then if consequence $\{|a_k|\}$ is a $Z(w)$ -monotonously decreasing to zero, then the series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converges. The estimates for the remainder of this series can be found by the reasonings above. This example include the situation when some subseries (L -series) of Z -series are zero. In other words, the w -periodical-single series can be transformed to the $Z(2n - 1)$ -series by addition of some quantity of zero-series.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 17-01-00633 A. Author expresses gratitude to Professor V.N.Chubarikov (Department of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University).

References

1. *Zverkina, G. A.* On a generalization of the Leibniz theorem // Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]. — 2014. — No. 2. — P. 123–138. (in Russian)

УДК 519.218.23

Предельные теоремы для ограниченных ветвящихся процессов

Г. К. Кобаненко*

** Кафедра математической статистики и случайных процессов,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119992*

Аннотация. Указаны условия, при которых траектории ограниченного ветвящегося процесса при условии невырождения с вероятностью 1 либо лишь конечное число раз выходят на верхнюю границу, либо бесконечно много раз выходят на верхнюю границу, либо совпадают с верхней границей, начиная с некоторого случайного момента.

Ключевые слова: ограниченный ветвящийся процесс, поведение траекторий, предельные теоремы.

1. Введение

Ветвящимся процессом Гальтона – Ватсона называется случайный процесс $\{\mu_t; t = 0, 1, 2, \dots\}$ с дискретным временем, определяющийся рекуррентными соотношениями

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_{t+1} = \begin{cases} \nu_1^{(t)} + \nu_2^{(t)} + \dots + \nu_{\mu_t}^{(t)}, & \text{если } \mu_t > 0, \\ 0, & \text{если } \mu_t = 0, \end{cases}$$

в которых $\nu_i^{(t)}$ ($t \geq 0, i \geq 1$) — независимые в совокупности неотрицательные одинаково распределенные случайные величины, принимающие целочисленные значения и определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Этот процесс можно рассматривать как модель изменений численности популяции частиц. В такой популяции первоначально имеется одна частица: $\mu_0 = 1$. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число потомков $\nu_1^{(0)}$ в соответствии с распределением

$$\mathbf{P}(\nu_1^{(0)} = m) = p_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

Каждая из новорожденных частиц также имеет единичную продолжительность жизни и в конце ее производит (независимо от остальных частиц) случайное число потомков в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_m, m = 0, 1, \dots\}$. Таким образом, при $t \geq 0$

$$\mu_{t+1} = \nu_1^{(t)} + \nu_2^{(t)} + \dots + \nu_{\mu_t}^{(t)},$$

где $\nu_i^{(t)}$ — число потомков i -й частицы t -го поколения.

Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона является цепью Маркова с множеством состояний $\{0, 1, \dots\}$ и поглощающим состоянием 0. Попадание траектории ветвящегося процесса в состояние 0 называется вырождением процесса. Вероятность вырождения ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона q определяется равенством

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mu_t = 0)$$

и является наименьшим неотрицательным корнем уравнения $f(s) = s$, где $f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m s^m$ — производящая функция распределения числа потомков одной частицы. Основной задачей теории ветвящихся процессов является исследование вероятностных свойств их траекторий. Эти свойства в значительной мере определяются параметром $A = \mathbf{M}\nu_i^{(t)} = f'(1)$ — математическим ожиданием числа непосредственных потомков одной частицы. Если $A < 1$, то процесс называется докритическим, если $A = 1$ — то критическим, если $A > 1$ — то надкритическим. Если $A < 1$ или $A = 1$ и $f(s) \neq s$, то вероятность вырождения $q = 1$, если же $A > 1$, то $q < 1$.

В настоящей работе рассматривается одна из модификаций классического ветвящегося процесса: ограниченный ветвящийся процесс $\{\xi_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$. Он строится по тем же случайным величинам $\nu_i^{(t)}$, что в (1), и по целочисленной функции $g(t)$, $t = 1, 2, \dots$, принимающей целые положительные значения:

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_{t+1} = \begin{cases} \min(g(t+1), \nu_1^{(t)} + \nu_2^{(t)} + \dots + \nu_{\xi_t}^{(t)}), & \text{если } \xi_t > 0, \\ 0, & \text{если } \xi_t = 0; \end{cases}$$

Другими словами, ограниченный ветвящийся процесс отличается от процесса Гальтона–Ватсона тем, что для каждого $t \geq 1$ из совокупности потомков частиц $(t-1)$ -го поколения удаляются «лишние» частицы, если это число потомков оказывается больше $g(t)$.

Данная модификация ветвящихся процессов довольно слабо изучена. Одна из трудностей ее изучения состоит в том, что произвольность ограничивающей функции $g(t)$ не позволяет в полной мере применять аппарат производящих функций, который хорошо работает в классическом случае. Единственным результатом для ограниченных ветвящихся процессов с дискретным временем является теорема, доказанная А.М.Зубковым в [1]:

Теорема 1 *Вероятность невырождения надкритического ограниченного ветвящегося процесса ξ_t положительна тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{t=1}^{\infty} q^{g(t)}$, где q — вероятность вырождения обычного процесса Гальтона–Ватсона с той же производящей функцией числа потомков одной частицы.*

Аналогичная теорема для ограниченных ветвящихся процессов с непрерывным временем была доказана в [2]. В настоящей работе найдены условия на ограничивающую функцию $g(t)$, при которых траектория ограниченного ветвящегося процесса при условии невырождения почти наверное бесконечно много раз выходит на верхнюю границу, либо почти наверное, начиная с некоторого случайного момента, полностью совпадает с верхней границей.

2. Основная часть

Первое утверждение задает необходимые и достаточные условия на процесс ξ_t и ограничивающую функцию $g(t)$ для того, чтобы траектория процесса почти наверное достигала верхней границы бесконечное число раз.

Теорема 2 Пусть $A = \mathbf{M}\nu_1^{(1)} > 1$, $\mathbf{M}\nu_1^{(1)} \ln(\nu_1^{(1)} + 1) < \infty$, $\mathbf{P}\{\nu_1^{(1)} = A\} < 1$, q — наименьший корень уравнения $f(s) = s$, где $f(s) = \mathbf{M}s^{\nu_1^{(1)}}$ — производящая функция числа потомков одной частицы, и ряд $\sum_{t=1}^{\infty} q^{g(t)}$ сходится. Тогда

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{A^t} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(|\{t : \xi_t = g(t)\}| = \infty | \liminf_{t \rightarrow \infty} \xi_t > 0) = 1$$

Следствие 1 Если выполнены условия теоремы 2 и $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{A^t} > 0$, то

$$\mathbf{P}(|\{t : \xi_t = g(t)\}| < \infty | \liminf_{t \rightarrow \infty} \xi_t > 0) = 1.$$

Другими словами, процесс ξ_t почти наверное достигает границы $g(t)$ лишь конечное число раз.

Следующие две теоремы задают достаточные условия на процесс ξ_t и ограничивающую функцию $g(t)$ для того, чтобы траектория процесса почти наверное совпадала с верхней границей, начиная с некоторого случайного момента времени.

Теорема 3 Пусть $A = \mathbf{M}\nu_i^{(t)} > 1$, $\mathbf{M}\nu_i^{(t)} \ln(\nu_i^{(t)} + 1) < \infty$ и $b = \mathbf{M}|\nu_i^{(t)} - \mathbf{M}\nu_i^{(t)}|^{1+\varepsilon} < \infty$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Пусть ограничивающая функция $g(t)$ такова, что:

- 1) ряд $\sum_{t=1}^{\infty} q^{g(t)}$ сходится,
- 2) существует такая неотрицательная последовательность $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$, что ряд $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{c_t^{1+\varepsilon}}$ сходится и $g(t+1) < Ag(t) - c_t(Ag(t))^{1+\varepsilon}$, начиная с некоторого T ;

$$3) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{A^t} = 0,$$

$$\text{Тогда } \mathbf{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_t - g(t)) = 0 \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} \xi_t > 0 \right) = 1.$$

Пример. Пусть $g(t) = \left[\frac{A^t}{\ln t} \right]$ и существует $\mathbf{M}(\nu_i^{(t)})^2 < \infty$ Проверим выполнение условий теоремы.

1) Ряд $\sum_{t=1}^{\infty} g \left[\frac{A^t}{\ln t} \right]$ сходится по признаку Даламбера.

$$2) \frac{g(t)}{A^t} \leq \frac{1}{\ln t} = o(1) \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{A^t} = 0.$$

$$\begin{aligned} 3) g(t+1) &\leq \frac{A^{t+1}}{\ln(t+1)} = A \frac{A^t}{\ln t \ln(t+1)} < A \frac{A^t}{\ln t} \frac{\ln t}{\ln t + \frac{1}{t+1}} = \\ &= A \frac{A^t}{\ln t} \frac{1}{1 + \frac{1}{(t+1)\ln t}} < A \frac{A^t}{\ln t} \left(1 - \frac{1}{2(t+1)\ln t} \right) = \\ &= A \frac{A^t}{\ln t} - A \frac{A^t}{\ln t} \frac{1}{2(t+1)\ln t} < A(g(t) + 1) - A(g(t) - 1) \frac{1}{2(t+1)\ln t} = \\ &= Ag(t) - \sqrt{Ag(t)} \left(\frac{\sqrt{Ag(t)}}{2(t+1)\ln t} - \frac{\sqrt{A}}{2(t+1)\sqrt{g(t)}\ln t} \right) < Ag(t) - t\sqrt{Ag(t)}. \end{aligned}$$

Пусть $c_t = t$. Тогда для границы $g(t) = \left[\frac{A^t}{\ln t} \right]$ выполнены все условия теоремы 2, а значит, при условии невырождения траектории процесса ξ_t почти наверное, начиная с некоторого случайного момента, совпадают с $g(t)$.

Можно доказать похожую теорему без предположения о существовании степенных моментов порядка выше первого при более сильных условиях, налагаемых на функцию $g(t)$.

Теорема 4 Пусть $A = \mathbf{M}\nu_i^{(t)} > 1, \mathbf{M}\nu_i^{(t)} \ln(\nu_i^{(t)} + 1) < \infty$. Пусть ограничивающая функция $g(t)$ такова, что:

$$1) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{\ln(t)} = \infty,$$

2) существует $B \in (0; A)$ такое что, начиная с некоторого t , $g(t+1) \leq Bg(t)$.

$$\text{Тогда } \mathbf{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_t - g(t)) = 0 \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} \xi_t > 0 \right) = 1$$

Последняя теорема задает необходимое условие на функцию $g(t)$ для того, чтобы траектория процесса почти наверное совпадала с верхней границей, начиная с некоторого случайного момента времени.

Теорема 5 Пусть $M\nu_1^{(1)} = A > 1$ и $D\nu_1^{(1)} = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Тогда если $P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_t - g(t)) = 0 \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} \xi_t > 0\right) = 1$, то последовательность $a_t = \frac{g(t)}{A^t}$ монотонно убывает к 0, начиная с некоторого момента.

3. Заключение

Результат данной работы представляет из себя набор необходимых и достаточных условий для определенного поведения траекторий ограниченного ветвящегося процесса. Данный результат является новым для малоисследованной модели и развивающим аналитические и вероятностные методы.

Благодарности

Автор признателен А. М. Зубкову за постановку задач и конструктивную критику.

Литература

1. Зубков А. М. Условия вырождения ограниченного ветвящегося процесса // Математические заметки. — 1970. — Т. 8, вып. 1. — Р. 9–18.
2. Зубков А. М. Условие вырождения ограниченного ветвящегося процесса с непрерывным временем // Теория вероятн. и ее примен. — 1972. — Т. 17, вып. 2. — Р. 296–309.

UDC 519.218.23

Limit theorems for bounded branching processes

G. K. Kobanenko*

* Department of Mathematical Statistics and Stochastic Processes,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

This paper contains the conditions for trajectories of a bounded branching process under a condition of non-degenerating either to have finite or infinite number of reaching the top bound level, or coincide with the top bound level starting from some random moment of time with probability 1.

Keywords: bounded branching process, trajectories behavior, limit theorem.

UDC 519.218.3, 519.23

Adaptive Splitting Method for Failure Estimation in Controllable Degradation System

A. B. Borodina^{*†}, D. V. Efrosinin^{‡§}, E. V. Morozov^{*†}

** Institute of Applied Mathematical Research
Karelian Research Center RAS*

Pushkinskaya str. 11, Petrozavodsk, Karelia, 185910, Russia

*† Department of Mathematics and Information Technologies
Petrozavodsk State University*

Lenin Str. 33, Petrozavodsk, Karelia, 185910, Russia

*‡ Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia*

Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

*§ Institute of Control Sciences, RAS
Profsoyuznaya str. 65, Moscow, 117997, Russia*

Abstract. The work is devoted to the problem of estimating the probability of failure which is regarded as a rare event in the system with gradual and instantaneous failures. Also consider a regenerative degradation process whose characteristics must be obtained by simulation as well. The main intention of this work is to apply the modification of special speed-up technique (adaptive splitting method) to obtain the required point and interval estimates.

Keywords: rare event simulation, adaptive splitting method, degradation process, failure.

1. Introduction

This work deals with the splitting method for effective estimation of the failure probability and other characteristics of a degradation process composed by a sum of successive phases. If the degradation process is Markovian, then some parameters may be calculated analytically. But a problem arises for a non-Markov process. To this end, in more general cases we need to use simulation. We propose the adaptive algorithm for degradation process which allows to solve the problem of setting the number of levels and retrials and how the levels should be chosen before starting the simulation. The proposed splitting method provides a good approximation of the analytical results, where they are available.

2. Failure estimation problem for degradation process

Consider the main notation associated with the degradation process $X := \{X(t)\}_{t \geq 0}$ with a finite state space $E = \{0, 1, \dots, L, \dots, M, \dots, K; F\}$ illustrated in the figure Fig. 1. By construction the process X has a regenerative structure. We will consider the regeneration points $\{\tau_n\}$ as the

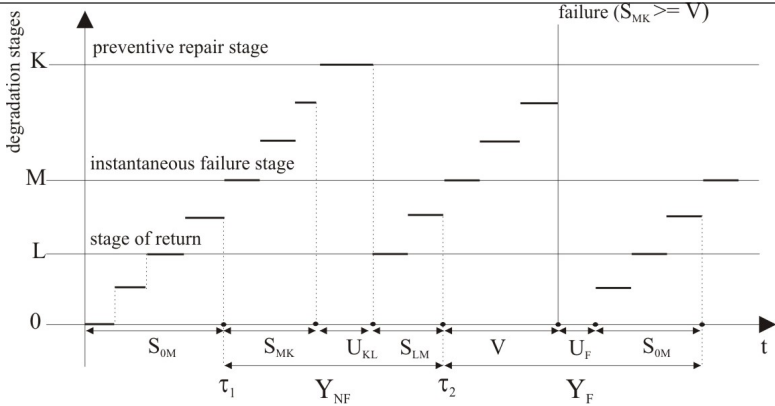


Figure 1. Realization of the degradation process with two types of cycle

return times to state M . Denote by T_i the transition time from state i to $i + 1, i \in E \setminus \{K, F\}$. We assume T_i to be independent. Then

$$S_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} T_k, 0 \leq i \leq K - 1, j > i,$$

is the transition time from state j to state i . After the process X hits state M , an instantaneous failure may happen during period V , otherwise, a preventive repair occurs during time S_{MK} . Thus, there are two types of the regeneration cycles of the process X .

Denote by $Y_F = V + U_F + S_{0M}$ the length of the (generic) regeneration cycle with a failure, and $Y_{NF} = S_{MK} + U_{KL} + S_{LM}$ the length of a cycle ended by the maintenance repair. An unconditional (generic) length of a regeneration cycle Y is

$$Y = Y_F \cdot I_{\{V \leq S_{MK}\}} + Y_{NF} \cdot I_{\{S_{MK} < V\}},$$

where I denotes indicator function.

The main task is to estimate the probability of failure during a regeneration cycle

$$p_F = \mathbb{P}(S_{MK} \geq V) = \int_0^\infty (1 - F_{MK}(t)) dF_V(t),$$

where $F_{MK}(t) = \mathbb{P}(S_{MK} \leq t)$ and $F_V(t) = \mathbb{P}(V \leq t)$.

3. Conclusions

According to [1] we assume that failure is a rare event so the crude Monte Carlo simulation turns out to be time-consuming.

In [2] we have previously used the modification of multilevel regenerative splitting to estimate a small failure probability related to a degradation process. Furthermore, the dynamics of the degradation process is highly adapted to the application of this method.

Experimental results show that the proposed method gives a significant reduction of simulation time in comparison with the Monte-Carlo simulation and also provide a good approximation of the analytical results.

However, the question of determining the thresholds and splitting factors is still the open problem. The choice of these parameters strongly affects the efficiency of the estimation. To solve this problem we propose to modify the adaptive splitting method (see in [3]) and apply it for the case when the rare threshold for S_{MK} is a random variable. This situation is not typical for rare event problems solved by splitting method, since the rare threshold must be fixed.

Acknowledgments

The work is supported by the RFBR, projects 15-07-02341, 15-07-02354, 15-07-02360, 16-37-60072, 16-37-60072 mol_a_dk. The work was supported by the Ministry of Education of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008 of 24 June 2016).

References

1. *Efrosinin D. V., Farhadov M. P.* Optimal management of the system with the gradual and sudden failures // Dependability. — 2009. — No. 1 (28). — P. 27-42. (in Russian)
2. *Borodina A., Efrosinin D, Morozov E.* Accelerated regenerative simulation of degradation process in the system with gradual and sudden failures. // Proceedings of the XIX International Conference: Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation (DCCN-2016), Moscow, 2016. — Vol. 3. — P. 89-91.
3. *Rubinstein R. Y., Kroese D. P.* Simulation and the Monte Carlo method. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2017. 396 p.

УДК 519.218.31

Об условиях инвариантности стационарного распределения СМО с ресурсами относительно распределения объема заявки

Э. С. Сопин*[†]

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклуто-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

[†] *Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН
ул. Вавилова 44 кор.2, Москва, Россия, 119333*

Аннотация. В данной работе проведен анализ системы массового обслуживания с ограниченными ресурсами, в которой интенсивности обслуживания и поступления заявок зависят от состояния системы. Для рассматриваемой модели были получены условия, при которых стационарное распределение системы не зависит от распределения объема работы, необходимого для обслуживания заявки, а определяется только его средним значением.

Ключевые слова: система массового обслуживания, ограниченные ресурсы, инвариантность.

1. Введение

В данной работе исследуется вопрос об инвариантности относительно распределения времени обслуживания заявки стационарного распределения многолинейной системы с ресурсами. Ранее аналогичная теорема была доказана для СМО с ресурсами с постоянными интенсивностями поступления и обслуживания [1]. В [2] было предложено обобщение модели с ресурсами, в которой интенсивности обслуживания и поступления зависят от состояния системы, и показано, что в случае экспоненциального времени обслуживания и пуассоновского входящего потока стационарное распределение также имеет мультипликативный вид. В данной работе получены условия, при которых для обобщенной модели справедливо свойство инвариантности относительно распределения времени обслуживания, на основе методов, использовавшихся при анализе классических моделей [3], [4].

2. Описание модели

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания ёмкости $N \leq \infty$. Предположим, что поступающий поток является пуассоновским с параметром λ_k , зависящим от числа k заявок в системе, а объёмы работ, которые необходимо выполнить для обслуживания заявок, независимы между собой, от поступающего потока, и экспоненциально распределены с параметром $\mu = \frac{1}{b}$. Предположим также, что прибор обслуживает заявки с постоянной, зависящей от числа k

заявок в системе, скоростью σ_k . Все заявки, находящиеся в системе, обслуживаются прибором одновременно, поэтому скорость обслуживания каждой заявки равна $\frac{\sigma_k}{k}$. К примеру, при $\sigma_k = 1, 1 \leq k \leq N$ рассматриваемая СМО представляет собой аналог системы с разделением процессора, а при $\sigma_k = k, 1 \leq k \leq N$ – аналог полнодоступного пучка. Система располагает ограниченным объемом ресурсов M типов и функционирует следующим образом.

1. Каждой находящейся в системе заявке требуется некоторое количество ресурса каждого типа.
2. Поступившая заявка теряется, если в момент поступления количество требуемого ей ресурса превышает количество свободного ресурса этого типа.
3. В момент поступления заявки объем свободного ресурса каждого типа уменьшается на величину ресурса, выделенного этой заявке.
4. В момент ухода заявки объем свободного ресурса каждого типа увеличивается на величину ресурса, выделенного этой заявке.

Обозначим R_m общий объем ресурса типа m , и $\mathbf{r}_j = (r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jM})$ вектор объемов ресурсов, необходимых j -й поступившей заявке $j = 1, 2, \dots$. Будем считать, что случайные векторы \mathbf{r}_j не зависят от процесса поступления и обслуживания заявок, независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $F(\mathbf{x})$.

Будем считать, что поступившие заявки располагаются в очереди в порядке поступления и опишем состояние системы в момент t процессом $X(t) = (\xi(t), \gamma(t))$. Здесь $\xi(t)$ – число заявок в системе и $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_\xi(t))$, где $\gamma_i(t)$ – вектор объемов ресурсов, занимаемых i -ой заявкой. Состояние системы может измениться только в моменты $t_j, j = 1, 2, \dots$, когда либо в систему поступает, либо её покидает заявка.

Введем обозначения для стационарных вероятностей процесса $X(t)$:

$$p_0 = P\{\xi(t) = 0\},$$

$$P_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = P\{\xi(t) = k, \gamma_1(t) \leq \mathbf{x}_1, \dots, \gamma_k(t) \leq \mathbf{x}_k\},$$

$$1 \leq k \leq N, \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \leq \mathbf{R}.$$

Стационарное распределение системы имеет следующий вид [2]:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^N F^{(k)}(\mathbf{R}) b^k \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i} \right)^{-1}, \quad (1)$$

$$P_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = p_0 F(\mathbf{x}_1), \dots, F(\mathbf{x}_k) b^k \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}, \quad (2)$$

$$1 \leq k \leq N, \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \leq \mathbf{R}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \geq \mathbf{0},$$

где $F^{(k)}(\mathbf{x})$ есть k -кратная свертка функции распределения $F(\mathbf{x})$.

3. Условия инвариантности относительно распределения объемов работ

Рассмотрим поведение системы в случае, когда распределение объемов работ не является экспоненциальным, а распределено в соответствии с ФР $B(x)$ с тем же средним $\mu = \frac{1}{b}$. Состояние системы в момент t описывается случайным процессом $Y(t) = (\xi(t), \gamma(t), \beta(t))$, где, как и прежде, $\xi(t)$ – число заявок в системе, $\gamma(t)$ описывает объёмы ресурсов, занимаемых каждой заявкой, а третья компонента $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_{\xi(t)}(t))$, где $\beta_i(t)$ – объем обслуженной работы i -й заявки. Будем считать, что поступившая заявка может получить любой номер с равной вероятностью, т.е. при поступлении заявки с требованием \mathbf{r} система переходит из состояния $(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k))$ в одно из состояний $(k + 1, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_k), 0 \leq i \leq k$ с вероятностью $\frac{1}{k+1}$. Будем рассматривать поведение системы в стационарном режиме. Обозначим

$$Q(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)) = P\{\xi(t) = k, \gamma_1(t) \leq \mathbf{r}_1, \dots, \gamma_k(t) \leq \mathbf{r}_k, \beta_1(t) \leq x_1, \dots, \beta_k(t) \leq x_k\}.$$

Предположим, что существует плотность

$$q(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)) = \frac{\partial}{\partial x_1 \dots \partial x_k} Q(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)),$$

тогда выписав уравнения для переходов системы за малый промежуток времени Δt , после серии преобразований получим систему (3):

$$\begin{aligned} \lambda_0 q^*(0)F(\mathbf{R}) &= \sigma_1 \int_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \int_0^\infty q^*(1, d\mathbf{r}, x) dB(x), \\ \frac{\sigma_k}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\partial q^*(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k))}{\partial x_i} &+ \\ + \lambda_k \int_{\substack{0 \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ 1 \leq i \leq k}} q^*(k, d\mathbf{s}_1, \dots, d\mathbf{s}_k, (x_1, \dots, x_k)) F\left(\mathbf{R} - \sum_{i=1}^k \mathbf{s}_i\right) dB(x) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_k}{k+1} \times \\
&\times \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\substack{0 \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{r}_i, \\ 1 \leq i \leq k \\ \mathbf{s} \leq \mathbf{R} - \sum_{i=1}^k \mathbf{s}_i}} \int_0^\infty q^*(k+1, (d\mathbf{s}_1, \dots, d\mathbf{s}, \dots, d\mathbf{s}_k), (x_1, \dots, x, \dots, x_k)) dB(x), \\
&\sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}, 1 \leq k \leq N-1, \tag{3} \\
&\frac{\sigma_N}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial q^*(N, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), (x_1, \dots, x_N))}{\partial x_i} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&q^*(k+1, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_k)) = \\
&\frac{\lambda_k}{k+1} F(\mathbf{r}) q^*(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)), \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{r}_i \leq \mathbf{R}, 0 \leq k \leq N-1,
\end{aligned}$$

где $q^*(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)) = \frac{q(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k))}{(1-B(x_1)) \dots (1-B(x_k))}$.

Предположим, что вероятности $q^*(\cdot)$ не зависят от переменных x_1, \dots, x_k и имеют вид

$$q^*(k, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), (x_1, \dots, x_k)) = p_0 F(\mathbf{x}_1), \dots, F(\mathbf{x}_k) \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}. \tag{4}$$

Подставив (3) в систему уравнений (3), легко убедиться, что равенство достигается во всех уравнениях, кроме последнего. Последнее уравнение системы (3) принимает вид

$$p_0 F(\mathbf{x}_1), \dots, F(\mathbf{x}_k) F(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i} = \frac{\lambda_k}{k+1} p_0 F(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k F(\mathbf{x}_i) \frac{\lambda_{i-1}}{\sigma_i}. \tag{5}$$

Очевидно, что равенство в выражении (3) достигается только в случае $\sigma_k = k, 1 \leq k \leq N$. Следовательно, формулы (2) и (2) задают стационарное распределение процесса $Y(t)$, при этом они не зависят от распределения $B(x)$, а определяются только средним значением объема работы, необходимого для обслуживания заявки.

4. Заключение

В работе была исследована СМО с ресурсами, интенсивности поступления и обслуживания которой зависят от состояния системы. Было показано, что инвариантность стационарного распределения системы от распределения объема работ, приносимых заявкой, достигается только в случае, когда СМО функционирует по принципу полнодоступного пучка с ресурсами. В дальнейшем планируется доказать данный факт, не накладывая ограничений на существование плотности распределения.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 16-11-10227.

Литература

1. *Naumov V. A., Samouylov K. E., Sopin E. S.* On the insensitivity of stationary characteristics to the service time distribution in queuing system with limited resources // Proc. of IX International Workshop “Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics related to modeling of information systems”, АРТР+MS, 2015. — P. 36–40.
2. *Naumov V., Samouylov K.* Analysis of multi-resource loss system with state-dependent arrival and service rates // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 2017. — Vol. 31, no. 1. — P. 1–7.
3. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. — 1957. — Т. 2, вып. 1 — С. 106–116.
4. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.

UDC 519.218.31

On the insensitivity conditions of the queuing system with resources stationary distribution to distribution of customer workload volume

E. S. Sopin^{*†}

** Department of Applied Probability and Informatics,
RUDN University,*

Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

*† Institute of Informatics Problems, FRC CSC RAS
44-2 Vavilova Str., Moscow, 119333, Russia*

In the paper, we analyze a queuing system with limited resources and state-dependent arrival and service rates. For the considered model, we derive conditions of stationary probabilities insensitivity to distribution of customer workload volume. Under these conditions, stationary distribution depends on only average workload volume.

Keywords: queuing system, limited resources, insensitivity.

UDC 519.872.5, 519.216.24

Fluid Limit for Closed Queueing Network with Several Multi-Servers

S. V. Anulova*

* *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of
Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia*

Abstract. A closed network consists of several multi-servers with n customers. Service requirements of customers at a multi-server have a common cdf. State parameters of the network: for each multi-server empirical measure of the age of customers being serviced and for the queues the numbers of customers in them, all multiplied by n^{-1} .

Our objective: asymptotics of dynamics as $n \rightarrow \infty$. The asymptotics of dynamics of a single multi-server and its queue with an arrival process as the number of servers $n \rightarrow \infty$ is currently studied by famous scientists K. Ramanan, W. Whitt et al. Presently there are no universal results for general distributions of service requirements—the results are either for continuous or for discrete time ones; the same for the arrival process. We establish the asymptotics for a network in discrete time, find its equilibrium and prove convergence as $t \rightarrow \infty$.

Motivation for studying such models: they represent call/contact centers and help to construct them effectively.

Keywords: call/contact centers, queueing network, fluid limit approximation.

1. Introduction

1.1. Review of Investigated Contact Centers Models

In the last 15 years an extensive research in mathematical models for telephone call centers has been carried out, cf. References [2-6, 8–17] of [1]. For the state process were found fluid limits as the number of servers tends to infinity.

An important particular question is the convergence of the fluid limit to a stable state as time tends to infinity. For a discrete time model W. Whitt has found equilibrium states (a multitude) of the fluid model and proved the time convergence in a special case—for a primitive arrival process and for initial condition with empty multi-server and queue, [3, Section 7].

1.2. A New Model for Contact Centers and Its Fluid Limit with Equilibrium Behavior

We have suggested in [1] a more suitable model for contact centers. The number of customers is fixed. Customers may be situated in two states: normal and failure. There is a multi-server which repairs customers in the failure state. The repair time/the time duration of a normal state is a

random variable, independent and identically distributed for all customers. For a large number of customers and a suitable number of servers we have calculated approximately the dynamics of the normalized state of the system—its fluid limit. And in [2] we explored the convergence of the fluid limit as time tends to infinity and found its steady-state (or equilibrium). Now we establish the described properties for a generalized model: there are several repair multi-servers.

2. Closed Multi-Server Network with n Customers and Its Fluid Limit Equilibrium

2.1. Network Description

Consider a closed network consisting of n customers and N multi-servers. Multi-server 1 (further denoted MS1) consists of n servers (for the customers in the normal state), the time they service a customer has distribution G^1 . Multi-server i (further denoted MS*i*) consists of $s_n^i n$ servers with a number $s_n^i \in (0, 1)$ (for the customers in the failure state type i), the time they service a customer has distribution G^i , $i = 2, \dots, N$. The distributions G^i , $i = 1, \dots, N$, are discrete: they are concentrated on $\{1, 2, \dots\}$. Customers move from MS*i* to MS1, and from MS1 to MS*i* with probability p_i , $i = 1, \dots, N$. Service times are independent for all servers and all customers. We will investigate the behavior of the network as $n \rightarrow \infty$, in discrete time $t = 0, 1, 2, \dots$

In MS1 no queue may arise—if all n its servers are occupied then all customers are in MS1, therefore no new customer can arrive.

Denote the number of customers at a moment $t = 0, 1, \dots$ in MS*i* by $B_n^i(t)$ and in its queue by $Q_n^i(t)$, $i = 1, \dots, N$, and the number of customers in the whole queue $Q_n(t) = \sum_{i=1}^n Q_n^i(t) = n - \sum_{i=1}^n B_n^i(t)$.

$$B_n^i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_n^i(t, k) \text{ and } (s_n^i - B_n^i(t)/n)Q_n^i(t) = 0 \text{ for all } t \text{ and } n,$$

with $b_n^i(t, k)$ being the number of customers in the multi-server i at the moment t who have spent there time k , $i = 1, \dots, N$.

2.2. Fluid Limit Dynamics

Notations

Denote for $i = 1, \dots, N$:

- $G^{i;c}(k) := 1 - G^i(k)$ and $g^i(k) := G^i(k) - G^i(k-1)$, $k = 1, 2, \dots$
- E^i the expectation of the time the server in MS*i* services a customer:

$$E^i := \sum_{k=1}^{\infty} k g^i(k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} G^i(k).$$

— $\sigma_n^i(t)$ the number of service completions in MSi at time moment $t = 1, 2, \dots$

Fluid limit dynamics

Under certain conditions, specifically $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^i = s^i \in (0, 1), i = 2, \dots, N$, the fluid limit exists and its dynamics is described below (the proof for $N = 2$ is given in [1, Theorem 1]). As $n \rightarrow \infty$, for $i = 1, \dots, N$ and $t, k \geq 0$,

$$\frac{b_n^i(t, k)}{n} \Rightarrow b^i(t, k), \frac{\sigma_n^i(t)}{n} \Rightarrow \sigma^i(t), \frac{B_n^i(t)}{n} \Rightarrow B^i(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b^i(t, k) \geq 0,$$

$$\frac{Q_n^i(t)}{n} \Rightarrow Q^i(t), Q(t) \equiv \sum_{i=1}^N Q^i \geq 0, \sum_{i=1}^N B^i(t) + Q(t) = 1,$$

and for $i = 2, \dots, N$ $B^i(t) \leq s^i$ and $(s^i - B^i(t))Q^i(t) = 0$. The evolution of the vector $(b^i, \sigma^i, i = 1, \dots, N)(t), t = 0, 1, \dots$, proceeds with steps of t :

$$b^i(t, k) = b^i(t - 1, k - 1) \frac{G^{i;c}(k)}{G^{i;c}(k - 1)}, k = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, N,$$

$$b^i(t, 0) = \min\{s^i - B^i(t - 1) + \sigma^i(t), Q^i(t - 1) + p_i \sigma^1(t)\}, i = 2, \dots, N,$$

$$b^1(t, 0) = \sum_{i=2}^N \sigma^i(t), \sigma^i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b^i(t - 1, k - 1) \frac{g^i(k)}{G^{i;c}(k - 1)}.$$

2.3. Fluid Limit Equilibrium

Consider the discrete time fluid limit for the closed network model dynamics described in subsection 2.2.

Definition 1. A point in the state space of deterministic fluid processes is called “equilibrium” if fluid processes after reaching this point remain in it. Equilibrium points are described/characterized by sets $(b^{*i} = \{b^{*i}(k), k = 0, 1, \dots\}, Q^{*i}, i = 1, \dots, N)$ satisfying

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{*i}(k) \leq s^i, i = 2, \dots, N, \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=0}^{\infty} b^{*i}(k) + Q^{*i} \right) = 1.$$

Denote $B^{*i} = \sum_{k=0}^{\infty} b^{*i}(k), Q^* = \sum_{i=1}^N Q^{*i}, i = 1, \dots, N$.

Theorem 1. For the deterministic fluid processes there exists a nearly single equilibrium point. The characteristics $b^{*i}, B^{*i}, i \in \{1, 2, \dots, N\}, Q^*$ of this equilibrium point have the form:

1. $b^{*i}(0) = p_i b^{*1}(0), i \in \{2, \dots, N\}$.
2. $b^{*i}(k) = b^{*i}(0)G^{i;c}(k), k = 1, 2, \dots, i \in \{1, 2, \dots, N\}$.
3. $B^{*i} = b^{*i}(0)E^i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$.
4. $Q^* = \sum_{i=2}^N Q^{*i} = 1 - \sum_{i=1}^N B^{*i}$.

Denote $L := \{i \in \{2, \dots, N\} \mid \frac{p_i E^i}{\sum_{i=1}^N p_i E^i} > s^i\}$. Then

$$b^{*1}(0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N p_i E^i} \text{ if } L = \emptyset, \text{ or } \min_{i \in L} \frac{s^i}{p_i E^i} \text{ if } L \neq \emptyset,$$

and $\sum_{i \notin L} Q^{*i} = 0, \sum_{i \in L} Q^{*i} = Q^*$ with any selection of $\{Q^{*i}, i \in L\}$.

Corollary 1. *If in the practice it is desirable to organize the call/contact center with quick services for customers, that is, without queues, then each multi-server must be large enough: $s^i \geq \frac{p_i E^i}{\sum_{i=1}^N p_i E^i}, i = 2, \dots, N$.*

2.4. Fluid Limit Convergence to Equilibrium As $t \rightarrow \infty$

No strong result for universal convergence has been presented by W. Whitt in [3, Section 7], only starting from an empty multi-server and an empty queue. We shall transfer this simple theorem to our closed network model.

If MS1 is empty, MS*i* is filled with equilibrium parameters, where $i \in \{2, \dots, N\}, \sum_{i \notin L} Q^i = 0$, then MS*i*, $i \in \{2, \dots, N\}$, remain in this state, the queues decrease and MS1 adds with time steps customers of the next age with equilibrium parameters, and the state of MS1 converges monotonically to the unique equilibrium state: for $t = 1, 2, \dots$

$$b^1(t, k) = \begin{cases} b^{*1}(0)G^{1;c}(k), & 0 \leq k < t, \\ 0, & k \geq t. \end{cases}$$

Theorem 2. *Suppose the fluid limit satisfies at time $t = 0$ the following conditions: $B^1(0) = 0$ and $b^i(0, \cdot) = b^{*i}, i \in \{2, \dots, N\}$. Then the fluid limit converges to the equilibrium point as $t \rightarrow \infty$. Namely:*

— the state of MS*i* remains equilibrium:

$$b^i(t, \cdot) = b^{*i}, t = 0, 1, 2, \dots, i \in \{2, \dots, N\};$$

— the state of MS1 grows occupying its equilibrium state—with each time step adds the next age equilibrium parameter:

$$b^1(0, \cdot) \equiv 0 \text{ and for } t = 1, 2, \dots b^1(t, \cdot) = b^{*1}(\cdot)I_t \quad \text{with } I_t = I_{\{0,1,\dots,t-1\}};$$

— *the queue decreases—with each time step loses the amount of the previous age MS1 equilibrium parameter:*

$$Q(0) = 1 - \sum_2^N B^{*i}, \quad Q(t) = Q(t-1) - b^{*1}(t-1)$$

$$= 1 - \sum_2^N B^{*i} - \sum b^{*1}(\cdot)I_t = 1 - \sum_2^N B^{*i} - \sum_{l=0}^{t-1} b^{*1}(l),$$

and $Q^i(t) = Q^i(t-1) - p_i b^{*1}(t-1)$, $t = 1, 2, \dots$, $i \in \{2, \dots, N\}$.

Acknowledgments

This work was partially supported by RFBR grants No. 16-08-01285 A “Control of stochastic, deterministic, and quantum systems in phases of quick movement.” and No. 17-01-00633 A “Problems of stability and control in stochastic models”.

References

1. *Anulova S.* Approximate description of dynamics of a closed queueing network including multi-servers // 18th International Conference “Distributed Computer and Communication Networks”, Moscow, Russia, October 19–22, 2015. Communications in Computer and Information Science / Ed. by Vladimir Vishnevsky, Dmitry Kozyrev. — Springer, 2016. — P. 177–187.
2. *Anulova S.* Properties of Fluid Limit for Closed Queueing Network with Two Multi-servers // 19th International Conference “Distributed Computer and Communication Networks”, Moscow, Russia, November 21–25, 2016. Communications in Computer and Information Science / Ed. by Vishnevskiy, V. M.; Samouylov, K. E. & Kozyrev, D. V. — Springer, 2016. — P. 369–380.
3. *Whitt W.* Fluid models for multi-server queues with abandonments // Oper. Res. — 2006. — Vol. 54, no. 1. — P. 37–54, <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.1050.0227>

UDC 519.22

Statistical analysis of big data based on parsimonious models of high-order Markov chains

Yu. S. Kharin*

* *Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics,
Belarusian State University,
Independence av. 4, Minsk, 220030, Belarus*

Abstract. The paper is devoted to construction of parsimonious (small-parametric) models of high-order Markov chains and to statistical inferences on parameters of these models.

Keywords: high-order Markov chain, parsimonious model, statistical analysis, big data.

1. Introduction

Applications in genetics, finance, medicine, information protection and other fields need to develop theory of statistical modeling and analysis of big data presented in the form of long discrete time series. An universal long-memory model for such data is the homogeneous Markov chain of sufficiently large order s on some finite state space A , $|A| = N$, $2 \leq N < +\infty$. Unfortunately, the payment for this universality is exponential w.r.t. the order s number of parameters $D = O(N^{s+1})$. To identify such a model we need to have “big data” sets and the computational complexity of order $O(N^{s+1})$. To avoid this “curse of dimensionality” we propose to use the so-called parsimonious (“small-parametric”) models of high-order Markov chains that are determined by small number of parameters. This paper presents probabilistic properties and statistical inferences on known and new parsimonious models.

2. Parsimonious models of high-order Markov chains and statistical inferences

Let $x_t \in A$ be a homogeneous Markov chain of the order s on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ determined by the $(s+1)$ -dimensional matrix $P = (p_{i_1, \dots, i_s, i_{s+1}})$ of 1-step transition probabilities: $\mathbf{P}\{x_t = i_t | x_{t-1} = i_{t-1}, \dots, x_{t-s} = i_{t-s}\} = p_{i_{t-s}, \dots, i_{t-1}, i_t}$, $t > s$, $i_{t-s}, \dots, i_t \in A$.

The Jacobs – Lewis model with $D_{\text{JL}} = N + s - 1$ parameters $\pi = (\pi_k)$, $\lambda = (\lambda_i)$, $\rho \in [0, 1]$ is determined by the equation:

$$x_t = \mu_t x_{t-\eta_t} + (1 - \mu_t) \xi_t, \quad (1)$$

where $t > s$, $\{\xi_t, \eta_t, \mu_t\}$ are jointly independent random variables:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_t = 1\} &= 1 - \mathbf{P}\{\mu_t = 0\} = \rho; \\ \mathbf{P}\{\eta_t = i\} &= \lambda_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \quad \lambda_s \neq 0; \\ \mathbf{P}\{\xi_t = k\} &= \pi_k, \quad k \in A, \quad \sum_{k \in A} \pi_k = 1; \\ \mathbf{P}\{x_1 = k\} &= \dots = \mathbf{P}\{x_s = k\} = \pi_k, \quad k \in A. \end{aligned} \tag{2}$$

Theorem 1. *The discrete-valued time series x_t determined by (2), (2) is a homogeneous Markov chain of the order s with the initial probability distribution $\pi_{i_1, \dots, i_s} = \pi_{i_1} \cdot \dots \cdot \pi_{i_s}$ and the $(s + 1)$ -dimensional matrix of transition probabilities $P(\pi, \lambda, \rho) = (p_{i_1, \dots, i_{s+1}})$:*

$$p_{i_1, \dots, i_s, i_{s+1}} = (1 - \rho)\pi_{i_{s+1}} + \rho \sum_{j=1}^s \lambda_j I\{i_{s-j+1} = i_{s+1}\}, \quad i_1, \dots, i_{s+1} \in A,$$

where $I\{\cdot\}$ is the indicator function.

By Theorem 1 we construct some consistent estimators by the observations $X_n = (x_1, \dots, x_n)$ that are used as initial values in the iterative computation of the MLEs $\hat{\pi}, \hat{\lambda}, \hat{\rho}$; we also construct statistical tests for true values of parameters [1].

The Raftery MTD (Mixture Transition Distribution)-model:

$$p_{i_1, \dots, i_s, i_{s+1}} = \sum_{j=1}^s \lambda_j q_{i_j, i_{s+1}}, \quad i_1, \dots, i_{s+1} \in A, \tag{3}$$

where $Q = (q_{i,k})$ is a stochastic $(N \times N)$ -matrix, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)'$ is a discrete probability distribution, $\lambda_1 > 0$.

Theorem 2. *For the ergodic MTD-model (2) the 2-dimensional stationary probability distribution of the random vector $(x_{t-m}, x_t)'$, $1 \leq m \leq s$, has the form:*

$$\pi_{ki}^*(m) = \pi_k^* \pi_i^* + \pi_k^* \lambda_{s-m+1} (q_{ki} - \pi_i^*), \quad i, k \in A.$$

Using Theorem 2 we construct consistent asymptotically unbiased estimators $\tilde{Q}, \tilde{\lambda}$ [1].

Markov chain of the order s with r partial connections:

$$p_{J_1^{s+1}} = p_{j_1, \dots, j_s, j_{s+1}} = q_{j_{m_0^0}, \dots, j_{m_r^0}, j_{s+1}}, \quad J_1^{s+1} \in A^{s+1}, \tag{4}$$

where r is the number of connections; $M_r^0 = (m_1^0, \dots, m_r^0)$ is the integer valued vector with r ordered components $1 = m_1^0 < m_2^0 < \dots < m_r^0 \leq s$, called

the connection template; $Q = (q_{J_1^{r+1}})_{J_1^{r+1} \in A^{r+1}}$ is an $(r+1)$ -dimensional stochastic matrix. If $r = s$ we have the full-connected Markov chain of the order s .

For the model (2) we construct consistent statistical estimators for the parameters \hat{Q} , \hat{M}_r , \hat{r} , \hat{s} , statistical tests for the true values of Q ; the performance characteristics of these statistical inferences are also given [2].

Introduce the notation: $1 \leq L \leq s-1$, $K = N^L - 1$, $1 \leq M \leq K+1$ are some positive integers; $Q^{(1)}, \dots, Q^{(M)}$ are M different quadratic stochastic matrices of the order N : $Q^{(m)} = (q_{ij}^{(m)})$; $\langle J_n^m \rangle = \sum_{k=n}^m N^{k-n} j_k$ is the numeric representation of the multiindex $J_n^m = (j_n, j_{n+1}, \dots, j_m) \in A^{m-n+1}$.

Markov chain of conditional order:

$$p_{J_1^{s+1}} = \sum_{k=0}^K I\{\langle J_{s-L+1}^s \rangle = k\} q_{j_{b_k}, j_{s+1}}^{(m_k)}, \quad J_1^{s+1} \in A^{s+1}, \quad (5)$$

where $1 \leq m_k \leq M$, $1 \leq b_k \leq s-L$, $0 \leq k \leq K$, $\min_{0 \leq k \leq K} b_k = 1$, the sequence J_{s-L+1}^s is called the base memory fragment of the random sequence. Number of parameters: $D_{\text{MCCO}} = 2(N^L + 1) + MN(N-1)$.

Statistical inferences for this new model (2) are considered in [3].

One more new parsimonious model is the binary conditionally nonlinear autoregressive model.

Theoretical results for all these models are illustrated by results of computer experiments on simulated and real data.

References

1. *Kharin Yu.* Robustness in Statistical Forecasting. — Springer: N.Y., 2013.
2. *Kharin Yu., Piatlitski A.* Markov chain of order s with r partial connections and statistical inference on its parameters // Discrete Mathematics and Applications. — 2007. — Vol. 17, no. 3. — P. 295–317.
3. *Kharin Yu., Maltsev M.* Algorithms for statistical analysis of Markov chain with conditional memory depth. // Informatics. — 2011. — No. 1. — P. 34–43.

УДК 519.2

Бутстреп-моделирование при построении доверительных интервалов процентилей: применение к контролю качества высокотехнологичной продукции

И. В. Гадолина*, Н. Г. Лисаченко†

* Федеральное государственное бюджетное учреждение науки,
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова,
ул. Бардина, д.4, Москва, Россия, 119334

† Государственный научный центр РФ,
ОНИИ «Технология» им. А.Г.Ромашина,
Киевское шоссе, д.15, Обнинск, Калужская область, Россия, 249031

Аннотация. В качестве альтернативы существующим подходам предложен метод построения базисов (нижних границ доверительных интервалов первой и десятой процентилей распределений) с использованием бутстреп-моделирования. Доверительные интервалы процентилей являются важным интервальным показателем, применяющимся при сертификации высокотехнологичной продукции. Применение метода позволяет построить робастные оценки свободные от недостатков как параметрических, так и непараметрических подходов. На примерах реальных выборок прочностных показателей полимерных композиционных материалов приведено сопоставление значений В-базисов, определенных по применяемому в настоящее время методу и по вновь предложенному.

Ключевые слова: процентили, доверительные интервалы, прочность, бутстреп-моделирование.

1. Введение

Как говорится в ставшей уже классической книге [1] недостаточно только точечных оценок. Величина оценки меняется от испытания к испытанию и поэтому не может служить устойчивой характеристикой качества изделия. В большой мере ширина доверительных интервалов также зависит от числа испытаний. В связи с этим указывается на целесообразность использования доверительных интервалов для определения границ истинного значения с некоторой вероятностью.

Так, например, при сертификации высокотехнологичной продукции на ряде предприятий необходимо на основании проведенного эксперимента оценить доверительные интервалы некоторых процентилей, в частности, определить так называемые А- и В-базисы, что соответствует нижней границе 95% доверительного интервала 1% и 10% процентили соответственно.

Процентили $\gamma\%$ – это характеристики выборки, которые выражают ранги элементов массива в виде чисел от 1 до 100, $\gamma\% \in (0, 100)$, и являются показателем того, какой процент значений находится ниже

определенного уровня. В какой-то степени сами процентиля уже являются непараметрической интервальной оценкой. Тем не менее, процентиля – это случайная величина, которая определяется по выборке, в связи с чем необходима оценка ее вариабельности. Для вычисления доверительных интервалов значений процентиля, полученных по случайной выборке и используемых для построения A и B базисов, в настоящее время требуется сначала подобрать подходящий вид распределения, для каждого из которых разработаны весьма сложные зависимости [2].

2. Основная часть

В настоящей работе в качестве альтернативы методам [2] предлагается метод построения базисов с использованием статистического бутстрепа Бредли Эфрона [3]. Ранее аналогичный подход был рассмотрен в [4], где была исследована точность бутстреп-оценки доверительных интервалов квантилей в зависимости от распределения случайных величин.

Бутстреп применяется для оценки изменчивости различных показателей. Метод оценки базисов основан на многократном моделировании так называемых бутстреп-выборок на базе исходной выборки и опирается на интенсивное использование ЭВМ. Число бутстреп-выборок (обозначается R) должно быть велико: в настоящем исследовании применялось $R = 1000$. Элементы бутстреп-выборок образуются из элементов исходной, при этом осуществляется случайный выбор с возвращением, а размер каждой бутстреп-выборки равен размеру исходной. Для таких статистик, как $\gamma\%$ процентиля, математические выражения для дисперсии сложны и их оптимальность строго не доказана. В связи с этим представляет интерес сопоставление интервальных оценок бутстреп $\gamma\%$ процентиля с применяемыми до настоящего времени методами с целью рассмотрения возможности их внедрения в практику инженерных расчетов.

Исследование проводилось на примере построения доверительных интервалов для реальной задачи оценки вариабельности случайной величины σ_B - предела прочности образца при растяжении в МПа. Выборка включает 30 случайных величин. Среднее значение ... среднеквадратичное отклонение ... Число бутстреп-выборок выбрано $R = 1000$. Для каждой $k = 1, 2, \dots, R$ бутстреп-выборки оценивается 10% процентиля (Q_{10}). Таким образом образуется выборка размером R .

Теорема:

Если представить в виде вариационного ряда R значений случайной величины процентиля Q_{10} , то значения членов вариационного ряда с индексами LOW и UP ограничат $\alpha\%$ доверительный интервал для случайной величины Q_{10} . Значения индексов вариационного ряда вычисляются по формулам:

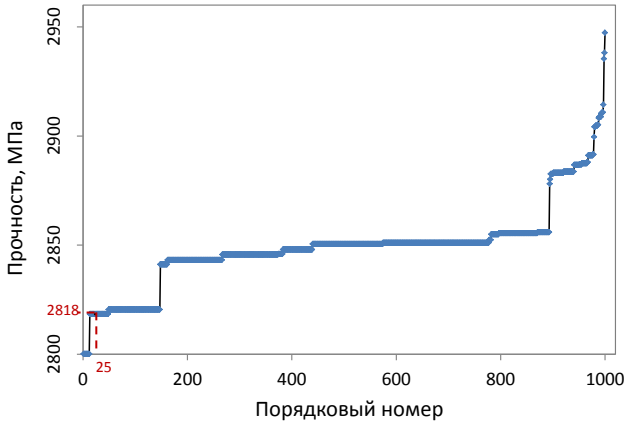


Рис. 1. Вариационный ряд значений 10% процентилей с указанием нижней 95% доверительной границы

$$LOW = \text{целая часть} \left[\frac{1-\alpha}{2} R \right]$$

$$UP = \text{целая часть} \left[\frac{1+\alpha}{2} R \right]$$

Следствие:

Для нижней границы 95% доверительного интервала 10% проценти Q10 при индексе $LOW = 25$ значение В-базиса составляет 2518 МПа.

Рисунок 1 поясняет данное рассуждение. Граница бутстреп показана штриховой линиями.

Преимуществом оценки с применением бутстреп-моделирования является их большая интуитивная понятность, а также свойство робастности.

Основные статистические характеристики и значения В-базисов для некоторых выборок случайных значений прочности на растяжение σ_B , МПа для пяти поставок продукции приведены в табл. 1. Показаны В-базисы, построенные по предлагаемому методу и по формулам [2]. Незначительные расхождения значений, вероятно, объясняются несоответствием распределений случайных величин нормальному закону, что предполагается в методе построения по формулам [2]. В этом смысле метод, основанный на моделировании бутстреп, возможно, является более надежным.

Таблица 1

Данные по случайной величине предела прочности при растяжении σ_B , МПа, по поставкам препрега HexPly

Номер поставки	Среднее значение	Станд. откл.	10% процентиль	В-базис бутстреп	В-базис [2]
7	3010	140	2820	2790	2690
8	2960	80	2850	2820	2780
9	2720	150	2510	2580	2400
10	2850	170	2630	2580	2460
11	2730	130	2580	2500	2410

3. Заключение

Разработан метод для построения доверительных интервалов процентилей случайной выборки в непараметрической постановке с использованием моделирования бутстреп. На примере выборок по значениям прочности некоторых поставок продукции показано, что значения нижней границы 95% доверительного интервала 10% процентиля прочности (В-базис), полученные по формулам [2] и при моделировании бутстреп близки (расхождения составляют от 1% до 7%). В дальнейшем предполагается провести апробирование разработанного метода на примере других физических величин. Из-за малого размера выборок ($n = 30$) по рассмотренным методам не удалось построить А-базисы. Для этой цели, возможно, понадобится разработка методов на основе математического моделирования.

Литература

1. *Беляев Ю. К., Гнеденко Б. Г., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
2. *Ллойд Э., Ледерман У.* Справочник по прикладной статистике. — М.: Финансы и статистика, 1989.
3. *Диаконис П., Эфрон Б.* Статистические методы с интенсивным использованием ЭВМ // В мире науки. — 1983. — No. 7. — С. 60–73.
4. *Yvonne H. S, Lee S.* Iterated smoothed bootstrap confidence intervals for population quantiles // The Annals of Statistics. — 2005. — Vol. 33, no. 1. — P. 437–462.

UDC 519.2

Bootstrap-modelling for building confidence intervals for percentiles: high-tech production quality control application

I. V. Gadolina*, N. G. Lisachenko†

** Federal budget - funded research*

*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences
Ul. Bardina 4, Moscow, 119334, Russia*

*† State Research Center of Russian Federation,
ORPE «Technologiya» named after A.G.Romashin,
Kievskoye Shosse 15, Obninsk, Kaluga Region, 249031, Russia*

As an alternative to currently used approaches the method of construction of basises (condence intervals for percentiles) using bootstrap simulation is proposed. Confidence intervals for percentiles are an important interval indicator, used for certification of high-tech production. The application of this method will allow building robust estimation free from the disadvantages of parametric and non-parametric approaches. The comparison of B-basises, defined by the used up to now and newly proposed methods examples of real samples of the strength parameters of the materials.

Keywords: percentiles, confidence intervals, robustness, bootstrap simulation.

Discrete gamma probability distribution approximation in retrial queues

E. A. Fedorova^{*†}, A. A. Nazarov^{*†}, S. V. Paul^{*}

** Tomsk State University,*

36 Lenina ave, Tomsk, 634050, Russian Federation

*† Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198, Russian Federation*

Abstract. In the paper, the retrial queueing system of $MMPP/M/1$ type is considered. The process of the number of calls in the system is analyzed. We propose the method of the discrete gamma approximation. The numerical analysis of comparison of distributions obtained by simulation and approximate ones for different values of the system parameters is presented.

Keywords: retrial queueing system, MMPP, discrete gamma distribution.

1. Introduction

Retrial queueing systems (or queueing systems with repeated calls) are the new models of queueing theory widely used for study of real telecommunication systems, cellular networks, call centres [1]. Retrial queues are characterized by the feature that an unserved call do not joint a queue and not leave the system immediately, but goes to some virtual place (orbit), then it tries to get service again after random time.

The comprehensive description and the detailed comparison of classical queueing systems and retrial queues are made by Falin and Artalejo in books [1, 2]. Asymptotic and approximate methods are also offered by Falin, Anisimov, Yang, Diamond, Aissani, etc.

In previous papers (e.g. [3]), we shown that the probability distribution of the number of calls in the orbit in various retrial queues has the gamma distribution form under heavy load condition. In addition, we proposed the gamma approximation method [4] which can be applied for more wide area (not only heavy load). Thus, in this paper, we try to improve the results of approximations by using the discrete analogue of gamma distribution.

2. Retrial queue $MMPP/M/1$

For the approximation method demonstrating, let us consider a single server retrial queueing system $MMPP/M/1$. The system structure is presented in Figure 1.

Primary calls arrive from outside at the system according to Markovian Modulated Poisson Process (MMPP) defined by matrix \mathbf{D}_0 and \mathbf{D}_1 [5, 6]. If a primary call finds the server free, it stays here with service time distributed exponentially with rate μ . Otherwise, the call goes to an orbit,

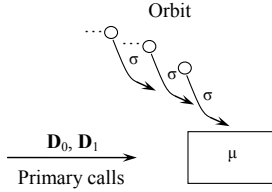


Figure 1. Retrial queuing system $MMPP/M/1$

where it stays during random time distributed by the exponential law with rate σ . After the delay, the call makes an attempt to reach the server again. If the server is free, the call gets the service, otherwise, the call instantly returns to the orbit.

The MMPP underlying process $n(t)$ is a Markov chain with continuous time and finite set of states $n = 1, 2, \dots, W$. We introduce the generator of the process $n(t)$ as matrix $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$ with elements q_{mv} , where $m, v = 1, 2, \dots, W$. The matrix \mathbf{D}_1 is diagonal with elements of conditional arrival rates λ_n ($n = 1, 2, \dots, W$). Thus, we write $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_n\}$. The fundamental rate of MMPP is defined as follows $\lambda = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{e}$.

Let $i(t)$ be the number of calls in the system and $k(t)$ be the server state:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{if the server is free,} \\ 1, & \text{if the server is busy.} \end{cases}$$

Denote $P(k, n, i, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\}$. The process $\{k(t), n(t), i(t) : t \geq 0\}$ is the multi-dimensional continuous time Markov chain. The following system of Kolmogorov equations for the stationary distribution $P(k, n, i) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, n, i, t)$ is derived for $i > 0, n = \overline{1, W}$

$$\begin{cases} -(\lambda_n + i\sigma - q_{nn})P(0, n, i) + \mu P(1, n, i + 1) + \sum_{v \neq n} P(0, v, i)q_{vn} = 0, \\ -(\lambda_n + \mu - q_{nn})P(1, n, i) + \lambda_n P(1, n, i - 1) + \lambda_n P(0, n, i - 1) \\ \quad + i\sigma P(0, n, i) + \sum_{v \neq n} P(1, v, i)q_{vn} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Let us introduce row vectors

$$\mathbf{P}_k(i) = \{P(k, 1, i), P(k, 2, i), \dots, P(k, W, i)\}.$$

By $\mathbf{H}_k(u) = \sum_i e^{ju_i} \mathbf{P}_k(i)$ denote the partial characteristic functions,

where $k = 0, 1$ and $j = \sqrt{-1}$. Then equations (2) have the following matrix form:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0(u) (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) + \mu e^{-ju} \mathbf{H}_1(u) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_1(u) (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}(1 - e^{ju}) - \mu \mathbf{I}) + e^{ju} \mathbf{H}_0(u) \mathbf{\Lambda} - j\sigma \mathbf{H}'_0(u) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2)$$

where \mathbf{I} is the identity matrix, $\mathbf{e} = \{1, 1, \dots, 1\}^T$ and $\mathbf{0} = \{0, 0, \dots, 0\}$.

The characteristic function of the number of calls in the system is defined as follows

$$h(u) = (\mathbf{H}_1(u) + \mathbf{H}_0(u))\mathbf{e}.$$

From system (2), we can not obtained the exact formula for $h(u)$. Thus, we propose the approximation method.

3. Discrete gamma approximation

In the previous papers, we proposed the Gaussian, quasi-geometric and gamma approximation methods for retrial queues [4, 7]. Here, we offer new type approximation by the discrete analogue of gamma distribution.

Definition. By the discrete gamma distribution we call a discrete probability distribution $Pg(i)$ for $i \geq 0$, which characteristic function has the following form

$$G(u) = \left(\frac{1 - \gamma}{1 - \gamma e^{ju}} \right)^\alpha, \quad (3)$$

with parameters $\alpha > 0$ and $0 < \gamma < 1$.

It is easy to show that the parameters α and γ are expressed in terms of the mean E and the variance var of the distribution $Pg(i)$ as follows

$$\gamma = 1 - \frac{E}{var}, \quad \alpha = E \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma}.$$

The method of the approximation consists in approximating by the discrete gamma distribution $Pg(i)$ which parameters are calculated via the known mean and the variance.

Note that mean and variance of the distribution $P(i)$ can be calculated approximately using some analytical methods or numerical algorithms.

We offer this type of approximation because the characteristic function of number of calls in the retrial queue $M/M/1$ (a particular case of considered model) has the form (3).

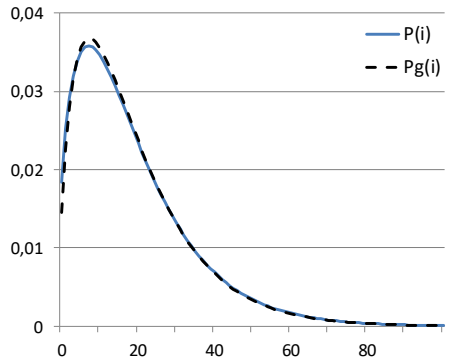


Figure 2. Comparison of the approximate (dashed line) and the empiric (solid line) distributions for $\sigma = 1$ and $\rho = 0.9$

4. Numerical analysis

Let us we present some numerical examples to demonstrate the applicability area of the approximation. We perform the system evolution simulation using software platform ODIS [9], which realizes a discrete-event simulation approach, and we compare statistical results with analytical ones derived in the paper.

In the example, let the service rate be $\mu = 1$, the arrival process be MMPP with 3 states and following parameters

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.364 & 0 & 0 \\ 0 & 0.727 & 0 \\ 0 & 0 & 1.091 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}.$$

It is holds that $\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} = \mu = 1$ for these parameters. Thus, the system load $\rho = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}/\mu$ has values $0 < \rho < 1$.

Let us compare the probability distribution of the number of calls in the retrial queueing system $P(i)$ calculated via simulation and its approximation $Pg(i)$ with moments obtained by the method of initial moment [8].

The comparison of the distributions is shown in Figures 2. For the analysis, we use Kolmogorov distance between respective distribution functions (in Table 1).

From Table 1, we see that the Kolmogorov distance between distributions $d \leq 0.035$ for the wide range of σ and ρ values. Note that we obtained similar results for other values of the MMPP parameters.

Table 1

Kolmogorov distances d for various values of the parameter ρ and σ

	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 1$	$\sigma = 10$
$\rho = 0.3$	0.0053	0.0067	0.0185	0.0211
$\rho = 0.5$	0.0048	0.0055	0.0228	0.0300
$\rho = 0.7$	0.0030	0.0034	0.0202	0.0350
$\rho = 0.9$	0.0020	0.0030	0.0091	0.0224

5. Conclusions

In this regard, the retrial queueing system of $MMPP/M/1$ type is considered in the paper. The method of the discrete gamma approximation for probability distribution of the number of calls in the system is offered. The numerical comparison of exact and approximate distributions for different values of the system parameters shows the wide range of the method application.

Acknowledgments

The publication was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008).

References

1. *Artalejo J.R., Gómez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. — Stockholm: Springer, 2008.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. — London: Chapman & Hall, 1997.
3. *Moiseeva E., Nazarov A.* Asymptotic analysis of RQ-systems M/M/1 on heavy load condition // Proceedings of the IV International Conference Problems of Cybernetics and Informatics. Baku, Azerbaijan, 2012. — P. 164–166.
4. *Fedorova E.* Quasi-geometric and gamma approximation for retrial queueing systems // Communications in Computer and Information Science. — 2014. — Vol 487. — P. 123–136.
5. *Neutz M.F.* Versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. — 1979. — Vol. 16, no. 4. — P. 764–779.
6. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. — 1991. — Vol. 7. — P. 1–46.

7. *Nazarov A., Chernikova Y.* Gaussian approximations of probabilities distribution of states of the retrial queueing system with r -persistent exclusion of alternative customers // Communications in Computer and Information Science. — 2015. — Vol. 564. — P. 200–209.
8. *Pankratova E., Moiseeva S.* Queueing System with Renewal Arrival Process and Two Types of Customers // Proceedings of the IEEE Int.Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems, ICUMT2014. — St. Petersburg: IEEE, 2015. — P. 514–517.
9. *Moiseev A., Demin A., Dorofeev V., Sorokin V.* Discrete-event approach to simulation of queueing networks // Key Engineering Materials. — 2016. — Vol. 685. — P. 939–942.

UDC 519.2

Asymptotic Analysis of Queueing Models based on Synchronization Method

L. G. Afanaseva*

* *Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. This paper is focused on the stability conditions of the multiserver queueing system with heterogeneous servers and a regenerative input flow $X(t)$. The main idea is constructing an auxiliary service process $Y(t)$ which is also a regenerative flow and defining the common points of regeneration for the both processes $X(t)$ and $Y(t)$. Then the traffic rate of the system is defined in terms of the mean of the increments of these processes on the common regeneration period. It allows to use well-known results from the renewal theory to find the instability and stability conditions. The possibilities of the proposed approach are demonstrated by examples.

Keywords: regenerative flow, synchronization, stability condition, service discipline.

1. Model description

We consider a multiserver queueing system with heterogeneous servers and a regenerative input flow. We assume that the input flow is a regenerative one for three reasons. Firstly, a process describing the performance of the system under some natural assumptions turns out to be a classical regenerative process [4, 11] and the renewal theory gives very effective tools for asymptotic analysis of the system. Secondly, the class of regenerative flows is rather wide. It includes recurrent, semi-Markov, Markov-modulated, Markov-arrival flows and others [2]. Finally, a regenerative flow has some useful properties that make it possible to investigate various applied models.

Our aim is asymptotic analysis of the multiserver queueing system with a regenerative input flow $X(t)$ with points of regeneration $\{\theta_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $(\theta_0^{(1)} = 0)$ basing on synchronization of this flow and an auxiliary service flow $Y(t)$. This process is the number of customers which can be served up to time t under assumption that there are always customers for service. We consider the discrete-time as well as continuous-time queueing systems (see [10]) and assume that $Y(t)$ is a regenerative flow with points of regeneration $\{\theta_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$, $(\theta_0^{(2)} = 0)$ and this flow does not depend on $X(t)$. For the discrete-time case $Y(t)$ is an aperiodic regenerative flow, i.e. regeneration period $\tau_n^{(2)} = \theta_n^{(2)} - \theta_{n-1}^{(2)}$ has an aperiodic distribution

$$GCD\{k : P(\tau_n^{(2)} = k)\} = 1 \quad (1)$$

(GCD - the greatest common divisor) and for the continuous-time case $Y(t)$ is a strongly regenerative flow. This means that the regeneration period $\tau_n^{(2)}$ has a form

$$\tau_n^{(2)} = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} \tag{2}$$

where $P(v_n^{(1)} > x) = e^{-\delta x} (\delta \in (0, \infty))$, $v_n^{(1)}$ and $v_n^{(2)}$ are independent random variables and $Y(\theta_{n-1}^{(2)} + v_n^{(1)}) = Y(\theta_{n-1}^{(2)})$.

We also assume that $\mathbf{E}\theta_1^{(1)} < \infty, \mathbf{E}X(\theta_1^{(1)}) < \infty, \mathbf{E}\theta_1^{(2)} < \infty, \mathbf{E}Y(\theta_1^{(2)}) < \infty$. Then the rates λ_X and λ_Y of these flows are limits w.p.1 $\lambda_X = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = \frac{\mathbf{E}X(\theta_1^{(1)})}{\mathbf{E}\theta_1^{(1)}}$, $\lambda_Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y(t)}{t} = \frac{\mathbf{E}Y(\theta_1^{(2)})}{\mathbf{E}\theta_1^{(2)}}$.

2. Synchronization of $X(t)$ and $Y(t)$

We determine the common points of regeneration $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ for $X(t)$ and $Y(t)$ putting in the discrete-time case

$T_n = \min \{ \theta_j^{(1)} > T_{n-1} : \bigcup_{l=1}^\infty \{ \theta_j^{(1)} = \theta_l^{(2)} \} \}$, $T_0 = 0$ and in the continuous-time case $T_n = \min \{ \theta_j^{(1)} > T_{n-1} : \bigcup_{l=1}^\infty \{ \theta_{l-1}^{(2)} < \theta_j^{(1)} \leq \theta_{l-1}^{(2)} + v_l^{(1)} \} \}$.

Lemma 1 *Let for the continuous-time (discrete-time) Assumption (1) (Assumption (1)) be fulfilled. Then the sequence $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ consists of common regeneration points for $X(t)$ and $Y(t)$ and*

$\mathbf{E}(T_n - T_{n-1}) = \mathbf{E}T_1 = \delta \mathbf{E}\theta_1^{(1)} \mathbf{E}\theta_1^{(2)} < \infty$ for the continuous-time case, $\mathbf{E}T_1 = \mathbf{E}\theta_1^{(1)} \mathbf{E}\theta_1^{(2)} < \infty$ for the discrete-time case.

The proof is based on the renewal theory and Blackwell's theorem [4, 11].

Let $\Delta_Y(n) = Y(T_n) - Y(T_{n-1})$, $\Delta_X(n) = X(T_n) - X(T_{n-1})$. Then $\lambda_X = \frac{E\Delta_X(n)}{E(T_n - T_{n-1})}$, $\lambda_Y = \frac{E\Delta_Y(n)}{E(T_n - T_{n-1})}$. therefore the traffic rate

$$\rho = \frac{\lambda_X}{\lambda_Y} = \frac{E\Delta_X(n)}{E\Delta_Y(n)}.$$

We define the stochastic flow $\tilde{Y}(t)$ as the number of customers really served at the system during time interval $[0, t)$.

Condition 1 *The following stochastic inequalities take place*

$$\tilde{\Delta}_Y(n) = \tilde{Y}(T_n) - \tilde{Y}(T_{n-1}) \leq \Delta_Y(n), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Let $Q(t)$ be the number of customers at the system including the customers on the service at time, i.e.

$$Q(t) = Q(0) + X(t) - \tilde{Y}(t).$$

Condition 2 *There are two possible cases:*

(i) $Q(t)$ is a stochastically bounded process, i.e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} P(Q(t) \leq x) = 1$;

(ii) $Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty$.

Let us define the event $A_n = \{Q(t) \geq m \text{ for all } t \in [T_n, T_{n+1}]\}$.

Condition 3 *If Condition 2 (ii) takes place then for any $\epsilon > 0$ there is n_ϵ such that $E\tilde{\Delta}_Y(n)\mathbb{I}(A_n) \geq E\Delta_Y(n) - \epsilon$ for $n > n_\epsilon$.*

Here $\mathbb{I}(A_n)$ is an indicator function for A_n .

3. Stability and instability results

Theorem 1 *Let Condition 1 be fulfilled. If $\rho \geq 1$ then $Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty$.*

To proof Theorem 1 we introduce the embedded process $Q_n = Q(T_n - 0)$ and use the well known results for random walks [9].

Theorem 2 *Let Conditions 2 and 3 be fulfilled. If $\rho < 1$ then $Q(t)$ is a stochastically bounded process.*

Let us note that under some additional conditions $Q(t)$ is a regenerative process with points of regeneration $\{T_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ such that $Q(T_{n_k} - 0) = 0$ (see [3]). Then $Q(t)$ is a stable process when $\rho < 1$.

4. Heavy-traffic situation

Here we focus on the limit theorem for the process $Q(t)$ in the case $\rho \geq 1$. Denote $\xi_n^{(1)} = X(\theta_n^{(1)}) - X(\theta_{n-1}^{(1)})$, $\xi_n^{(2)} = Y(\theta_n^{(2)}) - Y(\theta_{n-1}^{(2)})$, $\tau_n^{(1)} = \theta_n^{(1)} - \theta_{n-1}^{(1)}$, $\tau_n^{(2)} = \theta_n^{(2)} - \theta_{n-1}^{(2)}$, $a_i = \mathbb{E}\xi_n^{(i)}$, $\mu_i = \mathbb{E}\tau_n^{(i)}$, $\sigma_{\xi^{(i)}}^2 = \text{Var} \xi_n^{(i)}$, $\sigma_{\tau^{(i)}}^2 = \text{Var} \tau_n^{(i)}$, $i = 1, 2$; and put

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_{\xi^{(1)}}^2}{\mu_1} + \frac{a_1^2 \sigma_{\tau^{(2)}}^2}{\mu_1^3} - \frac{2a_1 \text{cov}(\xi_n^{(1)}, \tau_n^{(1)})}{\mu_1^2}.$$

In evident notation σ_Y^2 is defined by the same formula.

Theorem 3 *Let Condition 1 be fulfilled and*

$$\mathbb{E}(\tau_1^{(i)})^{2+\delta} < \infty, \quad \mathbb{E}(\xi_1^{(i)})^{2+\delta} < \infty, \quad i = 1, 2$$

for some $\delta > 0$. Then for the case $\rho > 1$ on any limit interval $[0, h]$ the scaled process

$$\tilde{Q}_T(t) = \frac{Q(tT) - \lambda_Y(\rho - 1)tT}{\sqrt{T(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}}$$

converges weakly to the process of Brownian motion.

If $\rho = 1$ then

$$\tilde{Q}_T(t) = \frac{Q(tT)}{\sqrt{T(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}}$$

converges weakly to the absolute value of Brownian motion process.

The proofs of these statements are based on well known results for the renewal processes [5, 9], properties of regenerative flows [1] and ideas from [7, 8].

5. Example. Queueing system with interruptions of the service

As an example, we consider a multichannel heterogeneous queueing system with interruptions of the service (see [10]). Let $\{s_{i,n}^{(2)}\}_{n=1}^\infty$ be the moments of breakdowns and $\{s_{i,n}^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ be the moments of restorations for the i th server. Here

$$0 = s_{i,0}^{(2)} < s_{i,1}^{(1)} < s_{i,1}^{(2)} < \dots$$

Then $u_{i,n}^{(1)} = s_{i,n}^{(1)} - s_{i,n}^{(2)}$ and $u_{i,n}^{(2)} = s_{i,n}^{(2)} - s_{i,n}^{(1)}$ denote the length of the n th blocked and the n th available period of the i th server respectively ($i = \overline{1, m}$). The sequence $\{u_{i,n}^{(1)}, u_{i,n}^{(2)}\}_{n=1}^\infty$ consists of iid random vectors (for all $(i = \overline{1, m})$) that do not depend on the input flow $X(t)$ and service times. Let $u_{i,n} = u_{i,n}^{(1)} + u_{i,n}^{(2)}$ be the length of the n th cycle for the server i . A cycle consists of a blocked period followed by an available period. We assume that $Eu_{i,n}^{(1)} = a_i^{(1)} < \infty$, $Eu_{i,n}^{(2)} = a_i^{(2)} < \infty$, $a_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)}$ ($i = \overline{1, m}$) and put $n_i(t) = 0$ if the i th server is in an unavailable state at time t and $n_i(t) = 1$ otherwise ($i = \overline{1, m}$).

We consider the preemptive repeat different service discipline that means that the service is repeated after restoration of the server the new service is independent of the original service time (see [6]). Service times of the customers served by the i th server $\{\eta_{in}\}_{n=1}^\infty$ are iid random variables and $b_i = \mathbb{E}\eta_{in} < \infty$.

Let $N_0(t) = \max\{k : \theta_k^{(1)} \leq t\}$, $N_i(t) = \max\{k : s_{i,k}^{(2)} \leq t\}$, $i = \overline{1, m}$, and assume that these counting processes are aperiodic ones. Then an auxiliary process $Y(t)$ introduced in Section 1 is an aperiodic regenerative flow with points of regeneration $\{\theta_n^{(2)}\}$ defining by the relations

$$\theta_n^{(2)} = \min \left\{ t > \theta_{n-1}^{(2)} : \bigcap_{i=1}^m [N_i(t) - N_i(t-1) > 0] \right\}, \theta_0^{(2)} = 0.$$

One may easily verify that

$$\lambda_Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y(t)}{t} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbb{E}H_i(u_{i,1}^{(2)})}{a_i}$$

where $H_i(t)$ is the renewal function corresponding the sequence $\{\eta_{in}\}_{n=1}^\infty$.

We get from Theorems 1 and 2

Corollary *For the system under consideration*

(i) $Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty$ if $\rho \geq 1$;

(ii) $Q(t)$ is a stochastically bounded process if $\rho < 1$.

Remark This approach was also used for the stability analysis of the queueing systems with a preemptive priority discipline.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 17-01-00468.

References

1. *Afanasyeva L. G., Bashtova E. E.* Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server // *Queueing Systems*. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 125–147.
2. *Afanasyeva L., Bashtova E., Bulinskaya E.* Limit Theorems for Semi-Markov Queues and Their Applications // *Communications in Statistics. Part B: Simulation and Computation*. — 2012. — Vol. 41, no. 6. — P. 688–709.
3. *Afanasyeva L., Tkachenko A.* Multichannel queueing systems with regenerative input flow // *Theory of Probability and Its Applications*. — 2014. — Vol. 58, no. 2. — P. 174–192.
4. *Asmussen S.* *Applied Probability and Queues*. — Springer-Verlag, 2003. — Vol. 51.
5. *Borovkov A. A.* *Stochastic Processes in Queueing Theory*. — Springer-Verlag, 1976. — Vol. 4.
6. *Gaver D. Jr.* A waiting line with interrupted service, including priorities // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. — 1962. — Vol. 24. — P. 73–90.
7. *Iglehart D. L., Whitt W.* Multiple channel queues in Heavy Traffic I // *Advances in Applied Probability*. — 1970. — Vol. 2, no. 1. — P. 150–177.
8. *Iglehart D. L., Whitt W.* Multiple channel queues in Heavy Traffic II // *Sequences, Networks, and Batches. Advances in Applied Probability*. — 1970. — Vol. 2, no. 2. — P. 355–369.
9. *Feller W.* *An introduction to probability theory and its applications*, 2nd Edition. — Wiley, New York, NY, USA, 1957.
10. *Morozov E., Fiems D., Bruneel H.* Stability analysis of multiserver discrete-time queueing systems with renewal-type server interruptions // *Performance Evaluation*. — 2011. — Vol. 68, no. 12. — P. 1261–1275. — DOI: 10.2016/j.peva.2011.07.002.
11. *Thorisson H.* *Coupling, Stationary and Regeneration*. — Springer, New York, 2000.

УДК 519.218.3

Оптимальная стратегия перестрахования в модели с несколькими рисками в рамках одного договора страхования

А. А. Муромская*

** Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119234*

Аннотация. В работе рассматривается модель деятельности страховой компании, заключающей договоры страхования, покрывающие сразу несколько различных рисков. К каждому из данных рисков может быть применено перестрахование произвольного типа. Параметры перестрахования при этом могут быть изменены с течением времени. Основная задача компании заключается в нахождении оптимальной стратегии перестрахования, при использовании которой вероятность разорения была бы максимальной. В работе получено уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, соответствующее указанной задаче, и доказаны существование и единственность решения данного уравнения. Также установлена связь между решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и наибольшей возможной вероятностью разорения и определен вид оптимальной стратегии перестрахования.

Ключевые слова: комбинированное страхование, перестрахование, вероятность разорения, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, оптимальное управление.

1. Введение

В настоящее время страхование играет важную роль в жизни общества и является неотъемлемой частью мировой экономики. Для поддержания стабильности работы страховых компаний появляется необходимость изучения различных аспектов их деятельности на основе математических моделей. Так одной из значимых изучаемых характеристик функционирования страховых компаний является вероятность разорения. Вероятность разорения (и, соответственно, вероятность разорения) страховых компаний была исследована как в рамках классических моделей риска (см., например, работу [1]), так и в условиях более сложных моделей, согласно которым страховая компания могла использовать различные финансовые инструменты, например, перестрахование. Отдельный интерес представляют модели риска, в рамках которых страховая компания имеет возможность выбирать параметры перестрахования в каждый момент времени, руководствуясь при этом информацией о поступивших ранее убытках. Основной целью компании является тогда поиск оптимальной (в некотором смысле) стратегии перестрахования. В качестве одного из критериев оптимальности стратегии перестрахования может быть выбрана

максимальная вероятность неразорения. При этом часто выбор стратегии перестрахования осуществляется из некоторого класса стратегий, задаваемого типом перестрахования. Так Шмидли посвятил статью [2] поиску оптимальной стратегии кватного перестрахования, в то время как Хишпа и Вогта [3] интересовал вопрос о существовании оптимальной перестраховочной стратегии эксцедента убытка. В работе Громова [4] был рассмотрен договор перестрахования эксцедента убытка с ограниченной ответственностью перестраховщика. В настоящей же работе исследован более общий случай, а именно, предполагается, что компания заключает договоры страхования, которые покрывают сразу $k \geq 2$ рисков, каждый из которых может быть перестрахован в соответствии со своим произвольным типом перестрахования.

Итак, пусть в каждый момент времени $t \geq 0$ страховая компания имеет возможность выбрать параметры d_t^i перестрахования i -ого риска, руководствуясь при этом значением капитала $X_t^{\bar{d}}$. Таким образом, процесс $\bar{d}_t = (d_t^1, \dots, d_t^k)$, где $d_t^i = d^i(X_t^{\bar{d}})$ являются измеримыми функциями от капитала компании, определяет стратегию перестрахования. Множества возможных значений параметров перестрахования d_t^i будут обозначаться через D_i , при этом рассматриваются только компактные множества D_i . Соответственно, в каждый фиксированный момент времени $\bar{d}_t \in D$, где $D = D_1 \times \dots \times D_k$. С помощью \mathfrak{D} будет обозначено множество всех возможных стратегий перестрахования \bar{d}_t .

Поступившие требования по каждому из k рисков в рамках одного страхового случая делятся между страховщиком и перестраховщиком в соответствии с типом договора перестрахования (функцией ρ_j) и в соответствии с выбранными параметрами перестрахования $d_{T_n}^j$, $j = \overline{1, k}$. С помощью T_n обозначены моменты поступления совокупных исков. Функции ρ_j определяют тип договора перестрахования, то есть само правило, по которому производится деление требования по j -ому риску между страховщиком и перестраховщиком. Если по j -ому риску поступило требование Y_j и на момент поступления данного требования выбран параметр $d^j \in D_j$, то $\rho_j(Y_j, d^j)$ обозначает часть иска, которую должен покрыть страховщик. Перестраховщик тогда должен покрыть $Y_j - \rho_j(Y_j, d^j)$. В соответствии с типом перестрахования делятся не только требования, но и премии. После применения перестрахования интенсивности поступления премий страховщику по каждому из k рисков становятся равными $c_i(d_t^i)$, $i = \overline{1, k}$.

Итого капитал страховой компании, использующей перестрахования, в момент времени t принимает следующий вид:

$$X_t^{\bar{d}} = x + \int_0^t \sum_{i=1}^k c_i(d_s^i) ds - \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^k \rho_j(Y_{n,j}, d_{T_n}^j), \quad t \geq 0,$$

где x — это начальный капитал, N_t — пуассоновский процесс с параметром λ , а Y_{nj} — случайные величины, обозначающие размеры требований по j -ому риску в рамках n -ого страхового случая. При этом $\{\bar{Y}_n\}_{n \geq 1} = \{(Y_{n1}, \dots, Y_{nk})\}_{n \geq 1}$ представляет собой последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов. Компоненты данных векторов Y_{nj} , $j = \bar{1}, \bar{k}$, имеют непрерывную совместную функцию распределения $F(y_1, \dots, y_k)$.

Основная задача компании состоит в том, чтобы выбрать наилучшую стратегию перестрахования, позволяющую максимально увеличить вероятность неразорения. При этом $\tau^{\bar{d}} = \inf[t \geq 0 : X_t^{\bar{d}} < 0]$ является моментом разорения, $\psi^{\bar{d}}(x) = P(\tau^{\bar{d}} < \infty | X_0^{\bar{d}} = x)$ — вероятностью разорения, а $\delta^{\bar{d}}(x) = 1 - \psi^{\bar{d}}(x)$ — вероятностью неразорения страховой компании, использующей стратегию перестрахования \bar{d}_t . Таким образом, цель состоит в том, чтобы найти $\delta(x) = \sup_{\bar{d}_t \in \mathfrak{D}} \delta^{\bar{d}}(x)$ и определить оптимальную стратегию перестрахования, если такая существует.

2. Основная часть

В соответствии с методами решения задач стохастического оптимального управления в первую очередь было получено уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\sup_{\bar{d} \in D} \left[\sum_{i=1}^k c_i(d^i) g'(x) - \lambda g(x) + \lambda \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j)) dF(y_1, \dots, y_k) \right] = 0. \quad (1)$$

При этом было введено новое обозначение $g(x)$, так как заранее точно неизвестно, удовлетворяет ли функция $\delta(x)$ уравнению (2) или нет. Связь между решением уравнения (2) и искомой функцией $\delta(x)$ определяется позже, однако, исходя из свойств функции $\delta(x)$, сразу стоит отметить, что интерес представляет существование возрастающих решений $g(x)$ уравнения (2), таких, что $g(0) > 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$. Здесь и далее, когда указываются характеристики функции $g(x)$, такие как, например, монотонность, имеются в виду характеристики данной функции на луче $[0, \infty)$ (определение $g(x)$ на $(-\infty, 0)$ необходимо только для удобства записи интегралов). Несложно показать, что с учетом наложенных на функцию $g(x)$ ограничений уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$g'(x) = \inf_{\bar{d} \in \tilde{D}} \left[\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^k c_i(d^i)} \left(g(x) - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(x - \sum_{j=1}^k \rho_j(y_j, d^j)) dF(y_1, \dots, y_k) \right) \right], \quad (2)$$

где $\tilde{D} = \{\bar{d} \in D : \sum_{i=1}^k c_i(d^i) > 0\}$. Далее в качестве граничного условия берется равенство $g(0) = 1$ и в соответствии с выбранным условием удается доказать существование и единственность решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана:

Теорема 1. *Существует единственное решение уравнения (2), такое, что $g(0) = 1$. Данное решение является возрастающим, ограниченным и непрерывно дифференцируемым.*

После этого появляется возможность установить связь между решением уравнения (2) и наибольшей возможной вероятностью неразорения и определить вид искомой оптимальной стратегии перестрахования:

Теорема 2. *Пусть $g(x)$ – единственное решение уравнения (2), такое, что $g(0) = 1$. Тогда $g(x) = \delta(x)/\delta(0) = \delta(x)g(\infty)$, при этом оптимальная стратегия перестрахования имеет вид $\bar{d}_t^* = \bar{d}^*(X_t^{\bar{d}^*})$, где $\bar{d}^*(x)$ – это точка, в которой достигается инфимум в уравнении (2), а $X_t^{\bar{d}^*}$ – это процесс капитала страховой компании, использующей оптимальную стратегию перестрахования \bar{d}_t^* .*

Для частных случаев распределения рисков (например, для случая двух показательного распределенных рисков) вид функции $\delta(x)$ и оптимальной стратегии перестрахования удается получить с помощью численных методов (см. статью [5]).

3. Заключение

В работе была рассмотрена деятельность страховой компании, занимающейся комбинированным страхованием, согласно которому договоры страхования покрывают сразу несколько различных рисков. При этом предполагалось, что каждый из застрахованных рисков мог быть передан в перестрахование произвольного типа, параметры которого изменялись со временем. Была поставлена и решена задача оптимального стохастического управления, заключающаяся в определении максимальной возможной вероятности неразорения и соответствующей ей стратегии перестрахования. Полученные результаты представляют собой логическое продолжение и обобщение исследований, посвященных поиску оптимальных стратегий перестрахования в моделях с

фиксированным типом договора перестрахования и одним риском в рамках одного договора страхования.

Литература

1. *Cai J.* Cramer–Lundberg Asymptotics // Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. — 2014. — P. 1–6.
2. *Schmidli H.* Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting // Scandinavian Actuarial Journal. — 2001. — Vol. 2001, no. 1. — P. 55–68.
3. *Hipp C., Vogt M.* Optimal dynamic XL reinsurance // ASTIN Bulletin. — 2003. — Vol. 33, no. 2. — P. 193–207.
4. *Громов А. Н.* Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убытка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2011. — No. 4. — С. 17–22.
5. *Муромская А. А.* Оптимальное перестрахование в модели со страхованием нескольких рисков в рамках одного договора // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2016. — No. 4. — С. 79–97.

UDC 519.218.3

Optimal reinsurance strategy in the model with several risks within one insurance policy

A. A. Muromskaya*

* *Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, Russia, 119234*

We study the model of insurance company performance that issues insurance policies covering several risks. Each risk can be reinsured according to the arbitrary reinsurance treaty. Parameters of such reinsurance treaties can be changed dynamically. The main aim is to find an optimal reinsurance strategy that maximizes the probability of survival of the insurance company. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation for this problem is deduced and existence and uniqueness of its solution are proved. We also establish a connection between the solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation and the greatest possible probability of survival and determine the optimal reinsurance strategy.

Keywords: multiple peril insurance, reinsurance, survival probability, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, optimal control.

Asymptotic Methods and Limit Theorems

A. V. Bulinski*

** Department of Probability Theory,
Faculty of Mathematics and Mechanics,
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119234, Russia*

Abstract. The talk is devoted to problems related to asymptotic analysis of dependent functions constructed by means of arrays of independent observations. Such functions are employed in statistics, e.g., in the framework of regression analysis, and have a number of applications in medical and biological studies. A new version of the conditional central limit theorem is established and applied to data analysis. The feature selection problems are considered as well.

Keywords: arrays of random variables, conditional central limit theorem, law of large numbers, feature selection.

1. Introduction

We study the models described by systems of dependent random variables and discuss their applications. In the first part of the talk we prove the conditional CLT for arrays of random variables. Conditional probabilities and conditional expectations play an important role in the modern probability theory. It suffices to indicate the classes of Markov stochastic processes and random fields, martingales, conditionally associated processes and others. The concept of conditionally independent variables goes back to A.A.Markov. The relationship between exchangeability and conditional independence was studied by B.de Finetti. Later, in the works by B.K.L.Prakasa Rao, G.G.Roussas (see, e.g., [11] and [13]) and other researchers, the classes of random variables possessing different forms of conditional independence were considered. During the last decade, for such classes the analogues of some classical limit theorems of probability theory were established. In particular, we employ our conditional CLT ([5]) for an extension of the recent result by L.Györfi and H.Walk [9] concerning the regression function estimation. In the second part of the talk we discuss the feature selection problems (see, e.g., [1]) and asymptotic behavior of the corresponding statistics. We concentrate on the multifactor dimensionality reduction (MDR) method proposed by M.Ritchie and coauthors in 2001. The review [8] shows that more than 800 papers published between 2001 and 2014 were devoted to extensions, modifications and applications of the initial idea. The development of our MDR-EFE (MDR - error function estimation) method ([2], [4]) to stratified samples in the case of a binary response variable, describing, e.g., the sick and healthy state of a patient, is obtained. The study of stratified samples ([6]) is essential when

the disease probability is small. We establish a criterion of strong consistency of estimates, involving K -cross-validation procedure and penalty, for a specified prediction error function. The generalization of the XOR-model important for genetic data analysis is introduced. The cost approach is proposed to compare experiments with random and non-random number of observations. Analytic results are accompanied by simulations.

2. Main results

Assume as usual that there exists a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) and all random variables under consideration are defined on it. Let a σ -algebra \mathcal{A} be such that $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. The events A_1, \dots, A_n are called conditionally independent w.r.t. \mathcal{A} or \mathcal{A} -independent if

$$P^{\mathcal{A}}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P^{\mathcal{A}}(A_k), \quad (1)$$

here $P^{\mathcal{A}}(A) := E^{\mathcal{A}}(I\{A\})$ for $A \in \mathcal{F}$, $I\{A\}$ being an indicator of a set A , and $E^{\mathcal{A}}X$ stands for conditional expectation (when it exists) of a random variable X w.r.t. \mathcal{A} . The \mathcal{A} -independence of σ -algebras $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ means that (2) holds for any $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \dots, n$. The random vectors X_1, \dots, X_n are \mathcal{A} -independent whenever σ -algebras generated by these vectors are conditionally independent w.r.t. \mathcal{A} . An infinite system of random variables is called \mathcal{A} -independent if any finite collection of these random variables possesses such property.

Clearly, (2) is valid for $\mathcal{A} = \mathcal{F}$. We obtain the classical definition of independent events (σ -algebras, random variables) taking $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$. Independence of events (or random variables) can disappear if we take non-trivial σ -algebra \mathcal{A} . At the same time some dependent events (or random variables) could be considered as conditionally independent for an appropriate choice of σ -algebra \mathcal{A} . The corresponding examples one can find in [7], [11] and [13]. The relationship between conditional independence and exchangeability is considered in Section 7.3 of the monograph [7].

The arrays with rows consisting of conditionally independent random variables w.r.t. certain σ -algebras are studied. An analogue of the Lindeberg - Feller theorem known for systems of independent random variables is established. This result is based on the theorem proved by D-M. Yuan, L-R. Wei, L. Lei in [14] where the authors considered a sequence of random variables conditionally independent w.r.t. a given σ -algebra. They were interested in a.s. convergence whereas our version of the Lindeberg condition in a weak form (involving convergence in probability) is less restrictive. An application of the mentioned new result for arrays provides an extension of conditions for asymptotic normality of the estimates of the regression function second moment obtained in a recent paper by L. Györfi and H. Walk [9].

The research direction combining probability, statistics and machine learning for analysis of mathematical problems of feature selection is vastly represented in literature along with various applications of this theory. Let us consider a response variable Y depending on factors (features) X_1, \dots, X_n . The challenging problem is to identify a collection of relevant factors X_{k_1}, \dots, X_{k_r} such that Y depends on them essentially in a sense. Quite a number of powerful methods were developed for different models in the course of such investigations. Several new variable selection procedures have emerged during the last 20 years. Note that many exhaustive, stochastic and heuristic methods to detect epistasis (in genetics) are considered in [10]. In the paper by M.Ritchie et al. [12] the MDR method was proposed to identify the relevant factors having influence on a binary response variable. The review [8] demonstrates great popularity of the method. One can mention the following versions of this method: MDR method with independent rule, the generalized MDR (GMDR) method employing the framework of generalized linear models for scoring in conjunction with MDR, the model-based MDR (MB-MDR) method which allows a more flexible definition of risk cells than the application of MDR techniques, the MDR pedigree disequilibrium test (MDR-PDT). GeneMDR method and a robust MDR method (RMDR) have been introduced also among others.

We are interested in identification of a collection of relevant factors which determine in a sense the behavior of a random response. For instance a binary response 1 or -1 can characterize the state of a patient health (1 means that a person is sick and -1 corresponds to healthy person). In the study of limit behavior of the proposed statistics special attention will be paid to using the versions for arrays of random variables the law of large numbers and the central limit theorem, see, e.g., [3], [4] and [6]. We compare two approaches concerning the application of the MDR-EFE method for different sample plans. The first one was described in [2] and consists in the employment of nonrandom number of i.i.d. observations. The second one is considered in [6] and involves the stratified sample. More exactly, stratification means the separation of observations taking into account the values of a response variable under consideration. We will denote these methods as iMDR-EFE and sMDR-EFE, respectively.

To compare two approaches in the sense of the total cost of experiment assume that there is a fixed amount of money C ($C \in \mathbb{N}$) for research. Let each observation (X_i, Y_i) cost 1 and let the ratio of the price of measuring Y to that of X be $w \in \mathbb{R}^+$. Since comparison for equal sample sizes is not interesting, we consider the maximal sizes $s_{ind}(C; w)$ and $s_{str}(C; w)$ of the samples which are available in experiments organized to apply iMDR-EFE and sMDR-EFE, respectively.

We turn to the popular XOR-model to compare iMDR-EFE and sMDR-EFE. This model is used in genetics to describe epistasis without main effects. Namely, let $\mathbb{X} = \{0, 1, 2\}^n$ (0, 1, 2 correspond to the number of minor alleles of a specified gene). Assume now that the components

of a random vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ are independent and, for each $i \in \{1, \dots, n\}$, there exists such $p_i \in (0, 0.5]$ that $P(X_i = 0) = (1 - p_i)^2$, $P(X_i = 1) = 2p_i(1 - p_i)$, $P(X_i = 2) = p_i^2$. This situation is typical for genome-wide association studies (GWAS) where each X_i corresponds to a single nucleotide polymorphism (SNP) and p_i is a minor allele frequency (MAF). We propose a generalization of the XOR-model described in [15] to the case of more than 2 relevant factors. Fix a collection $\{k_1, \dots, k_r\} \subset \{1, \dots, n\}$. Set, for each $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}$,

$$P(Y = 1 | X = x) = \begin{cases} \gamma, & (x_{k_1} + \dots + x_{k_r}) \bmod 2 = 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\gamma \in (0, 1)$ and $p_{k_1} = \dots = p_{k_r} = 0.5$. According to Lemma 3 of [6] a response variable Y depends on $(X_{m_1}, \dots, X_{m_l})$ where $\{m_1, \dots, m_l\} \subset \{1, \dots, n\}$ if and only if $\{k_1, \dots, k_r\} \subset \{m_1, \dots, m_l\}$. Thus $(X_{k_1}, \dots, X_{k_r})$ is a collection of relevant factors. In our simulations we employ the XOR-model of dependence between predictors and response variable to compare iMDR-EFE and sMDR-EFE. In order to measure the method performance power we use TMR (true model rate). It is shown in [6] that, for the fixed total cost C a stratified sampling gives better results than independent one.

We tackle also the problem of stability of feature selection methods. We consider various stability measures (indexes) and discuss their properties.

3. Conclusions

We mentioned some problems concerning the asymptotic analysis of the specified stochastic models. Besides a survey the new results with the sketches of their proofs will be provided in the talk. Special attention will be paid to applications.

Acknowledgments

This work is supported by Russian Science Foundation under grant No. 14-21-00162.

References

1. *Bolon-Canedo V., Sanchez-Marono N., Alonso-Betanzos A.* Feature Selection for High-Dimensional Data. — Springer, 2015.
2. *Bulinski A.* On foundation of the dimensionality reduction method for explanatory variables // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 199, no. 2. — P. 113–122.

3. *Bulinski A.* Central limit theorem related to MDR-method // Asymptotic Laws and Methods in Stochastics. A volume in Honour of Miklos Csorgo. Fields Institute Communications. — Springer, 2015. — Vol. 76. — P. 113–128.
4. *Bulinski A., Rakitko A.* MDR method for nonbinary response variable // J. of Multivariate Analysis. — 2015. — Vol. 135 — P. 25–42.
5. *Bulinski A.* Conditional central limit theorem // Theory of Probability and Applications. — 2016. — Vol. 61, no. 4. — P. 1–23.
6. *Bulinski A., Kozhevnikov A.* New version of the MDR method for stratified samples // Statistics, Optimization and Information Computing. — 2017. — Vol. 5. — P. 1–18.
7. *Chow Y.S., Teicher H.* Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingales. 3rd ed. Springer, 1997.
8. *Gola D., John J.M.M., van Steen K., Konig R.* A roadmap to multifactor dimensionality reduction methods // Briefings in Bioinformatics. — 2015. — P. 1–16.
9. *Györfi L., Walk H.* On the asymptotic normality of an estimate of a regression functional // J. Mach. Learn. Res. — 2015. — Vol. 16. — P. 1863–1877.
10. *Moore J.H., Williams S.M.* (Eds.). Epistasis: Methods and Protocols. Methods in Molecular Biology. Vol. 1253. — Springer Science + Business Media, New York, 2015.
11. *Prakasa Rao B.L.S.* Conditional independence, conditional mixing and conditional association // Ann. Inst. Stat. Math. — 2009. — Vol. 61. — P. 441–460.
12. *Ritchie M.D., Hahn L.W., Roodi N., Bailey R., Dupont W.D., Parl F.F., Moore J.H.* Multifactor dimensionality reduction reveals high-order interactions among estrogen-metabolism genes in sporadic breast cancer // Amer. J. Human Genetics. — 2001. — Vol. 69. — P. 139–147.
13. *Roussas G. G.* On conditional independence, mixing, and association // Stochastic Anal. Appl. — 2008. — Vol. 26, no. 6. — P. 1274–1309.
14. *Yuan D-M., Wei L-R., Lei L.* Conditional central limit theorems for a sequence of conditional independent random variables // J. Korean Math. Soc. — 2014. — Vol. 51, no. 1. — P. 1–15.
15. *Winham S.J., Slater A.J., Motsinger-Reif A.A.* A comparison of internal validation techniques for multifactor dimensionality reduction // BMC Bioinformatics — 2010. — Vol. 11, no. 1. — Article 394.

UDC 519.214

Non-classical boundary crossing problems for general random walks

A. I. Sakhanenko*[†]

* *Novosibirsk State University,*

Pirogova str. 1, Novosibirsk, 630090, Russia

[†] *Sobolev Institute of Mathematics,*

Koptuga prospekt 4, Novosibirsk, 630090, Russia

Abstract. In this paper we consider non-classical random walks and investigate asymptotic behavior of first-passage times over moving boundaries. The survey of such results and of methods for their proofs is presented. Several new results are also found.

Keywords: Random walk, first-passage time, moving boundary, Brownian motion.

1. Introduction

Consider a random walk S_1, S_2, \dots with $S_0 = 0$. For arbitrary real numbers y and g_1, g_2, \dots let

$$T_{y,g} := \min\{n \geq 1 : y + S_n \leq g_n\} \quad (1)$$

be the first crossing of the moving boundary g_n by the random walk S_n . The main purpose of the present paper is to study the asymptotic behaviour of the distributions of first-passage times over moving boundaries

$$\mathbf{P}(T_{y,g} > n) = \mathbf{P}(y + \min_{1 \leq k \leq n} (S_k - g_k) > 0) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

for general random walks. An important particular case of this problem is the case of a constant boundary $g_n \equiv 0$.

If all $X_k = S_k - S_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, are independent and have identical distribution then the elegant result of Doney [6] is available for asymptotically stable random walks. In particular, if $\mathbf{E}X_1 = 0$ and $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$ then for every fixed $y \geq 0$

$$\mathbf{P}(T_{y,0} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathbf{E}[-S_{T_{y,0}}]}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

The use of the Wiener-Hopf factorization is a traditional approach to the derivation of (1). But if the increments X_k have different distributions or if we consider moving boundaries then there is no hope to generalize the factorization approach via the Wiener-Hopf identities to such random walks.

For such random walks a different approach was suggested in [2]. It is based on an idea due to Denisov and Wahtel (see [3], [4], [5] for another applications of this idea).

To describe the main result from [2] introduce assumptions:

$$\mathbf{E}X_k = 0 \quad \text{and} \quad 0 < B_k^2 := \mathbf{E}S_k^2 < \infty \quad \text{for all } k \geq 1. \tag{4}$$

We need also the *Lindeberg condition*

$$L_n^2(\varepsilon) := \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k^2; |X_k| > \varepsilon B_n] \rightarrow 0 \quad \text{for every } \varepsilon > 0.$$

About real numbers $\{g_n\}$ used in definition (1) we assume that

$$g_n/B_n \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad y + \sum_{k=1}^n \text{esssup} X_k > g_n \quad \text{for all } n \geq 1, \tag{5}$$

where $\text{esssup} X_k := \sup\{x : \mathbf{P}(X_k \geq x) > 0\}$. It is worth mentioning that assumption (1) is sufficient for the fact that $\mathbf{P}(T_{y,g} > n) > 0$ for all $n \geq 1$.

Theorem 1 *Assume that random variables $\{X_k\}$ are independent and that conditions (1) – (1) hold. Then*

$$\mathbf{P}(T_{y,g} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_{y,g}(B_n^2)}{B_n}, \tag{6}$$

where $U_{y,g}(\cdot)$ is a positive, slowly varying function with the values

$$0 < U_{y,g}(B_n^2) = \mathbf{E}[y + S_n - g_n; T_{y,g} > n] \sim \mathbf{E}[-S_{T_{y,g}}; T_{y,g} \leq n].$$

Asymptotic formula (1) generalizes (1) to all random walks satisfying the Lindeberg condition and to all boundaries satisfying (1). It was shown in [2] that the main results of the works [1], [7], [8] and [12] are the very particular cases of Theorem 1.

2. New results

Consider a case when an arbitrary random walk $\{S_k\}$ may be approximated by a walk $\{W(t_k)\}$ for some Wiener process $W(\cdot)$, where

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots \quad \text{for all } k > 0.$$

So we want to try to use a strong approximation. To formulate our next results we introduce the classical random broken line

$$s(t) = S_k + X_{k+1} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \quad \text{for } t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \geq 0. \tag{7}$$

We always consider $s_n(t) := s(tt_n)/\sqrt{t_n}$ as random process defined for $t \in [0, 1]$ with values in the space $C[0, 1]$ of continuous functions.

Theorem 2 *Suppose that for each $n \geq 1$ we can define the random walk $\{S_k, k \geq 1\}$ and a Brownian motion $W_n(t), t \in [0, 1]$, on a common probability space so that*

$$\mathbf{P} \left(\delta_n := \max_{0 \leq t \leq 1} |s_n(t) - W_n(t)| > \varepsilon_n y_n / \sqrt{t_n} \right) = o(y_n / \sqrt{t_n}) \rightarrow 0 \quad (8)$$

for some $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Assume in addition that

$$y_n \rightarrow \infty, \quad y_n / \sqrt{t_n} \rightarrow 0, \quad G_n / y_n \rightarrow 0, \quad (9)$$

where $G_n := \max_{1 \leq k \leq n} |g_k|$. Then

$$\mathbf{P}(T_{y_n, g} > n) = \mathbf{P}(y_n + \min_{1 \leq k \leq n} (S_k - g_k) > 0) \sim \sqrt{2/\pi} y_n / \sqrt{t_n}. \quad (10)$$

To prove the theorem note that

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_{y_n, g} > n) &\leq \mathbf{P}(y_n + \min_{1 \leq k \leq n} S_k > -G_n) = \mathbf{P} \left(\min_{1 \leq t \leq 1} s_n(t) > \frac{-y_n - G_n}{\sqrt{t_n}} \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\min_{1 \leq t \leq 1} W_n(t) > \frac{-y_n - G_n - \varepsilon_n y_n}{\sqrt{t_n}} \right) + \mathbf{P}(\delta_n > \varepsilon_n y_n / \sqrt{t_n}). \end{aligned}$$

Similarly,

$$\mathbf{P}(T_{y_n, g} > n) \geq \mathbf{P} \left(\min_{1 \leq t \leq 1} W_n(t) > \frac{-y_n + G_n + \varepsilon_n y_n}{\sqrt{t_n}} \right) - \mathbf{P}(\delta_n > \varepsilon_n y_n / \sqrt{t_n}).$$

On the other hand, it is known that for any $x_n > 0$

$$\mathbf{P} \left(\min_{1 \leq t \leq 1} W_n(t) > x_n \right) = \int_{-x_n}^{x_n} (2\pi)^{-1/2} e^{x^2/2} dx \sim \sqrt{2/\pi} x_n$$

as $x_n \rightarrow 0$. These arguments yield (2) with

$$0 < x_n = (y_n \pm G_n \pm \varepsilon_n y_n) / \sqrt{t_n} \sim y_n / \sqrt{t_n}.$$

As a simple corollary we obtain

Theorem 3 *Suppose that random variables $\{X_k\}$ are independent and that conditions (1), (1) and (2) take place when $y = y_n$ and $\sqrt{t_n} = B_n$. Assume in addition that*

$$B_n^3 / y_n^{\alpha+1} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sup_{k \geq 1} \mathbf{E}X_k^\alpha / \mathbf{E}X_k^2 < \infty$$

for some $\alpha > 2$. Then assertion (2) of Theorem 2 holds with $\sqrt{t_n} = B_n$.

For the proof note first of all that from (2) and (2) we have:

$$\sqrt{t_n}\delta_n = \max_{0 \leq t \leq t_n} |s(t) - \tilde{W}_n(t)| \quad (11)$$

where $\tilde{W}_n(t) := \sqrt{t_n}W_n(t/t_n)$ is a new Wiener process. But it was shown in Theorem 1 from [9] that for each $\alpha > 2$ and every $\varepsilon_n y_n > 0$ it is possible to construct a Wiener process $\tilde{W}_n(\cdot)$ such that

$$\mathbf{P} \left(\max_{t \leq B_n^2} |s(t) - \tilde{W}_n(t)| > C\alpha\varepsilon_n y_n \right) \leq (\varepsilon_n y_n)^{-\alpha} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|X_k|^\alpha,$$

where C is an absolute constant. Hence, Theorem 3 is a partial case of Theorem 2 with $t_n = B_n^2$ and $\varepsilon_n = B^{3/(\alpha+1)}/y_n \rightarrow 0$.

Note that if in the proof of Theorem 3 instead of the estimates from [9] we will use the similar estimates from [10] or [11] for $2 < \alpha \leq 3$, then we obtain that the main assertion of Theorem 3 remains valid also for the special martingales which was considered in [10] and [11].

3. Conclusions

The process $s(\cdot)$ defined in (2) does not dependent on n . Hence, it follows from (2) that condition (2) holds only when $y_n \rightarrow \infty$. It means that strong approximations do not allow as to investigate probabilities from (1) for fixed values y . For such values y we should search for different approaches. And one such approach was developed in [2].

Acknowledgments

The research was supported by RSF (project No. 17-11-01173).

References

1. *Aurzada F., Baumgarten C.* Survival probabilities of weighted random walks // ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. — 2011. — Vol. 8. — P. 235–258.
2. *Denisov D., Sakhanenko A. I., Wachtel V.* First-passage times for random walks with non-identically distributed increments // arXiv: 1611.00493v1 [math.PR]. — 2016.
3. *Denisov D., Wachtel V.* Conditional limit theorems for ordered random walks // Electron. J. Probab. — 2010. — Vol. 15. — P. 292–322.
4. *Denisov D., Wachtel V.* Random walks in cones // Ann. Probab. — 2015. — Vol. 3, no. 3. — P. 992–1044.

5. *Denisov D., Wachtel V.* Exit times for integrated random walks // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. — 2015. — Vol. 51, no. 1. — P. 167–193.
6. *Doney R. A.* Spitzer's condition and the ladder variables in random walks // Prob. Th. Rel. Fields. — 1995. — Vol. 101. — P. 577–580.
7. *Greenwood P. E., Novikov A. A.* One-sided boundary crossing for processes with independent increments // Theory Probab. Appl. — 1987. — Vol. 31, no. 2. — P. 221–232.
8. *Novikov A. A.* The martingale method in the problem of first passage over nonlinear boundaries // Trudy Math. Inst. Acad. Sci. USSR. — 1981. — Vol. 158. — P. 130–152. (in Russian)
9. *Sakhanenko A. I.* Estimates in the invariance principle in terms of truncated power moments. Siberian Math. J. — 2006. — Vol. 47. — P. 1113–1127.
10. *Sakhanenko A. I.* Simple method of obtaining estimates in the invariance principle // Lecture Notes in Math. — Springer, 1988. — Vol. 1299. — P. 430–443.
11. *Sakhanenko A. I.* A new way to obtain estimates in the invariance principle // Progr. Probab. — Birkhäuser, 2000. — Vol. 47. — P. 223–245.
12. *Uchiyama K.* Brownian first exit from and sojourn over one-sided moving boundary and application // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1980. — Vol. 54. — P. 75–116.

UDC 519.218.31

A stopped random walk and stability of a service process of Poisson input flows by a loop algorithm

A. V. Zorine*

** Institute for information technologies, mathematics and mechanics,
N. I. Lobachevsky National Research University of Nizhni Novgorod,
Gagarina ave. 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia*

Abstract. A queueing system with two Poisson input flows, infinite capacity queues, and a single server is studied. If the first queue is empty at the service time termination of the second queue, the server makes the loop by prolongation of the service time for the second queue by the same amount until the first queue is entered by a customer. Otherwise, a cyclic switching is used. We employ the fact that during certain intervals the second queue is described by a random walk stopped at a random time. In result the queueing system is modeled by a multidimensional discrete Markov chain, the server state and queues' lengths its elements. A necessary condition for the stationary probability distribution existence is found.

Keywords: conflicting queueing system, loop control algorithm, stopped random walk stationary probability distribution, necessary condition.

1. Introduction

In queueing systems with several conflicting input flows different control algorithms are used. Some control algorithms allow for a relatively easy stability study, e.g. cyclic algorithms. On the contrary, control algorithms relying on state-dependent switching of the server can lead to analytically intractable models [1–5]. Stability analysis of queueing systems like these is complicated by varying server regimes. Consider a queueing system with two input flows controlled by an algorithm with a loop. Assume that the server dedicates a nonrandom amount of time to each queue in turn. If the first queue is empty at the service time termination of the second queue, the server makes the loop by prolongation of the service time for the second queue by the same amount until the first queue is entered by a customer. After the first queue no prolongation is possible. A control algorithm of this kind can be used for traffic control at intersections governed by trafficlight signals as well as for automated microchip production machines. Depending on the inputs intensities, the operational metrics of such system are more like those of a purely cyclic system (heavy load case), or an M/G/1 batch system (light first flow case), or a mixture of the two. In turn, the mixing weights depend on all system parameters in quite a complicated way. We aim to demonstrate that a careful choice of observation instants can facilitate the analysis at cost of explicit solution of a stopped random walk problem. The loop algorithm can be regarded as a cyclic algorithm with random durations of server regimes.

2. Main section

Consider a queueing system with two conflicting Poisson inputs Π_1, Π_2 . The intensity of Π_j is $\lambda_j, j = 1, 2$. Customers from Π_j join a queue O_j of unlimited capacity. A server has two states, $\Gamma^{(1)}$ and $\Gamma^{(2)}$. Only customers from O_j get serviced in the state $\Gamma^{(j)}$. The server spends a constant time T_j in the state $\Gamma^{(j)}$. When this time elapses, the server instantly switches to the state $\Gamma^{(2)}$ if $j = 1$, but if $j = 2$ the new server state becomes $\Gamma^{(1)}$ only if the queue O_1 is non-empty, otherwise a new time slot in the state $\Gamma^{(2)}$ takes place. The server loops in $\Gamma^{(2)}$ until new arrivals from Π_1 . Epochs of these T_1 - and T_2 -time endings will be called the control epochs, and denoted $\tau_i, i = 0, 1, \dots$. To define the service process we use the notion of a saturation flow [6]. In the state $\Gamma^{(j)}$ the saturation flow Π_j^{sat} holds $\ell_j > 0$ customers during the time T_j , and the other saturation flow $\Pi_r^{\text{sat}}, r \neq j$, holds no customers.

An example of a real-life queueing situation satisfying the above assumptions is an intersection with state-dependent traffic light switching. If yellow light signals (when cars may pass) can be adjoined to green light signals, and if a lower-priority direction can be let through only when there are no vehicles in a perpendicular high-priority direction, then our assumptions are fulfilled.

Using methods from [7] we can represent the queueing system as an abstract control system of Lyapunov–Yablonsky [8] and define a multidimensional stochastic sequence

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}); i = 0, 1, \dots\} \tag{1}$$

on a probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, where Γ_i is the server state during he time slot $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, $\varkappa_{j,i}$ is the number in O_j at time $\tau_i, i = 1, 2, \dots, \Gamma_0$ is the initial server state at time $\tau_0 = 0$, dependence of the elementary outcome ω implied but omitted in notation, as usual. We have on the set $\{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(2)}, \varkappa_{1,i} > 0\}$ functional relations $\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(1)}, \varkappa_{1,i+1} = \max\{0, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \ell_1\}, \varkappa_{2,i+1} = \varkappa_{2,i} + \eta_{2,i}, \eta_{j,i}$ possessing a Poisson probability distribution with parameter $\lambda_j T_1, j = 1, 2$, and on the set $\{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(1)}\} \cup \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(2)}, \varkappa_{1,i} = 0\}$ we have $\varkappa_{1,i+1} = \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \varkappa_{2,i+1} = \max\{0, \varkappa_{2,i} + \eta_{2,i} - \ell_2\}, \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(2)}, \eta_{j,i}$ having a Poisson probability distribution with parameter $\lambda_j T_2, j = 1, 2$. In effect, sequence (2) is a homogeneous Markov chain.

Let $S' = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}\} \times \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\}$ be the state space of the process (2), put $S_0 = \{(\Gamma^{(2)}, 0, x_2); x_2 = 0, 1, \dots\}$. Introduce stopping moments $\theta_0 = 0, \theta_{i+1} = \min\{k: k > \theta_i, (\Gamma_k, \varkappa_{1,k}, \varkappa_{2,k}) \notin S_0\}$. Set $\hat{\Gamma}_i = \Gamma_{\theta_i}, \hat{\varkappa}_{j,i} = \varkappa_{j,\theta_i}, i = 0, 1, \dots$. The new sequence

$$\{(\hat{\Gamma}_i, \hat{\varkappa}_{1,i}, \hat{\varkappa}_{2,i}); i = 0, 1, \dots\} \tag{2}$$

is another Markov chain. To find its transition probabilities, let us note that on a set $\{\omega: \hat{\Gamma}_i = \Gamma^{(2)}, \hat{\varkappa}_{1,i} > 0\} \cup \{\omega: \hat{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \hat{\varkappa}_{1,i} > 0\}$ one has $\theta_{i+1} = \theta_i + 1$, while on a set $\{\omega: \hat{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \hat{\varkappa}_{1,i} = 0\}$ the number of prolongations is $\nu_{i+1} = \theta_{i+1} - \theta_i$, geometrical random variable taking on value $k = 1, 2, \dots$ with probability $(1 - p)p^{k-1}$, $p = e^{-\lambda_1 T_2}$. Also on the set $\{\omega: \hat{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \hat{\varkappa}_{1,i} = 0, \hat{\varkappa}_{2,i} = x_2\}$ quantities $\varkappa_{2,\theta_i}, \varkappa_{2,\theta_i+1}, \dots, \varkappa_{2,\theta_{i+1}}$ behave as the number in an $M/G/1/\infty$ queue with batch service and initial queue length $\hat{\varkappa}_{2,i}$, and $\hat{\varkappa}_{2,i+1}$ is the number at the stopping time ν_{i+1} . To employ this observation, let us introduce auxiliary i.i.d. Poisson variables $\eta'_i, i = 1, 2, \dots$ with parameter $\lambda_2 T_2$, and variables $\kappa'_0 = b, \kappa'_{i+1} = \max\{0, \kappa'_i + \eta'_i - \ell_2\}$. Further, let us introduce a family of probability generating functions ($|z| \leq 1, k = 0, 1, \dots$):

$$\Phi_k(z, b) = E(z^{\kappa'_k}), \quad \Phi(p, z; b) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \Phi_k(z; b), \quad q_j(z; t) = \exp\{\lambda_j t(z-1)\}.$$

Then, in law,

$$\begin{aligned} E(z_1^{\hat{\kappa}_{1,i+1}} z_2^{\hat{\kappa}_{2,i+1}} \mid \{\omega: \hat{\Gamma}_i = \Gamma^{(1)}, \hat{\varkappa}_{1,i} = 0, \hat{\varkappa}_{2,i} = x_2\}) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_1 T_2})^{k-1} \left(\sum_{b=1}^{\infty} z_1^b \frac{(\lambda_1 T_2)^b}{b!} e^{-\lambda_1 T_2} \right) \Phi_k(z_2; x_2) = \\ &= (e^{\lambda_1 T_2 z_1} - 1)(\Phi(p, z_2; x_2) - z_2^{x_2}). \end{aligned}$$

We claim the following:

Lemma 1. *Let $\beta_j = \beta_j(p), j = 1, 2, \dots, \ell_2$, be the zeroes of an equation $z^{\ell_2} - q_2(z; T_2) = 0$ lying inside a unit disk $|z| < 1$. Then*

$$\begin{aligned} \Phi(p, z; b) &= \frac{(z - \beta_1) \times \dots \times (z - \beta_{\ell_2})}{z^{\ell_2} - pq_2(z; T_2)} \left(\frac{1}{(1 - \beta_1) \times \dots \times (1 - \beta_{\ell_2})} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\ell_2} \frac{(\beta_j)^{\ell_2-1}}{\prod_{s \neq j} (\beta_j - \beta_s)} \left(\frac{z^{b+1} - (\beta_j)^{b+1}}{z - \beta_j} - \frac{1 - (\beta_j)^{b+1}}{1 - \beta_j} \right) \right). \end{aligned}$$

Let $Q_i(r; x_1, x_2) = P(\{\omega: \hat{\Gamma}_i = \Gamma^{(r)}, \hat{\varkappa}_{1,i} = x_1, \hat{\varkappa}_{2,i} = x_2\})$,

$$\Psi_i(z_1, z_2; r) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} z_1^{x_1} z_2^{x_2} Q_i(r; x_1, x_2), \quad r = 1, 2.$$

Lemma 2. *One has ($p = e^{-\lambda_1 T_2}$)*

$$\begin{aligned} & \Psi_{i+1}(z_1, z_2; 1) + \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_{i+1}(1; 0, x_2) z_2^{x_2} = \\ & = q_2(z_2; T_1) \sum_{x_1=1}^{\ell_1-1} \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_i(2; x_1, x_2) z_2^{x_2} \sum_{b=0}^{\ell_1-1-x_1} \varphi_1(b; T_1) (1 - z_1^{x_1+b-\ell_1}) + \\ & \quad + z_1^{-\ell_1} q_1(z_1; T_1) q_2(z_2; T_1) \Psi_i(z_1, z_2; 2), \\ & \Psi_{i+1}(z_1, z_2; 2) = q_1(z_1; T_2) z_2^{-\ell_2} q_2(z_2; T_2) \Psi_i(z_1, z_2; 1) + \\ & + \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_2-1} Q_i(1; x_1, x_2) z_1^{x_1} q_1(z_1; T_2) \sum_{b=0}^{\ell_2-1-x_2} \varphi_2(b; T_2) (1 - z_2^{x_2+b-\ell_2}) + \\ & + (p^{-1} q_1(z_1; T_2) - 1) \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_i(1; 0, x_2) z_2^{x_2} \left(z_2^{-x_2} \Phi(p, z_2; x_2) - 1 \right). \end{aligned}$$

Lemma 1 is an extension of known facts firstly because as a rule only the case $b = 0$ is studied in the majority of researches. Secondly, they were more interested in the limit of $(1 - p)\Phi(p, z; b)$ as $p \rightarrow 1$ as it gives the stationary probability distribution for the random walk.

Theorem 1. *For the existence of a stationary probability distribution of the Markov chain $\{(\hat{\Gamma}_i, \hat{x}_{1,i}); i = 0, 1, \dots\}$ an inequality $\lambda_1(T_1 + T_2) - \ell_1 \leq 0$ is necessary, and the inequality $\lambda_1(T_1 + T_2) - \ell_1 < 0$ is sufficient.*

Theorem 2. *Let $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\ell_1}$ be the zeroes of the equation $z^{\ell_1} - q_1(z; T_1 + T_2) = 0$ lying in the unit disk $|z| \leq 1$. Then the stationary probabilities $Q_1(1, 0)$ of the set $\{(\Gamma^{(1)}, 0, x_2); x_2 = 0, 1, \dots\}$, $Q_1(2, b)$ of the set $\{(\Gamma^{(2)}, b, x_2); x_2 = 0, 1, \dots\}$, $b = 2, 3, \dots, \ell_1 - 1$ are the solution to next linear algebraic system*

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{\ell_1-1} Q_1(2, x) \sum_{b=0}^{\ell_1-1-x} \frac{(\lambda_1 T_1)^b}{b!} e^{-\lambda_1 T_1} (\alpha_w^{\ell_1} - \alpha_w^{x+b}) + \\ & + Q_1(1, 0) e^{-\lambda_1 T_2} \cdot \frac{e^{\lambda_1(T_1+T_2)(\alpha_w-1)} - e^{\lambda_1 T_1(\alpha_w-1)}}{1 - e^{-\lambda_1 T_2}} = 0, \quad w = 2, 3, \dots, \ell_1, \\ & \sum_{x=1}^{\ell_1-1} Q_1(2, x) \sum_{b=0}^{\ell_1-1-x} \frac{(\lambda_1 T_1)^b}{b!} e^{-\lambda_1 T_1} (\ell_1 - x - b) + \\ & + Q_1(1, 0) e^{-\lambda_1 T_2} \frac{\lambda_1 T_2}{1 - e^{-\lambda_1 T_2}} = \frac{\ell_1 - \lambda_1(T_1 + T_2)}{2}. \end{aligned}$$

Theorem 3. *For the existence of the stationary probability distribution of the Markov chain (2) it is necessary that*

$$\frac{1}{2}(\lambda_2(T_1 + T_2) - \ell_2) + \frac{p}{1-p}(\lambda_2 T_2 - \ell_1)Q_1(1,0) < 0.$$

Theorems 1–3 characterize the stability regime of the queueing system with loop algorithm in a form suitable for numerical verification.

3. Conclusions

We have demonstrated that a queueing system governed by a loop algorithm can be efficiently studied if the embedded process resembles a cyclic algorithm. It can be achieved by skipping a random number of working tacts in certain server regimes.

References

1. *Litvak N.V., Fedotkin M.A.* A probabilistic model for the adaptive control of conflict flows // Automation and remote control. —2000. — V. 61, no. 5, part 1. — P. 777–784.
2. *Proydaikova E.V.* Necessary conditions for the existence of a stationary distribution of output flows in a system with priority direction // Vestnik NNSU. — 2007. — No. 1. — P. 167–172.
3. *Zorine A.V.* Stochastic oscillations of priority queue length when servicing conflict flows by a prolongation algorithm in a random environment // Vestnik NNSU. — 2009. — No.1. — P. 112–118.
4. *Fedotkin M.A., Ratchinskaya M.A.* The functioning model for the different intensity and priority flows control and service system // Bulletin of VSAWT. — 2016. — No. 48. — P. 62–69.
5. *Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V.* Analysis of a cybernetic discrete system for adaptive control of customers flows // Discrete models in the control systems theory: IX International conference, Moscow and Moscow region, 20–22 May, 2015: Proceedings / M.E. V. B. Alekseev, D. S. Romanov, B. R. Danilov. — MAKS Press, Moscow. — 2015. — P. 247–249.
6. *Fedotkin M.A.* Optimal control for conflict flows and marked point processes with selected discrete component. I // Lietuvos matematikos rinklnys. — 1988. — Vol. 28, no. 4. — P. 783–794.
7. *Zorine A.V.* A cybernetic model of cyclic control of conflicting flows with an after-effect // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. — 2014. — Vol. 156, no. 3. — P. 66–75.
8. *Lyapunov A.A.* Theoretical problems of cybernetics // Problems of cybernetics. Issue 9. / A.A. Lyapunov, S.V. Yablonsky. — Moscow, Fizmatgiz, 1963. — P. 5–22.

УДК 519.21

Интегральное представление переходных вероятностей марковского процесса многомерной эпидемии Вейса

А. В. Мастихин*

* Кафедра высшей математики,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., д.5, Москва, Россия, 105005

Аннотация. В докладе обсуждаются некоторые результаты, полученные при обобщении марковского процесса простой эпидемии.

Ключевые слова: марковский процесс эпидемии, экспоненциальная производящая функция, точное решение.

1. Определение марковского процесса эпидемии

На множестве состояний $N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i = 0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)), t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями

$$P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}.$$

Пусть при $t \rightarrow 0+$ переходные вероятности имеют вид $(\mu_1 > 0, \rho_1 > 0, \dots, \mu_n > 0, \rho_n > 0)$

$$P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(t) = (\mu_1 \alpha_1 \alpha_n + \dots + \mu_n \alpha_{n-1} \alpha_n)t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(t) = \rho_1 \alpha_1 t + o(t),$$

...

$$P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}-1, \alpha_n)}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)}(t) = \rho_{n-1} \alpha_{n-1} t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^{(\alpha_1, T_1 \rightarrow 0, \alpha_n)}(t) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j (\alpha_j \alpha_n + \rho_j \alpha_j) \right) t + o(t).$$

Марковский процесс $\xi(t)$ интерпретируется как модель одновременного распространения $n - 1$ типа эпидемий (с разными интенсивностями взаимодействия между восприимчивыми особями и переносчиками). В популяции имеются n типов особей (частиц), $n - 1$ из которых

являются переносчиками инфекции. Частицы типа T_1, \dots, T_{n-1} — зараженные особи (переносчики инфекции), частицы типа T_n — здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие контактов с зараженными). Состояние процесса $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ означает наличие α_1 частиц типа T_1, \dots, α_{n-1} частиц типа T_{n-1} и α_n частиц типа T_n . Через случайное время τ_α^i , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^i < t\} = 1 - e^{-\alpha_i \alpha_n \mu_i t}$, пара частиц типа T_i и типа T_n взаимодействует и превращается в частицу типа T_i . Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_i, \dots, \alpha_n - 1)$, кроме того, через случайное время τ_α^{n+i-1} , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^{n+i-1} < t\} = 1 - e^{-\alpha_i \rho_1 t}$, частица типа T_1 умирает и процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_n)$; $i = 1, 2, \dots, n-1$. Случайные величины $\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^{2n-2}$ независимы, в состоянии $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^{2n-2}\}$. Далее следует аналогичная эволюция процесса. Схема взаимодействий:

$$T_1 + T_n \rightarrow T_1, \quad T_1 \rightarrow 0, \quad \dots, \quad T_{n-1} + T_n \rightarrow T_{n-1}, \quad T_{n-1} \rightarrow 0.$$

Процесс является естественным обобщением марковского процесса (простой) эпидемии Вейса [1], рассматривавшейся, например, в [2], [3], [4].

2. Замкнутое решение системы уравнений Колмогорова

Для экспоненциальной производящей функции $\mathcal{F}(t; z; s)$

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_n=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(t) s_1^{\beta_1} \dots s_n^{\beta_n}$$

первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)$ записываются в виде системы уравнений в частных производных ([2])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\mu_j z_j z_n \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_j \partial z_n} \right) + \rho_j z_j \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_j} \right) \right], \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\mu_j (s_j - s_j s_n) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_j \partial s_j} + \rho_j (1 - s_j) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_j} \right], \end{aligned}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, \dots, z_n; s_1, \dots, s_n) = e^{z_1 s_1 + \dots + z_n s_n}$.

Т е о р е м а. Для марковского процесса $\xi(t)$ двойная производящая функция переходных вероятностей равна

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} z_j s_j e^{-(\mu_j x + \rho_j) t} + z_n \right\} \left[e^{z_n (s_n - 1) e^{-y}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^\infty e^{-v_j + z_n(s_n-1)e^{-y - \frac{\mu_j}{\rho_j}u}} \sqrt{\frac{z_j}{v_j}(1 - e^{-(\mu_j x + \rho_j)t})} \times \\
& \quad \times I_1(2\sqrt{z_j v_j(1 - e^{-(\mu_j x + \rho_j)t})}) dv_j + \\
& + \int_0^\infty dv_1 \cdots \int_0^\infty dv_{n-1} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{n-1} v_j + z_n(s_n-1)e^{-y} \prod_{j=1}^{n-1} e^{-\frac{\mu_j}{\rho_j}v_j} \right\} \times \\
& \quad \times \prod_{j=1}^{n-1} \sqrt{\frac{z_j}{v_j}(1 - e^{-(\mu_j x + \rho_j)t})} I_1(2\sqrt{z_j v_j(1 - e^{-(\mu_j x + \rho_j)t})}) \Big] \times \\
& \quad \times H(x, y) dx dy,
\end{aligned}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуль, ${}_0F_2(1, 1; z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция, $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя и

$$H(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux}) J_0(2\sqrt{vy}) {}_0F_2(1, 1; -uv) dudv.$$

3. Заключение

Очертим некоторые приложения данной выше теоремы. Из определения экспоненциальной производящей функции получаем (разлагая в ряд) выражения для переходных вероятностей и числовые характеристики марковского процесса. Далее, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, вычислена производящая функция финальных вероятностей для поглощающих состояний $(0, \dots, 0, \gamma_n)$ и явные выражения для финальных вероятностей. При $\alpha_n \rightarrow \infty$ методом характеристических функций получена предельная теорема для финальных вероятностей процесса многомерной эпидемии Вейса.

Литература

1. Weiss G. On the spread of epidemics by carries // Biometrics. — 1965. — Vol. 21, no. 2. — P. 481–490.
2. Калинин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук. — 2002. — Т. 57, вып. 2. — С. 23–84.
3. Мастихин А. В. Финальные вероятности марковского процесса эпидемии Беккера // Теория вероятностей и ее применения. — 2011. — Т. 56, вып. 3. — С. 606–614.
4. Kalinkin A. V., Mastikhin A. V. A limit theorem for a Weiss epidemic // J. Appl. Probab. — 2015. — Vol. 52, no. 1 — P. 247–257.

UDC 519.21

Integral representation of transition probabilities for Weiss multidimensional epidemic process

A. V. Mastikhin*

* *Department of Higher Mathematics,
Bauman Moscow State Technical University,
2-nd Baumanskaya str., 5, Moscow, 105005, Russia*

For Markov multidimensional death-process of a special class we consider the use of Fourier methods to obtain an exact solution of Kolmogorov equations for the exponential (double) generating function of transition probabilities. We obtain integral representation for the generating function of transition probabilities, using special functions.

Keywords: Markov epidemic process; transition probabilities; equations for exponential generating function; closed solution.

UDC 519.21

Moments of the sojourn time of random walk above a certain boundary

A. S. Tarasenko*[†]

* *Sobolev Institute of Mathematics,
630090, Novosibirsk, Russia*

[†] *Novosibirsk State University,
630090, Novosibirsk, Russia*

Abstract. We study the behaviour of moments of the sojourn time of random walk with zero drift above a certain growing boundary. With imposed Cramer condition on the existence of an exponential moment on the distribution of jumps of the random walk we find asymptotic expansions for the expectation of the sojourn time.

Under general conditions, we obtain inequalities for certain moments of sojourn time of a random walk over linear boundary. We find asymptotics of these moments for random walks with regular or semi-exponential distribution of summands.

Keywords: random walk, sojourn time, asymptotic analysis, inequalities.

1. Introduction

Let ξ_1, ξ_2, \dots be a sequence of i.i.d. random variables, $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Sojourn time of random walk $\{S_n\}_{n \geq 1}$ above a level b is defined as

$$T_n(b) := \sum_{i=1}^n I_{\{S_i \geq b\}},$$

where I_A — is an indicator of event A . The value of b can also be dependent on n .

The study of distribution of sojourn time on half-axis is a challenging task. For the simple random walks a set of results about it's distribution can be obtained via combinatorial methods: arcsine law is a well known example, that describes limit behaviour of distribution of $T_n(0)$. Other results are based on convergence of functionals of trajectory of random walk to distribution of corresponding functionals of limit processes. Here we will focus on a more specific problem of studying asymptotics of moments of $T_n(b)$.

2. Main section

Denote the rate function

$$\Lambda(\alpha) := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\alpha\lambda - \ln \psi(\lambda)),$$

where $\psi(\lambda) := \mathbb{E}e^{\lambda\xi}$.

Following simple result describes asymptotic of $\mathbb{E}T_n(b)$ under the Cramer condition:

Theorem 1. *Assume $\mathbb{E}\xi = 0$ and $|\mathbb{E}e^{\lambda\xi}| < \infty$, given that $|\operatorname{Re}\lambda| \leq \beta$ for some $\beta > 0$. If b_n — monotone sequence such that, $b_n/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ and $b_n/n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, then*

$$\mathbb{E}T_n(b_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n^{5/2} \sigma^3}{b_n^3} e^{-n\Lambda(b_n/n)}.$$

Needs to be noted that the study of sojourn time is certainly related to boundary value problems for random walks. And, similarly to other papers devoted to the study of boundary value problems, the asymptotic analysis of expectation of sojourn time under the Cramer conditions can be carried out using the so-called factorization method, which allows us to additionally obtain a complete asymptotic expansion for $\mathbb{E}T_n(b_n)$.

Next, all obtained inequalities for moments of sojourn time are based on the following result:

Theorem 2. *Let $n \geq 1$ and $g(x)$ — be such a function, that $g(0) = 0$ and*

$$\frac{d^k g}{dx^k}(x) \geq 0$$

for all $x \in (0, n)$ and all natural $k \leq n$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g(T_n(b)) &\leq \sum_{j=1}^n (g(n-j+1) - g(n-j)) \mathbb{P}\{S_j \geq b\}, \\ \mathbb{E}g(T_n(b)) &\geq \sum_{j=1}^n (\mathbb{E}g(\eta_{n-j} + 1) - \mathbb{E}g(\eta_{n-j})) \mathbb{P}\{S_j \geq b\}, \end{aligned}$$

where random variables $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ have binomial distribution with parameters i and $p := \min_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}\{S_j \geq 0\}$.

In particular, for $k \in \mathbb{N}$ and $\mu > 0$ we get:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_n^k(b) &\geq \sum_{j=1}^n ((p(n-j)+1)^k - (p(n-j))^k) \mathbb{P}\{S_j \geq b\}, \\ \mathbb{E}T_n^k(b) &\leq \sum_{j=1}^n ((n-j+1)^k - (n-j)^k) \mathbb{P}\{S_j \geq b\}, \end{aligned}$$

$$1 + (e^\mu - 1) \sum_{j=1}^n q_1^{n-j} \mathbb{P}\{S_j \geq b\} \leq \mathbb{E}e^{\mu T_n(b)} \leq 1 + (e^\mu - 1) \sum_{j=1}^n q_2^{n-j} \mathbb{P}\{S_j \geq b\},$$

where $q_1 = (1 - p + pe^\mu)$, $q_2 = e^\mu$.

In some cases the upper bound will be asymptotically equivalent to $\mathbb{E}g(T_n)$. For example, following result holds:

Theorem 3. *Let $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, $b_n/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ and assume that exists such sequence of positive numbers Δ_n , that*

$$\Delta_n/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \quad \mathbb{P}\{S_j \geq b_n + \Delta_n\} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{P}\{S_j \geq b_n\},$$

uniformly for $1 \leq j \leq n$.

Then for any monotone function g , such that $g(0) = 0$, following holds:

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{j=1}^n (g(n-j+1) - g(n-j)) \mathbb{P}\{S_j \geq b_n\}.$$

It can be shown that regularly varying distributions satisfy conditions of this theorem.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 16-00-00049.

УДК 519.214+519.212.3

Предельные распределения экстремальных расстояний до ближайшего соседа

А. М. Зубков^{*†}, О. П. Орлов[†]

^{*} Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина 8, Москва, Россия, 119991

[†] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы 1, Москва, Россия, 119992

Аннотация. В докладе представлены теоремы о предельных распределениях минимального и максимального расстояний до ближайшего соседа в совокупности случайных независимых точек, имеющих в определенном смысле равномерное распределение на произвольном метрическом пространстве. В качестве примеров таких пространств рассмотрены многомерный тор и двоиичный куб. При определенных условиях утверждения теорем удастся свести к исследованию суммы индикаторов, которая допускает пуассоновскую аппроксимацию.

Ключевые слова: предельные теоремы, экстремальные значения, ближайший сосед, метод моментов.

1. Введение

Пусть на метрическом пространстве (B, ρ) задана вероятностная мера Q , удовлетворяющая условию

$$Q(\{y \in B : \rho(y, x) \leq z\}) = w(z) \quad \text{для любого } x \in B, \quad (1)$$

и ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные элементы B с распределением Q , удовлетворяющим условию (1). Естественными примерами таких мер являются равномерные распределения на многомерных сферах и (непрерывных или дискретных) торах; существуют также примеры неравномерных распределений, удовлетворяющих условию (1) при некоторых значениях z .

Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ введём случайную величину $\zeta_i = \min_{j \neq i} \rho(\xi_i, \xi_j)$ — расстояние от точки ξ_i до ее ближайшего соседа. Пусть $\zeta_{(1)} \leq \dots \leq \zeta_{(n)}$ — вариационный ряд, составленный из величин ζ_1, \dots, ζ_n . Тогда величина $\phi_n = \zeta_{(1)} = \min_{1 \leq i < j \leq n} \rho(\xi_i, \xi_j)$ является минимальным попарным расстоянием между точками выборки (минимальным расстоянием до ближайшего соседа), а величина $\psi_n = \zeta_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_i$ является максимальным расстоянием до ближайшего соседа.

В п. 2 сформулированы теоремы о предельном распределении величин ϕ_n и ψ_n . В этих теоремах рассматриваются схемы серий, в которых при изменении параметра n могут изменяться пространство B , метрика ρ и мера Q . Доказательства основаны на модификации метода моментов, предложенной Б. А. Севастьяновым [1]. В пп. 3 и 4 в

качестве примеров рассмотрены случаи, когда B — многомерный тор или двоичный куб.

Случайные величины, связанные с расстояниями до ближайших соседей (как правило, для многомерных торов), изучались многими авторами (см., например, [2–5]); расстояния до ближайших соседей используются при построении статистических критериев равномерности распределения (см., например, [6–9]), в алгоритмах классификации, поиска и т. п.

2. Формулировки общих теорем

Теорема 1 Если $C_n^2 w(r_n) \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$P(\phi_n > r_n) \rightarrow e^{-\lambda}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В формулировке следующей теоремы используются величины

$$L_k(z) = \min_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ \rho(x_i, x_j) > z \\ 1 \leq i < j \leq k}} Q \left(\bigcup_{i=1}^k \{y \in B : \rho(y, x_i) \leq z\} \right), \quad k \geq 1, z \geq 0,$$

равные минимальной вероятностной мере объединения k таких шаров радиуса z , что центр каждого шара не принадлежит другим шарам.

Теорема 2 Если выполнены условия

$$1) n(1 - w(r_n))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda, \quad \lambda \in (0, \infty),$$

$$2) w(2r_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

3) при любых фиксированных натуральных $1 \leq k < m$

$$n^m (w(2r_n) - w(r_n))^{m-k} \max_{i_1 + \dots + i_k = m} (1 - L_{i_1}(r_n) - \dots - L_{i_k}(r_n))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то

$$P(\psi_n \leq r_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}.$$

3. Случайные точки на торе

Пусть d — фиксированное натуральное число. Рассмотрим d -мерный тор $T^d = S^1 \times \dots \times S^1$ (прямое произведение d окружностей единичной длины). Введём метрику $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq d} \rho^1(x_i, y_i)$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_d)$, а $\rho^1(x_1, y_1)$ — длина наименьшей дуги, соединяющей точки x_1 и y_1 на окружности. В этом случае $w(z) = \min\{(2z)^d, 1\}$.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые точки на этом торе, имеющие на нём равномерное распределение. Обозначим, как и прежде, через $\zeta_i =$

$\min_{j \neq i} \{\rho(\xi_i, \xi_j)\}$ расстояние от i -й точки до ближайшего соседа, а через $\phi_n = \min_{1 \leq i \leq n} \zeta_i$ и $\psi_n = \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_i$ — минимальное и максимальное расстояния до ближайшего соседа.

Теорема 3 При $d = \text{const}$, $n \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\mathbb{P} \left(\phi_n > \frac{1}{2} \left(\frac{2y}{n^2} \right)^{1/d} \right) \rightarrow e^{-y}, \quad \mathbb{P} \left(\psi_n \leq \left(\frac{y + \ln n}{2^d n} \right)^{1/d} \right) \rightarrow e^{-e^{-y}}, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Замечание. Утверждения теоремы 3 можно вывести из результатов работ [2], [9]; теорема приводится как пример применения теорем 1 и 2. В [3] найдено предельное распределение максимального расстояния до ближайшего соседа в случае евклидовой метрики и некоторых ограничений на распределение случайных точек.

4. Двоичные строки

Пусть $V_T = \{0, 1\}^T$ — пространство двоичных строк длины T с метрикой Хемминга $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^T \mathbb{I}\{x_i \neq y_i\}$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T) \in V_T$. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые элементы V_T , имеющие равномерное распределение на V_T . Тогда

$$w(z) = \mathbb{P}(\rho(\xi_1, \mathbf{x}) \leq r_n) = \frac{1}{2^T} \sum_{k=0}^{\lfloor z \rfloor} C_T^k \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in V_T.$$

Как и раньше, пусть $\zeta_i = \min_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \rho(\xi_i, \xi_j)$ — расстояние от строки ξ_i до её ближайшего соседа, $i = 1, \dots, n$, а $\phi_n = \min_{1 \leq i \leq n} \zeta_i$ и $\psi_n = \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_i$ — минимальное и максимальное расстояния до ближайшего соседа.

Статистики ϕ_n и ψ_n можно использовать для проверки гипотезы о равномерности и независимости элементов выборки ξ_1, \dots, ξ_n .

Теорема 4 Если $n, T \rightarrow \infty$ и s_n меняются так, что

$$C_n^2 \frac{1}{2^T} \sum_{k=0}^{s_n} C_T^k \rightarrow \lambda,$$

$$\frac{1}{2^T} \sum_{k=0}^{s_n} C_T^k = (1 + o(1)) \frac{2\lambda}{n^2},$$

то

$$\mathbb{P}(\phi_n > s_n) \rightarrow e^{-\lambda}.$$

Теорема 5 Если $n, T \rightarrow \infty$ и r_n меняются так, что

$$n \left(1 - \frac{1}{2^T} \sum_{k=0}^{r_n} C_T^k \right)^n \rightarrow \lambda \in (0, \infty), \quad r_n = o(T),$$

то

$$P(\psi_n \leq r_n) \rightarrow e^{-\lambda}.$$

Замечание. При условиях теоремы 5 необходимо $\ln n \sim T \ln 2$. Если, например, $n = 2^{T-T^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, то первое условие теоремы принимает вид $C_T^{r_n}/2^{T^\alpha} - \ln(2^{T-T^\alpha}/\lambda) \rightarrow 0$; и так как при $1 > \beta > \alpha$ верно $C_T^{[T^\beta]}/2^{T^\alpha} - \ln(2^{T-T^\alpha}/\lambda) \rightarrow \infty$, поэтому существует такая последовательность $r_n = o(T)$, что выполняются условия теоремы 5.

Литература

1. Севастьянов Б. А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин // Теория вероят. и ее примен. — 1972. — Т. 17, вып. 4. — С. 733-738.
2. Silverman B., Brown T. Short distances, flat triangles and Poisson limits // J. Appl. Probab. — 1978. — Vol. 15. — P. 815–825.
3. Henze N. The limit distribution for maxima of «weighted» r -th nearest-neighbor distances // J. Appl. Prob. — 1982. — Vol. 19. — P. 344–354.
4. Penrose M. D., Yukich J. E. Laws of large numbers and nearest neighbor distances / Advances in Directional and Linear Statistics. — Berlin: Physica-Verlag HD, 2011. — P. 189–199
5. Baryshnikov Yu., Penrose M. D., Yukich J. E. Gaussian limits for generalized spacings // Ann. Appl. Probab. — 2009. — Vol. 19, no. 1. — P. 158-185.
6. Bickel P. J., Breiman L. Sums of functions of nearest neighbor distances, moment bounds, limit theorems and a goodness of fit test // Ann. Probab. — 1983. — Vol. 11, no. 1 — P. 185–214.
7. Schilling M. F. Goodness of fit testing in R^m based on the weighted empirical distribution of certain nearest neighbor statistics // Ann. Statist. — 1983. — Vol. 11, no. 1. — P. 1–12.
8. Schilling M. F. An infinite-dimensional approximation for nearest neighbor goodness of fit tests // Ann. Statist. — 1983. — Vol.1, no. 1. — P. 13–24.
9. L'écuyer P., Cordeau J.-F., Simard R. Close-point spatial tests and their application to random number generators // Oper. Res. — 2000. — Vol. 48, no. 2. — P. 308–317.

Limit distributions of extreme distances to the nearest neighbor

A. M. Zubkov^{*†}, O. P. Orlov[†]

** Steklov Mathematical Institute of RAS,
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia*

*† Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119992, Russia*

The paper presents theorems on the limit distributions of the minimal and maximal distances to the nearest neighbor in a set of random independent points, that in a certain sense have a uniform distribution on an arbitrary metric space. As examples of such spaces, we consider a multidimensional torus and a binary cube. Under certain conditions, the theorems can be reduced to the study of the sum of indicators, which admits Poisson approximation.

Keywords: limit theorem, extreme values, nearest neighbor, method of moments.

UDC 519.21, 004.94

Simulation of Branching Random Walks on Multidimensional Lattices

E. M. Ermishkina*

* *Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. We present an approach to simulation of continuous-time branching random walks on multidimensional lattices with a finite number of particle generation centers of different types located at the lattice points. Such processes introduced by Yarovaya (2012) can be used for modelling of a particle population dynamics. For example, exponential growth of the particle population in the frame of branching random walks models may be explained by the excess of the threshold value. Simulation of branching random walks is applied for numerical estimation of a threshold value of the parameter on limited time intervals. Simulation of the process is based on a well-known algorithm of queue data structures and estimates obtained by the Monte-Carlo method.

Keywords: branching random walks, simulation, Monte-Carlo method, queue.

1. Introduction

We consider a continuous-time branching random walks (BRWs) on a multidimensional lattice \mathbf{Z}^d , $d \geq 1$, with a finite number of sources located at the lattice points x_i . We assume that at the initial moment there is a single particle which walks on the lattice until it reaches one of the sources where its behavior changes. In source particle can die, leave $n > 1$ newborn particles or walk.

The random walk is specified by an infinite matrix $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbf{Z}^d}$ of transition intensities: $a(x, y) \geq 0$ for $x \neq y$, $a(x, x) < 0$; $a(x, y) = a(y, x) = a(0, y - x) = a(y - x)$ and $\sum_z a(z) = 0$. Each of a few sources located at the some point x_i is specified by the infinitesimal generation function $f_{x_i}(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_{x_i, n} u^n$, where $b_{x_i, n} \geq 0$ for $n \neq 1$, $b_{x_i, 1} < 0$ and $\sum_n b_{x_i, n} = 0$. We assume that $\beta_{x_i, r} := f_{x_i}^{(r)}(1) < \infty$, $r \in \mathbf{N}$, and denote $\beta_{x_i} := \beta_{x_i, 1}$.

The evolution of a particle in such a BRW is performed in accordance with the following rules: being outside of the set $\{x_i\}$, say at a point x , the particle performs a random walk: the particle stays at the point x a random time distributed in accordance to the exponential law with parameter $-a(0)$ and then jumps to a point $y \neq x$ with the probability $-a(y - x)/a(0)$; being at a point $x \in \{x_i\}$, say at a point $x = x_i$, the particle performs a symmetric random walk or branching. The branching in this case is performed in accordance with the Bienayme-Galton-Watson

process specified by the infinitesimal generation function $f_{x_i}(u)$. So, in this case the behavior of the particle is assumed as follows: first it stays at the point x a random time distributed in accordance to the exponential law with parameter $-(a(0) + b_{x_i,1})$ and then either jumps to a point $y \neq x$ with the probability $-a(y-x)/(a(0) + b_{x_i,1})$ or generates $n \neq 1$ offsprings with the probability $-b_{x_i,n}/(a(0) + b_{x_i,1})$. Notice that in the case $n = 0$ the particle dies.

All particles will behave the same way independently of each other and of their history, for further details, see i.e. [1].

The main object of study is the evolution operator for the local mean number $m_1(t, x, y)$ at an arbitrary point $y \in \mathbf{Z}^d$ and total mean number on the entire lattice $m_1(t, x) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} m_1(t, x, y)$ and their moments, where x is coordinate of initial particle. Supercritical behavior type, unlike other types (critical or subcritical) is characterized by the exponential growth of the mean number of particles $m_1(t, x, y)$ and $m_1(t)$ and this distinction often play a central role in practice. It was shown that mean number moments satisfy linear differential operator equations in Banach spaces and general analysis of this operator was done in [2]. For instance, as a result, in case of BRWs with source with equal intensity β , this value β determine asymptotic behavior of mean number of particles $m_1(t, x, y)$ and $m_1(t)$: threshold value β_{cr} separates supercritical, critical or subcritical behavior types. For the supercritical BRWs exponential growth of the number of amounts $m_1(t, x, y)$ and $m_1(t)$ is evoked with the presence of a positive eigenvalue in the spectrum of the corresponding evolution operator.

Mean number moment equations are difficult differential equations and can't be solved explicitly. In practice mean number moments and other characteristic of the BRWs may be obtained by utilizing numerical methods, like Monte Carlo (see [5]). Monte Carlo techniques uses a large number of process simulations, to estimate different characteristic of the model including. Simulation algorithms were used in a number of works (see, e.g., [7–10]), in that random walks or branching processes were studied about separately. However, we didn't find papers uses Monte Carlo method for studying BRWs model.

2. Main section

Description of BRWs model given in the previous section is well suited for algorithm design. We introduced an algorithm for modelling BRWs based on queue data structure (for details, see i. e. [6]) and show techniques to estimate such BRWs characteristics, like moments of the local mean number $m_n(t, x, y)$ and moments of the total mean number $m_n(t)$ and threshold value β_{cr} .

We propose method of simulation BRWs with several sources on finite time intervals. The property of BRWs that we based on in constructing

simulation algorithm is the stochastically independence of particles behavior. This allows to simulate evolution of each particle of BRWs on a finite time interval separately and independently from others.

Algorithm simulates evolution of the one selected particle in a given time interval $[0, T]$. During this process new particles can appear, when the selected particle is branching in one of the sources. Information about such events (coordinate and birth time of newborn particle (x, t)) is added in the queue. When the evolution of the selected particle in the given time interval $[0, T]$ is simulated, algorithm extract next particle from the queue. The algorithm terminates when queue is empty, i.e. evolution of initial particle and evolution of all their descendants was simulated.

Initialization. First, we choose the finite sets of points $\{x_i\}_{i=1}^k$ and specify all the necessary quantities determining the matrix of transition intensities A , and the infinitesimal generating functions $f_{x_i}(u)$ with $i = 1, 2, \dots, k$ and $\hat{f}_{x_i}(u)$ with $i = 1, 2, \dots, n$. We also specify the length of the interval $[0, T]$ on which simulation will be conducted. At last, we fix an initial point x_0 and added information about initial particle $(x_0, 0)$ to queue.

Loop. We extract from the queue first pair (x, t) corresponding to newborn particle in x at the moment t and simulate evolution of this particle during time interval $[t, T]$, repeating the simulation of particle evolution while $t < T$ according rules described above.

We calculate sojourn time Δt accordance with the placement of the point x , pass to the moment $t = t + \Delta t$ and simulate evolution at this moment using random number generators. If particle performed branching and $n > 1$ particles appeared at the point x , we continue to simulate evolution of one of this n particles from time t and add remaining $n - 1$ pairs (x, t) to queue. If $n = 0$ particle dies and this step is finished. In case of walking particle jumps to a point $y \neq x$ and we continue simulation with $x = y$.

Termination. Loop repeats while the queue is not empty.

Collecting of data. After the termination of the algorithm, following to the Monte-Carlo method, we repeat simulation with the same parameters (but with different runs of random number generators) several times to collect the needed number of data samples (simulations) which would be sufficient for statistical data treatment. After collecting all the data we start the evaluation of the characteristics of the BRW under consideration.

As is clear from the description above, the algorithm is naturally randomized. When we initialize random number generator with different values we obtain different realizations of BRWs. Examples of using the algorithm to obtain moments $m_n(t, x, y)$, $m_n(t)$ and threshold value β_{cr} are described below.

We consider that the number of particles at point and the number of particles on the lattice does not vary significantly during small time intervals. We calculated the number of particles at the time instants $t_i = \frac{i}{N}T$, $i = 0, \dots, N$ as sum of the number of particles at t_{I-1} and

increment of the number of particles on interval $[t_i, t_{i+1}]$. At moment $t_0 = 0$ local number of particles at the point and total number on the lattice is determined according to the initial conditions. The increment on time interval updates directly when the evolution of particle is simulated (increments when new particle borns or decrements when particle dies). Sampling mean numbers and their moments at the time instants $t_i = \frac{i}{N}T$, $i = 0, \dots, N$ are computed in accordance to the definition using samples of total and local particle numbers, obtained at different values initialising random number generators.

Hereafter, we'll consider threshold value β_{cr} for BRWs with one source or with a few sources of equal intensity. As is known exponential asymptotic of particle number both at the arbitrary point and on the entire lattice is conditioned by source intensity β exceeding threshold value β_{cr} . In case $\beta < \beta_{cr}$ exponential growth is not observed.

Learning to classify the process as exponential or not exponential (supercritical and subcritical respectively), we can estimate threshold using binary search (for details see i. e. [6]). We start a search on the interval $[L, R]$, $L < \beta_{cr} < R$. If BRWs with source intensity $\beta = M = \frac{L+R}{2}$ is supercritical (total mean number is classified as exponentially growing function) then we will continue search on interval $[L', R'] = [L, M]$, else if BRWs is subcritical then continue search on interval $[L', R'] = [M, R]$. Obtained interval $[L', R']$ contains β_{cr} , so we repeat the same procedure on $[L', R']$. Interval length $|R' - L'| = \frac{1}{2}|R - L|$ decreases by half every time. It may be difficult to classify process as exponential or not exponential when β is close to β_{cr} , so in that case search must be terminated or continue on a longer time interval. If $|R - L| < \varepsilon$, where ε is required accuracy search also terminates.

3. Conclusions

The exhaustive classification of the limit behavior (up to a scalar factor) of the total mean number of particles and local mean number of particles at the source for BRWs with one source is given in [1]. Obtained total and local mean numbers of BRWs with one source demonstrates that exponential asymptotic of subcritical processes as well as descending asymptotic can be observed on finite intervals.

Note that described algorithm is not suitable for modelling BRWs with a truly infinite matrix of transition intensities A or infinitesimal generating functions $f_{x_i}(u)$.

Acknowledgments

The work is supported by RFBR grant No 17-01-00468.

References

1. *Yarovaya, E.B.* Spectral properties of evolutionary operators in branching random walk models // *Mathematical Notes*. — 2012. — Vol. 92, no. 1. — P. 115–131.
2. *Yarovaya, E.B.* Branching random walks with several sources // *Mathematical Population Studies*. — 2013. — Vol. 20, no. 1. — P. 14–26.
3. *Yarovaya, E.B.* Branching random walks in a heterogeneous environment. — Center of Applied Investigations of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University, Moscow. 2007. (In Russian)
4. *Yarovaya, E.B.* The structure of the positive Discrete spectrum of the evolution operator arising in branching random walks // *Doklady Mathematics*. — 2015. — Vol. 92, no. 1. — P. 507–510. — DOI 10.1134/S1064562415040316.
5. *Fishman, George S.* Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications. — Springer.— 1996. — ISBN 0-387-94527-X.
6. *Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., Stein, C.* Introduction to algorithms, third edn. — MIT Press, Cambridge, MA, 2009.
7. *Andries E., Umarov S., Steinberg St.* Monte Carlo Random Walk Simulations Based on Distributed Order Differential Equations with Applications to Cell Biology // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. — 2006. — Vol. 9, no. 4. — P. 351–369.
8. *Kleinhans D., Friedrich R.* Continuous Time Random Walks (CTRWs): Simulation of continuous trajectories // *Phys. Rev. E*. — 2007. — Vol. 76, 061102 — DOI 10.1103/PhysRevE.76.061102.
9. *Fabricio Murai, Bruno Ribeiro, Don Towsley* Characterizing Branching Processes from Sampled Data / *Proceedings of the 22Nd International Conference on World Wide Web, WWW '13 Companion*, Rio de Janeiro, Brazil, 2013. — P.805–812. — DOI10.1145/2487788.2488053
10. *Daskalova N.* EM Algorithm for Estimation of the Offspring Probabilities in Some Branching Models // *Mladenov V.M., Ivanov P.C. (eds) Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. NDES 2014 / Communications in Computer and Information Science*, Vol. 438. — Springer, Cham., 2014. — DOI 10.1007/978-3-319-08672-9_23

UDC 519.21, 517.984

Survival Analysis and Recurrence Criteria for Branching Random Walks

E. Yarovaya*

** Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119234, Russia*

Abstract. The models of symmetric continuous-time branching random walks on a multidimensional lattice with a few sources of particle birth and death are studied. Emphasis is made on the survival analysis and study of branching random walk properties depending on the configuration of the sources and their intensities. In particular, we will try to describe how the properties of a branching random walk depend on such characteristics of an underlying branching walk as finiteness or infiniteness of the variance of jumps. The presented results are based on Green's functions representations of transition probabilities of a branching random walk.

Keywords: branching random walks, recurrence criteria, Green's function.

1. Introduction

It is a common practice to describe branching random walks (BRWs) in terms of birth, death and walk of particles, which makes it easier to use them in various areas of nature sciences, see, e.g., [1, 2] and references therein. Application in the reliability theory of BRWs on multidimensional lattices with one centre of particle generation and finite variance of walk jumps was discussed in [3]. Emphasis in the present work is made on the survival analysis and study of BRW properties depending of the configuration of the sources and their intensities. The answer to these and other questions heavily depends on numerous factors which affect the properties of a BRW. Therefore, we will try to describe how the properties of a BRW depend on such characteristics of an underlying branching walk as finiteness or infiniteness of the variance of jumps. The presented results are based on Green's functions of transition probabilities of an underlying branching walk.

The description of the model of a symmetric BRW with a finite number of branching sources is given in Sec. 2, where we formulate also the recurrence criteria for BRWs in terms of Green's functions and recall some recent results on the symmetric BRWs. In Sec. 3 we recall some properties of the local extension probability of the process at the origin and of survival probability of the particle population without any assumptions on the variance of jumps of an underlying branching walk. In Sec. 4 we consider an operator model of BRWs with the branching sources of equal intensities and, in particular, the case in which the local extension probabilities at every lattice point tend to 1, as $t \rightarrow \infty$. The main results are formulated in Sec. 4.

2. Model and Previous Results

Evolution of the particle system on \mathbf{Z}^d is described by the number of particles at time t at each point $y \in \mathbf{Z}^d$ on the assumption that at the time $t = 0$ the system consists of one particle located at the point x . The particle walks on \mathbf{Z}^d until it reaches one of the points x_1, x_2, \dots, x_N , $N < \infty$, called *branching sources*, where it can die or produce a random number of offsprings. It is assumed that evolution of the newborn particles obeys the same law independently of the rest of the particles and the prehistory. Now we proceed to a full description of the model.

The random walk of particles is defined by the infinitesimal transition matrix $A = \|a(x, y)\|_{x, y \in \mathbf{Z}^d}$ and assumed to be symmetric, $a(x, y) = a(y, x)$, homogeneous, $a(x, y) = a(0, y - x) = a(y - x)$, irreducible, that is, for every $z \in \mathbf{Z}^d$ there exists a set of vectors $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbf{Z}^d$ such that $z = \sum_{i=1}^k z_i$ and $a(z_i) \neq 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$, regular, that is $\sum_{x \in \mathbf{Z}^d} a(x) = 0$, where $a(x) \geq 0$ for $x \neq 0$ and $a(0) < 0$.

The reproduction law at each source x_i is defined by the continuous-time Bienaymé-Galton-Watson branching processes with the infinitesimal generation function $f(u, x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_i)u^n$, $0 \leq u \leq 1$, where $b_n(x_i) \geq 0$ for $n \neq 1$, $b_1(x_i) < 0$ and $\sum_n b_n(x_i) = 0$. We assume $f^{(r)}(1, x_i) < \infty$ for every $r \in \mathbf{N}$. For the investigation the values $\beta_i = f'(1, x_i)$, called the *intensities* of the branching source x_i , will play an important role.

By $p(t, x, y)$ we denote the transition probability of the underlying random walk. This function is implicitly determined by the transition intensities $a(x, y)$ (see, for example, [4]). Then, Green's function of the operator A can be represented as $G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt$, where $\lambda \geq 0$.

The analysis of BRWs depends on whether the value of $G_0 = G_0(0, 0)$ is finite or infinite. As is known, a random walk is *transient* if $G_0(0, 0) < \infty$ and *recurrent* if $G_0(0, 0) = \infty$. We generalize this definition by calling BRW *transient* if the underlying random walk is *transient* and *recurrent* if the underlying random walk is *recurrent*.

If the variance of jumps of the underlying random walk is finite, i.e.

$$\sum_{z \in \mathbf{Z}^d} |z|^2 a(z) < \infty, \tag{1}$$

where $|z|$ is the Euclidian norm of the vector z , then we get the following *recurrence criteria* for BRWs with *finite variance* of jumps: $G_0 = \infty$ for $d = 1, 2$, and $G_0 < \infty$ for $d \geq 3$, see, e.g. [4]).

$$a(z) \sim H(z/|z|) |z|^{-(d+\alpha)}, \quad \alpha \in (0, 2), \tag{2}$$

for all $z \in \mathbf{Z}^d$ with sufficiently large norm, where $H(\cdot)$ is a continuous positive function symmetric on $\mathbf{S}^{d-1} = \{z \in \mathbf{R}^d : |z| = 1\}$, then unlike

(2) the series $a(z)$ diverges, which leads to the infinity of the variance of jumps. In this case we get the following *recurrence criteria* for BRWs with *infinite variance* of jumps: $G_0 = \infty$ for $d = 1$ and $\alpha \in [1, 2)$ and G_0 is finite if $d = 1$ and $\alpha \in (0, 1)$ or $d \geq 2$ and $\alpha \in (0, 2)$ resulted from the behavior of $p(t, x, y) \sim h_{d,\alpha} t^{-d/\alpha}$, where $h_{d,\alpha}$ is a positive constant depending on dimension of \mathbf{Z}^d and $t \rightarrow \infty$, see details in [5, 6].

The moments of numbers, both at an arbitrary lattice point $\mu_t(y)$ and on the entire lattice $\mu_t = \sum_{y' \in \mathbf{Z}^d} \mu_t(y')$, are denoted by $m_n(t, x, y) := E_x \mu_t^n(y)$ and $m_n(t, x) := E_x \mu_t^n$, ($n \in \mathbf{N}$), respectively, where E_x is the conditional expectation, provided that $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$. The asymptotic behavior of moments for $N = 1$ under the condition (2) was studied, e.g., in [4].

Recall known results, see, e.g. [4], for a BRW with one branching source that will be needed in Sec. 4. If $\beta > G_0^{-1}$, then the equation

$$G_\lambda(0, 0) = 1 \tag{3}$$

has a single positive solution λ_0 , whence it follows that the random variables $\mu_t(y)$ and μ_t have a limit distribution for $t \rightarrow \infty$ under the normalization $e^{-\lambda_0 t}$.

For $\beta \leq G_0^{-1}$, the growth of the moments μ_t and $\mu_t(y)$ of the particle numbers appears to be irregular with respect to the moment number n which means that the behavior of the particle numbers μ_t and $\mu_t(y)$, as $t \rightarrow \infty$, differs appreciably from the behavior of their moments, and the study of BRW survival probabilities becomes relevant.

3. Survival probabilities

Recall some results on the symmetric BRW which may find use in the studies of reliability. Let us consider for simplicity a BRW with one branching source located at the origin. The notion of the system reliability is related with the notions of the *local extension probability of the process* $Q(t, x, y) = P_x\{\mu_t(y) > 0\}$ and the *survival probability of the particle population* $Q(t, x) = P_x\{\mu_t > 0\}$. The function $Q(t, x)$ may be called the system reliability function. The asymptotic behavior of $Q(t, x, 0)$ describes the number of working elements. That is why consideration was given to the asymptotic behavior of the survival probability $Q(t, x)$ of the particle population on the lattice and the probability $Q(t, x, 0)$ of particle availability at the source at time t . The integral equations for $Q(t, x, y)$ and $Q(t, x)$ were established in [7]. The main result there is that under the condition (2) the equations for $Q(t, x, y)$ and $Q(t, x)$ have the same representation as under the condition (2). But in virtue of the different recurrence criteria for BRWs under the conditions (2) and (2) we obtain another limit theorems in contrast to the theorems established in [3].

4. Supercritical BRWs with Recessing Sources

The moments m_1 satisfy to the evolution equations $\frac{\partial m_1}{\partial t} = \mathcal{H}_\beta m_1$ with the initial conditions $m_1(0, x, y) = \delta_y(x)$, $m_1(0, x) \equiv 1$, respectively, see [8]. In the BRW models with finitely many sources of equal intensity, as was shown in [8], there arise multipoint perturbations of the symmetric random walk generator \mathcal{A} which have the form

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{A} + \beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i}, \tag{4}$$

where $x_i \in \mathbf{Z}^d$. Here $\mathcal{A} : l^p(\mathbf{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbf{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, is a symmetric operator acting by formula $(\mathcal{A}u)(z) := \sum_{z' \in \mathbf{Z}^d} a(z - z')u(z')$, and $\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$, where $\delta_x = \delta_x(\cdot)$, denotes the column vector on the lattice which is equal to 1 at the point x and to 0 at other points. The summand $\beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i}$ in (4) can result in the appearance of positive eigenvalues of the operator \mathcal{H}_β the number of which (counting their multiplicity) does not exceed *the number of terms* in the sum.

Let β_c be the minimal value of the source intensity such that for $\beta > \beta_c$ the spectrum of \mathcal{H}_β has positive eigenvalues. As was proved in [9], if $G_0 = \infty$ then $\beta_c = 0$ for $N \geq 1$ and if $G_0 < \infty$ then $\beta_c = G_0^{-1}$ for $N = 1$, and $0 < \beta_c < G_0^{-1}$ for $N \geq 2$. In [9] it was also shown that in the case $N \geq 2$ the operator \mathcal{H}_β with $\beta > \beta_c$ can have at most N positive eigenvalues $\lambda_0(\beta) > \lambda_1(\beta) \geq \dots \geq \lambda_{N-1}(\beta) > 0$, counting their multiplicity, where the eigenvalue $\lambda_0(\beta)$ has multiplicity one. Moreover, there exists a value $\beta_{c_1} > \beta_c$ such that, for $\beta \in (\beta_c, \beta_{c_1})$ the operator has no other eigenvalues except $\lambda_0(\beta)$. In general, the problem of finding the eigenvalues of an operator is complicated.

In [10] it was assumed that branching sources of equal intensities β are situated in vertices x_1, x_2, \dots, x_N , $N = 2, \dots, d$, of the regular $(N - 1)$ -simplex on \mathbf{Z}^d and proved the theorem about the effect of “limiting coalescence” of eigenvalues for the simplex configurations of branching sources.

In the general case, let us consider branching sources of equal intensities β situated at arbitrary points x_1, x_2, \dots, x_N , where $N = 2, \dots, d$. Denote, for each configuration $S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, by $0 \leq \beta_c(N, S) < \beta_{c_1}(N, S) \leq \dots \leq \beta_{c_{N-1}}(N, S)$ the critical values of β such that, when β increasing traverses each $\beta_{c_i}(N, S)$, a new positive eigenvalue of \mathcal{H}_β bifurcates from zero. Previously considered simplex configurations of the points x_1, x_2, \dots, x_N in [10] provides an example, in which $\beta_{c_1} = \beta_{c_2} = \dots = \beta_{c_N}$. Contrary to the simplex configuration case, the values of $\beta_{c_1}(N, S), \dots, \beta_{c_{N-1}}(N, S)$ may indeed differ from each other.

Theorem 1 *Given $N \geq 2$, a configuration $S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ and $\beta > G_0^{-1}$, then for every positive eigenvalue $\lambda_i(S, \beta, N)$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$,*

of the operator \mathcal{H}_β we get $\lim_{\rho(S) \rightarrow \infty} \lambda_i(S, \beta, N) = \lambda_*(\beta)$, where λ_* is the solution of (2).

Moreover, $0 \leq \beta_c(N, S) \leq G_0^{-1} \leq \beta_{c_1}(N, S) \leq \dots \leq \beta_{c_{N-1}}(N, S)$, and for every N we have $\lim_{\rho(S) \rightarrow \infty} \beta_c(N, S) = \lim_{\rho(S) \rightarrow \infty} \beta_{c_i}(N, S) = G_0^{-1}$, where $\rho(S) := \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$.

Acknowledgments

The research was supported by the RFBR, project no. 17-01-00468.

References

1. Gärtner J., Molchanov S. A. Parabolic problems for the Anderson model. I. Intermittency and related topics // *Comm. Math. Phys.* – 1990. – Vol. 132, no. 3. – P. 613–655.
2. Bessonov M., Molchanov S., Whitmeyer J. A multi-class extension of the mean field Bolker-Pacala population model // *ArXiv: 1610.09569*. – 2016.
3. Yarovaya E. B. Models of branching walks and their use in the reliability theory // *Automation and Remote Control.* – 2010. – Vol. 71, no. 7. – P. 1308–1324.
4. Yarovaya E. B. Branching random walks in a heterogeneous environment. — Moscow : Center of Applied Investigations of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University, 2007. (In Russian)
5. Rytova A. I., Yarovaya E. B. Multidimensional Watson lemma and its applications // *Mathematical Notes.* – 2016. – Vol. 99, no. 3. — P. 406–412.
6. Yarovaya E. Branching random walks with heavy tails // *Comm. Statist. Theory Methods.* — 2013. – Vol. 42, no. 16. – P. 3001–3010.
7. Yarovaya E. B. Critical branching random walks on low-dimensional lattices // *Diskret. Mat.* – 2009. – Vol. 21, no. 1. – P. 117–138.
8. Yarovaya E. B. Spectral properties of evolutionary operators in branching random walk models // *Math. Notes.* – 2012. – Vol. 92, no. 1-2. – P. 115–131.
9. Yarovaya E. B. Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails // *Methodology and Computing in Applied Probability.* – 2016. – P. 1–17.
10. Yarovaya E. B. Spectral asymptotics of a supercritical branching random walk // *Teor. Veroyatn. Primen.* – 2017. – Vol. 62, no. 3. – P. 518–541. (In Russian)

УДК 519.218.4, 519.873

Простая оценка скорости сходимости распределения системы $M|G|\infty$

Г. А. Зверкина*[†]* *Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
ул. Образцова, д.9 стр.9, Москва, Россия, 127994*[†] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
ул. Профсоюзная, д. 65, Москва, 117997, Россия*

Аннотация. Представлен простой способ получения степенной оценки скорости сходимости распределения стандартной и обобщённой системы Эрланга-Севастьянова $M|G|\infty$. Обсуждается вопрос об улучшении таких оценок.

Ключевые слова: система Эрланга-Севастьянова, скорость сходимости, строгие оценки, стационарное распределение, метрика полной вариации.

1. Система $M|G|\infty$

Рассматривается СМО $M|G|\infty$, где (а) входящий поток заявок – пуассоновский с параметром λ ; (б) время обслуживания заявок – неотрицательная сл.в. χ_i с ф.р. $G(s)$, и $0 < M_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \chi^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha \geq 2$; (в) при поступлении в СМО заявки немедленно начинают обслуживаться; (г) все времена обслуживания и входящий поток независимы. Поведение $M|G|\infty$ описываем марковским процессом X_t с пространством состояний (п.с.) $\mathcal{X} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k$, где $\mathcal{S}_0 = \{0\}$, а при $k > 0$, $\mathcal{S}_k = \mathbb{R}_+^k$. Если в момент t СМО свободна (число заявок в СМО = 0), то $X_t \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Если в СМО есть $k > 0$ заявок, то $X_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)}\}$, где $x_t^{(\ell)}$ – это время обслуживания ℓ -й заявки до момента t . Далее предполагаем, что $X_0 = 0$.

X_t – регенерирующий процесс. Периоды регенерации состоят из двух *независимых* частей: свободные периоды ξ_i ($X_t \in \mathcal{S}_0$) с ф.р. $F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$, и периоды занятости (п.з.) ζ_i ($X_t \notin \mathcal{S}_0$) с ф.р. $B(s)$. Т.е. есть последовательность $\{t_i\}_{i \geq 0}$ ($t_0 = 0, t_i > t_{i-1}$) такая, что $X_{t_{2k}-0} \neq 0, X_{t_{2k}+0} = 0, X_{t_{2k+1}} = 0, X_{t_{2k+1}} \neq 0$ ($k \geq 0$). При $\mathbb{E}(\xi_i + \zeta_i) < \infty$ X_t эргодичен, его распределение \mathcal{P}_t ($\mathcal{P}_t(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{X_t \in A\}$) слабо сходится к распределению \mathcal{P} при $t \rightarrow \infty$. Мы хотим найти *строгие* оценки скорости сходимости \mathcal{P}_t к \mathcal{P} в метрике полной вариации. Известно, что при $X_0 = 0$

$$P_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{X_t \in \mathcal{S}_k\} = \frac{\mathfrak{G}(t)^k e^{-\mathfrak{G}(t)}}{k!}, \quad (1)$$

Работа поддержана РФФИ, проект No 17-01-00633 А.

Автор выражает глубокую признательность А.Ю.Веретенникову, некоторые идеи которого, высказанные в личных беседах, были использованы в этой работе.

где $\mathfrak{G}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \int_0^t (1 - G(s)) ds$; при $M_1 < \infty$ $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \frac{\rho^k e^{-\rho}}{k!}$, где

$\rho = \mathfrak{G}(+\infty)$. Также, если $M_1 < \infty$, то $B(s) = 1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} c^{n*}(s)$, где

$c^{n*}(s) - n$ -я свёртка функций $c(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(1 - G(s))e^{-\mathfrak{G}(s)}$ – см. [3], [5]. \triangleright

Предложение 1. Если $M_\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha \geq 1$, то:

$$1. \mathbb{E} \zeta = \frac{e^\rho - 1}{\lambda}; \quad 2. \mathbb{E} \zeta^\alpha \leq \mathbb{E} \chi^\alpha \times \frac{e^{2\rho}}{\alpha} \text{ при } \alpha > 1 \text{ и } \rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda M_1. \quad \triangleright (2)$$

Предложение 2. Если $\mathbb{E} \chi^\alpha = M_\alpha < \infty$ для $\alpha > 2$, то $\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|_{TV} \leq t^{-\kappa} (C_1(\varrho, \kappa) \frac{\varrho M_{\kappa+1} e^{2\rho} \lambda}{(\kappa+1)^2 (e^\rho - 1)} + C_2(\varrho, \kappa) (\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\lambda^\kappa} + M_\kappa))$ для всех $\kappa \in [1, \alpha - 1]$;

здесь $C_1(s, n) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i (2i+1)^n$, $C_2(s, n) = \sum_{i=0}^{\infty} i s^i (2i+1)^n$. \triangleright

Доказательство. Рассмотрим два независимых процесса: X_t с $X_0 = 0$, и $X_t^{(1)}$ с той же переходной функцией, но $X_0^{(1)} \in \mathcal{X}$. Пусть $\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : X_t^{(1)} = 0\}$, $\theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \theta_0 : X_t^{(1)} = 0\}$, $\theta_{2k-1} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \theta_{2k-2} : X_t^{(1)} \neq 0\}$, $\theta_{2k} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \theta_{2k-2} : X_t^{(1)} = 0\}$ ($k \in \mathbb{N}$). $\mathbb{P}\{X_{\theta_k} = 0\} = e^{-\mathfrak{G}(\theta_k)} \geq e^{-\rho}$ (см. (1)). Процессы X_t и $X_t^{(1)}$ содержат вложенные альтернирующие процессы восстановления с моментами восстановления t_i и θ_i соответственно. Опишем их поведение процессами: $\{R_t \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ при } t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \text{ и } R_t \stackrel{\text{def}}{=} (1, t - t_{2k}) \text{ при } t \in [t_{2k-1}, t_{2k})\}$; $\{\widehat{R}_t \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ при } t \in [\theta_{2k}, \theta_{2k+1}), \text{ и } \widehat{R}_t \stackrel{\text{def}}{=} (1, t - \theta_{2k}) \text{ при } t \in [\theta_{2k-1}, \theta_{2k})\}$. Процессы R_t и \widehat{R}_t – марковские, с п.с. $\mathcal{X}' \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \mathbb{R}_+$. Распределение R_t и \widehat{R}_t в момент t определяет распределения X_t и $X_t^{(1)}$. По Предложению 1, $\mathbb{E} \zeta < \infty$, и распределение R_t сходится к распределению \mathcal{R} : $\mathcal{R}(0) = e^{-\rho}$, $\mathcal{R}(S) = (1 - e^{-\rho}) \int_S \frac{1 - B(u)}{\mathbb{E} \zeta} du$ для $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\tau(X_0^{(1)}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : X_t = X_t^{(1)} = 0\}$ и $\tau'(\widehat{R}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : R_t = \widehat{R}_t = 0\}$. Тогда $\tau(X_0^{(1)}) = \tau'(\widehat{R}_0)$. $\tau(X_0^{(1)}) = \tau'(\widehat{R}_0) = 0$ при $X_0^{(1)} = 0$. $\mathbb{P}\{\tau(X_0^{(1)}) > \theta_{2k}\} \leq \prod_{i=0}^k (1 - e^{-\mathfrak{G}(\theta_{2i})}) \leq (1 - e^{-\rho})^{k+1} = \varrho^{k+1}$

при $X_0^{(1)} \neq 0$. Поэтому для всех $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ можно применять *основное неравенство склеивания* (см. [2]) и неравенство Маркова:

$$|\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X_t^{(1)} \in S\}| \leq \mathbb{P}\{\tau(X_0^{(1)}) > t\} = \frac{\mathbb{E}(\tau(X_0^{(1)}))^\alpha}{t^\alpha}. \quad (3)$$

Из неравенства $(\sum_{i=1}^n a_i)^\kappa \leq \max(1, n^{\kappa-1}) \sum_{i=1}^n a_i^\kappa$ для $a_i \geq 0$, $\kappa \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{при } \kappa \in [1, \alpha]: \mathbb{E}(\tau(X_0^{(1)}))^\kappa &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i \mathbb{E}(\theta_i)^\kappa \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i (2i+1)^{\kappa-1} (\mathbb{E}(\theta_0)^\kappa + i(\mathbb{E}(\xi)^\kappa + \mathbb{E}(\chi)^\kappa)) = \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \mathfrak{C}(\kappa, X_0^{(1)}) \stackrel{\text{def}}{=} C_1(\varrho, \kappa) \mathbb{E}(\theta_0)^\kappa + C_2(\varrho, \kappa) (\mathbb{E}(\xi)^\kappa) + \mathbb{E}(\chi)^\kappa.$$

Из (1) и (1) следует: $|\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X_t^{(1)} \in S\}| \leq \frac{\mathfrak{C}(\kappa, X_0^{(1)})}{t^\kappa}$ для всех $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. И $|\mathcal{P}_t(S) - \mathcal{P}(S)| \leq \int_{\mathcal{X}} \frac{\mathfrak{C}(\kappa, X_0^{(1)})}{t^\kappa} \mathcal{P}(dX_0^{(1)}) = \int_{\mathcal{X}'} \frac{\mathfrak{C}(\kappa, \widehat{R}_0)}{t^\kappa} \mathcal{R}(d\widehat{R}_0)$; $\int_{\mathcal{X}'} \mathfrak{C}(\kappa, \widehat{R}_0) \mathcal{R}(d\widehat{R}_0) = C_2(\varrho, \kappa) (\mathbb{E}(\xi)^\kappa) + \mathbb{E}(\chi)^\kappa + C_1 e^{-\rho} \times 0 + C_1(\varrho, \kappa) (1 - e^{-\rho}) \int_0^\infty u^\kappa \frac{1 - B(u)}{\mathbb{E}\zeta} du = C_2(\varrho, \kappa) (\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\lambda^\kappa} + \mathbb{E}(\chi)^\kappa) + C_1(\varrho, \kappa) \frac{(1 - e^{-\rho}) \mathbb{E}\zeta^{\kappa+1}}{(\kappa+1)\mathbb{E}\zeta}$, и, применяя оценки (1), получаем утверждение Предложения 2. \square

2. Обобщённая система Эрланга-Севастьянова

В [4] и др. исследовалась обобщённая СМО Эрланга-Севастьянова, где интенсивности входящего потока и обслуживания измеримы и зависят от состояния СМО, которое определяется в момент t как вектор $X_t = (x_t^{(0)}; x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n_t)})$, где $x_t^{(0)}$ – время от последнего поступления заявки до момента t , n_t – число находящихся на обслуживании в момент t заявок, $x_t^{(i)}$ – время, прошедшее с момента поступления i -й находящейся на обслуживании заявки. Интенсивность входящего потока $\lambda = \lambda(x_t)$, интенсивность обслуживания находящейся в СМО i -й заявки $h_i = h_i(X_t)$. Т.е. за время $(t, t + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0, \varepsilon \ll 1$) СМО перейдёт из состояния x_t в состояние $X_{t+\varepsilon} = (x_t^{(0)} + \varepsilon, x_t^{(1)} + \varepsilon, x_t^{(2)} + \varepsilon, \dots, x_t^{(n_t)} + \varepsilon)$ с вероятностью $1 - (\lambda(X_t) + \sum_{i=1}^{n_t} h_i(X_t))\varepsilon + o(\varepsilon)$, с вероятностью $\lambda(X_t)\varepsilon + o(\varepsilon)$ в СМО поступит новая заявка, и с вероятностью $h_i(X_t)\varepsilon + o(\varepsilon)$ i -я заявка покинет СМО. Процесс X_t – марковский с п. с. $\mathcal{X}^{(0)} = \bigcup_{i=0}^\infty \mathcal{S}_i$, где $\mathcal{S}_i = \mathbb{R}_+^{i+1}$, он описывает поведение СМО **Q0**.

Предположим:

1. $0 < \lambda_0 \leq \lambda(X) \leq \Lambda_0 < \infty$ для любых $X \in \mathcal{X}_0$;
2. $h_k(X) \geq \frac{C}{1+x^{(k)}}$ для любых $X \in \bigcup_{i=k}^\infty \mathcal{S}_k$ при некотором $C > 2$. (5)

Обозначим ζ_i – i -й п.з. X_t ; $\overline{M}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{(1+u)^C} du = \mathbb{E}\overline{X}^\alpha$, где $\mathbb{P}\{\overline{X} \leq s\} = \Phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{(1+s)^C}$, $\overline{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(C+1)^{-1}$; $\overline{\varrho} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - (\frac{\lambda_0}{\Lambda})^2 e^{-\overline{\rho}}$.

Предложение 3. В условиях (2) $\mathbb{E}\zeta \leq \frac{e^{\overline{\rho}} - 1}{\Lambda}$; $\mathbb{P}\{n_t = 0\} \geq e^{-\overline{\rho}}$; $u \mathbb{E}\zeta^\kappa \leq \frac{\mathbb{E}\overline{X}^\kappa}{\kappa} e^{2\overline{\rho}}$ при $\kappa \in (0, C)$. \triangleright

Доказательство (схема). 1. Ф.р. χ_i – времени обслуживания i -й заявки – $F_i(s) = 1 - \exp\left(\int_0^s h_u(\cdot) du\right) \geq \Phi(s)$. Т.е. сл.в. $\bar{\chi}_i$ по распределению больше сл.в. $\bar{\chi}$: $\chi_i \prec \bar{\chi}$.

2. Рассмотрим СМО **Q1**, где заявкам при поступлении приписан параметр $v \in \{1, 2\}$; состояние СМО – это вектор $X_t^{(1)} = (x_t^{(0,1)}, x_t^{(0,2)}; x_t^{(1)}, v_t^{(1)}, x_t^{(2)}, v_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n_t)}, v_t^{(n_t)})$, где $x_t^{(0,i)}$ – время от последнего прихода заявки из i -го потока, $x_t^{(j)}$ и $v_t^{(j)}$ – обслуженное время j -й заявки и его параметр. Входящий поток **Q1** – сумма двух потоков, 1-й с интенсивностью $\lambda(X_t^{(1)})$, а 2-й – $\hat{\lambda}(X_t^{(1)}) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_0 - \lambda(X_t^{(1)})$; параметр заявки – номер её потока; время обслуживания 2-го потока имеет ф.р. $\Phi(s)$ и не зависит от $X_t^{(1)}$. П.с. $X_t^{(1)}$ – это $\mathcal{X}^{(1)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\mathbb{R}_+^{2+i} \times \{1, 2\}^i)$. Интен-

сивность обслуживания заявок 1-го потока $h_k(X_t^{(1)})$ и интенсивность $\lambda(X_t^{(1)})$, зависит от $\hat{X}_t = (x_t^{(0,1)}; x_t^{(0)} \times (2 - v_t^{(0)}), x_t^{(1)} \times (2 - v_t^{(1)}), x_t^{(2)} \times (2 - v_t^{(2)}), \dots, x_t^{(n_t)} \times (2 - v_t^{(n_t)}))$, т.е. только от заявок 1-го потока. Условия (2) выполнены. СМО **Q1** – это СМО **Q0** с добавочным потоком заявок, и сумма потоков имеет интенсивность Λ_0 , а поведение **Q0** – прежнее. П.з. $\zeta^{(1)}$ **Q1** не менее п.з. ζ **Q0** *потраекторно*: $\zeta^{(1)} \succ \zeta$.

3. Заменим в СМО **Q1** времена обслуживания заявок из первого потока на независимые сл.в. с ф.р. $\Phi(s)$. П.з. $\zeta^{(2)}$ полученной СМО **Q2** потраекторно не менее ζ ; $\zeta^{(2)} \succ \zeta$, т.е. ф.р. $B^{(2)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\zeta^{(2)} \leq s\} \leq B_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\zeta_i \leq s\}$, отсюда выводятся утверждения Предложения 3. \square

Пусть \mathcal{P}_t – распределение X_t . Процесс X_t – регенерирующий, его моменты регенерации ϑ_i – моменты перехода **Q0** из \mathcal{S}_0 в \mathcal{S}_1 ; $X_{\vartheta_i} = (0; 0)$. Т.к. $\forall \alpha \in [1, C)$ (см. (2)) $\mathbb{E} \zeta_i^\alpha < \infty$, X_t эргодичен и $\mathcal{P}_t \Rightarrow \mathcal{P}$.

Предложение 4. В условиях (2) для всех $\kappa \in [1, C - 1)$ верно:

$$\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|_{TV} \leq t^{-\alpha} \left(C_1(\bar{\varrho}, \kappa) \frac{\bar{\varrho} \bar{M}_{\kappa+1} e^{2\bar{p}\Lambda}}{(\kappa+1)^2 (e^{\bar{p}} - 1)} \right) + C_2(\bar{\varrho}, \kappa) \left(\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\lambda_0^\kappa} + \bar{M}_\kappa \right). \quad \triangleright$$

Доказательство (схема). 1. Входящий поток СМО **Q0** – сумма двух потоков: fl с интенсивностью λ_0 , и Flt с интенсивностью $\lambda'(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(X_t) - \lambda_0 \geq 0$. В *зависимых* СМО **Q'** и **Q''** – в первой поток fl_0 , а во второй – Flt ; $\lambda'(X_t) = \lambda'(\tilde{X}_t)$, вектор $\tilde{X}_t = (X'_t; X''_t)$ составлен из X'_t и X''_t – векторов состояний **Q'** и **Q''**. $X'_t = 0$, если **Q'** свободна; $X'_t = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(n'_t)})$, $y_t^{(i)}$ – обслуженное время i -й заявки в **Q'** из n'_t заявок в **Q'** – если **Q'** занята. $X''_t = (z_t^{(0)}; z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \dots, z_t^{(n''_t)})$, $z_t^{(0)}$ – время от последнего поступления заявки из потока $fl_0 + Flt$ до момента t , а $z_t^{(i)}$ – обслуженное время i -й заявки в **Q''** из n''_t заявок в **Q''** (если $n''_t = 0$, то X''_t однокомпонентный). Всего заявок в **Q'** и **Q''** –

$n_t = n'_t + n''_t$. П. с. $\tilde{X}_t - \tilde{X} = \mathcal{X} \times \mathcal{X}^{(0)}$. Точкам регенерации X_t соответствуют точки ϑ_i , когда $\tilde{X}_{\vartheta_i} = ((0; 0); (0))$ или $\tilde{X}_{\vartheta_i} = (0; (0; 0))$. Вектор \tilde{X}_t определяет вектор X_t . $\mathbb{P}\{\text{следующая заявка поступит в } \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}'' \text{ из потока } fl_0\} \geq p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Lambda}{\lambda_0}$.

2. Пусть \tilde{X}_t и $\tilde{X}_t^{(1)}$ независимы, $\tilde{X}_0 = (0; (0))$ и $\tilde{X}_0^{(1)} \in \tilde{\mathcal{X}}$; пусть $n_t^{(1)}$ – число заявок в СМО процесса $\tilde{X}_t^{(1)}$. Пусть $\tau(\tilde{X}_0^{(1)}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : \tilde{X}_t = \tilde{X}_t^{(0)} = ((0; 0); (0))\}$; $\eta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : n_t^{(1)} = 0\}$ (1-е окончание п.з.), $\eta'_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > \eta_{i-1} : n_t^{(1)} > 0\}$ (начало i -го п.з.), $\eta_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq \eta'_i : n_t^{(1)} = 0\}$ (окончание i -го п.з.). $\mathbb{P}\{n_{\eta_i} = 0\} \geq e^{-\bar{p}}$. Если в момент η_i обе СМО свободны, то соответствующие подсистемы \mathbf{Q}' и $\mathbf{Q}'^{(1)}$ совпали ($X_{\eta_i}^{(1)} = X'_{\eta_i} = 0$). $\mathbb{P}\{\text{Следующие заявки придут в обе СМО из потоков } fl_0 \text{ и } fl_0^{(1)}\} \geq p^2$, и поэтому в конце каждого периода регенерации $\tilde{X}_t^{(1)}$ с вероятностью большей чем $p^2 e^{-\bar{p}}$ состояния процессов совпадут. Затем Предложение 4 доказывается как Предложение 2. \square

Замечание. Найденные оценки неоптимальны. Их можно улучшить методом *успешного склеивания* – см. [1]. \triangleright

Литература

1. *Griffeath D.* A maximal coupling for Markov chains // *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete.* — 1975. — Vol. 31, no. 2. — P. 95–106.
2. *Lindvall T.* *Lectures on the Coupling Method.* — Wiley, New York, 1992.
3. *Takács L.* On Erlang's Formula // *Ann. Math. Statist.* — 1969. — Vol. 40, no. 1. — P. 71–78.
4. *Veretennikov A. Yu.* On the rate of convergence for infinite server Erlang-Sevastyanov's problem // *Queueing Systems.* — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 181–203.
5. *Stadje, W.* The busy period of the queueing system $M|G|\infty$ // *Journal of Applied Probability.* — 1985. — Vol. 22. — P. 697–704.

UDC 519.218.4, 519.873

Simple bounds for the convergence rate of $M|G|\infty$ queueing system

G. A. Zverkina^{*†}

** Moscow State University of Railway Engineering (MIIT)
9b9 Obrazcova Street, Moscow, 127994, Russia*

*† V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of
Sciences
65 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia*

A simple approach for obtaining strong polynomial bounds for the convergence rate of the standard Erlang-Sevastyanov $M|G|\infty$ queueing system described. This approach can be extended to the generalized Erlang-Sevastyanov system. Also the way how these estimates can be improved is discussed.

Keywords: Erlang-Sevastyanov queueing system, convergence rate, strong bounds, stationary distribution, total variation metric.

UDC 519.2

Statistical Analysis of Data Generated by a Mixture of Two Parametric Distributions

Yu. K. Belyaev*, D. Källberg*, P. Rydén*

* *Department of Mathematics and Mathematical Statistics,
Umeå University,
SE 901 87 Umeå, Sweden*

Abstract. We introduce a novel approach to estimate the parameters of a two-component mixture distribution. The method combines a grid-based approach with the method of moments and reparametrization. The grid approach enables the use of parallel computing and the method can easily be combined with resampling techniques. We derive a reparametrization for the mixture of two Weibull distributions, and apply the method on gene expression data from one gene and 409 ER+ cancer patients.

Keywords: mixture of parametric distributions, point process, consistency, accuracy of estimators, resampling, Palm intensities, responsibilities.

1. Introduction

Novel technologies in medicine and manufacturing industry are generating high-dimensional and complex data which have the potential to provide vital information and knowledge, but statistical analyses remain a bottle neck. In cancer research the expression of thousands of genes are measured, with the objective to search for novel disease subtypes by applying cluster analysis [1, 2]. This requires that the dimension of the problem is reduced through variable selection [1, 2]. We address variable selection in a parametric framework for the case when there are two types of sub-diseases. For each variable we assume that the observations are generated by a two-component mixture distribution, with a set of unknown parameters. This is a well-studied problem that has been addressed more than 100 years, see e.g. [3–5]. Karl Pearson carried out the first attempt to estimate the normal mixture distribution using the method of moments, here we modify this approach and introduce a grid-based method that can be applied for a wide range of distribution families. We introduce a measure that is a function of the responsibilities, which can be easily estimated and used to select informative genes for the cluster analysis.

2. Main section

We consider n_d observations $\mathbf{x}_1^{n_d} = \{x_1, \dots, x_{n_d}\}$ from a population with two groups of individuals. Let $\mathbf{t}_1^{n_d} = \{t_1, \dots, t_{n_d}\}$ denote the individual's unobservable group labels (1 or 2) and regard $\{x_j, t_j\}_{j=1,2,\dots}$ as

observations of the independent and identically distributed (i.i.d.) random variables $\{X_j, T_j\}$, where X_j has the probability density function (p.d.f.)

$$p[x, \boldsymbol{\theta}] = \omega_1 p_1[x, \boldsymbol{\theta}_1] + (1 - \omega_1) p_2[x, \boldsymbol{\theta}_2].$$

Here $p_i[x, \boldsymbol{\theta}_i]$ denotes the p.d.f. of X_j given that $T_j = i$ and ω_1 denotes the proportion of individuals belonging to group 1. Let $\boldsymbol{\theta} = \{\omega_1, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2\}$ denote the k unknown parameters of the p.d.f. and suppose that the overall objective is to estimate a parameter that can be expressed as a function of the model parameters, i.e. $\varphi = g(\boldsymbol{\theta})$.

We propose a general solution to the above problem that can easily be combined with a resampling procedure in order to derive a *confidence interval* (CI) for the parameter of interest. In the first stage the k parameters are divided in two groups: l grid parameters $\boldsymbol{\theta}_g$ and $k - l$ free parameters $\boldsymbol{\theta}_f$. Through reparametrization the $(k - l)$ first moments can be expressed as algebraic functions of the parameters, i.e.

$$\mu_1 = f_1(\boldsymbol{\theta}_g, \boldsymbol{\theta}_f), \dots, \mu_{k-l} = f_{k-l}(\boldsymbol{\theta}_g, \boldsymbol{\theta}_f), \quad (1)$$

where $\mu_m = \mathbb{E}[X_j^m]$, $m = 1, \dots, (k - l)$.

If the grid parameters are considered as known and the moments are empirically estimated then the equation system defined in (2) can be solved. We propose a grid-based approach where we for each grid-point estimate the $(k - l)$ free parameters via the reparametrization approach. Finally $\boldsymbol{\theta}$ is estimated with the grid-point estimate $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ that maximizes the log-likelihood function (or some other fitness criterion). Below we show how reparametrization can be used for the case when the data is described by a mixture of two Weibull distributions.

Using the theory of point processes [6] we can apply the *Palm intensities* to define the *responsibilities*

$$q_i[x_j, \boldsymbol{\theta}] = \mathbb{P}[T_j = i \mid X_j = x_j] = \frac{\omega_i p_i[x_j, \boldsymbol{\theta}_i]}{\omega_1 p_1[x_j, \boldsymbol{\theta}_1] + (1 - \omega_1) p_2[x_j, \boldsymbol{\theta}_2]},$$

for $i = 1, 2$, and $j = 1, \dots, n_d$, and where $\omega_2 = 1 - \omega_1$. Suppose that the responsibilities are used to predict which cancer type the patients have, then the expected number of *correctly classified* (cc) individuals can be expressed as

$$\varphi_{cc} = \sum_{j=1}^{n_d} \left(q_1[x_j, \boldsymbol{\theta}]^2 + q_2[x_j, \boldsymbol{\theta}]^2 \right),$$

where $\boldsymbol{\theta}$ are the true parameters. The measure φ_{cc} can be estimated by replacing $\boldsymbol{\theta}$ with $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. The estimated measure $\hat{\varphi}_{cc}(\mathbf{x}_1^{n_d})$ can be used for variable selection in a high-dimensional cluster analysis problem.

We now consider the special case when data is described by a mixture of two 2-parameter Weibull distributions (*Mix2W*) where X_j has the probability density function (p.d.f.)

$$p_{2W}[x, \theta_5] = \omega_1 p_W[x, \alpha_1, \beta_1] + (1 - \omega_1) p_W[x, \alpha_2, \beta_2],$$

with

$$p_W[x, \alpha, \beta] = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)^\beta}, \quad x \geq 0,$$

where $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ denote the scale and shape parameters, respectively.

The first three moments of X_j are

$$\mu_1 = \omega_1 \alpha_1 g_{11} + (1 - \omega_1) \alpha_2 g_{21}, \tag{2}$$

$$\mu_2 = \omega_1 \alpha_1^2 g_{12} + (1 - \omega_1) \alpha_2^2 g_{22}, \tag{3}$$

$$\mu_3 = \omega_1 \alpha_1^3 g_{13} + (1 - \omega_1) \alpha_2^3 g_{23}, \tag{4}$$

where $g_{ik} = \Gamma[1+k/\beta_i]$ and $\Gamma[\cdot]$ is the gamma function, $i = 1, 2, k = 1, 2, 3$. For known values of $\psi_5 = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \beta_1, \beta_2\}$ this is a determined equation system with unknown parameters $\{\omega_1, \alpha_1, \alpha_2\}$. From (2) it follows that α_2 can be expressed as a function of α_1 and together with (2) we get that α_1 is given by the solutions of a quadratic equation with coefficients depending on ω_1 . Inserting these solutions in (2) yields cubic equations that can be solved w.r.t. ω_1 if the moments μ_1, μ_2, μ_3 are replaced with the empirical moments $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$, where $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_d} \sum_{j=1}^{n_d} x_j^k$. The local estimator $\tilde{\theta}_5$ of θ_5 given $\{\beta_1, \beta_2\}$ is defined as the relevant solution (i.e. $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, and $0 < \omega_1 < 1$) that maximizes the log-likelihood function. Note that for some values $\psi = \{\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \beta_1, \beta_2\}$ there may not exist any relevant solutions of the equation system. Let G denote the regular grid with grid-points $\{\beta_1, \beta_2\}$. The global estimator $\hat{\theta}_5 = \{\hat{\omega}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2\}$ of θ_5 is given by the local estimator $\tilde{\theta}_5$ that maximizes the log-likelihood function, i.e.

$$\hat{\theta}_5 = \arg \max_{\theta_5} \sum_{j=1}^{n_d} \log \left(\tilde{\omega}_1 p_1[x_j, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1] + (1 - \tilde{\omega}_1) p_2[x_j, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2] \right).$$

We call this algorithm the Hybrid, Reparametrization, and Discretization (HRD) algorithm. The HRD-estimator $\hat{\theta}_5$ can be used to estimate the responsibilities and the measure φ_{cc} . The approach can easily be combined with resampling in order to obtain the accuracy of the estimators (see [7]).

Next we consider an example where we model microarray breast cancer data obtained from the Cancer Genome Atlas (TCGA). Expression

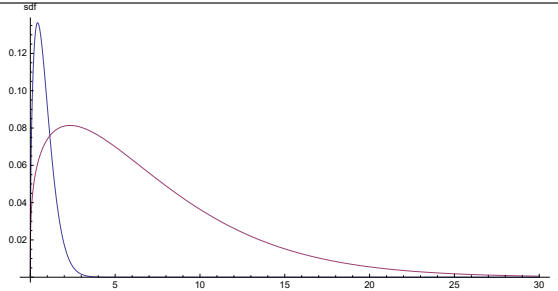


Figure 1. Estimated components of the *Mix2W* model.

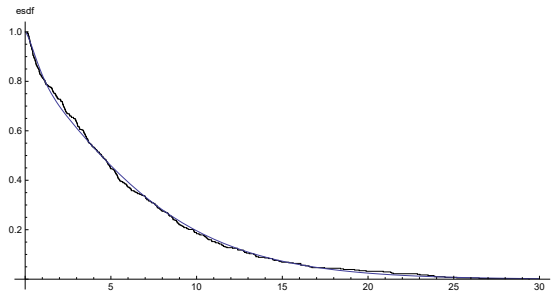


Figure 2. Empirical survival distribution function and the estimated mixture of two Weibull survival distribution functions.

levels for the gene *GLNT3* were taken from 409 patients with positive estrogen receptor (ER+) status, a well known subgroup of the disease. The untransformed data were modeled with a mixture of two Weibull distributions, with the weight $\hat{\omega}_1 = 0.17$, the scale and shape parameters were $\hat{\alpha}_1 = 0.926$, $\hat{\beta}_1 = 1.75$, $\hat{\alpha}_2 = 7.514$, $\hat{\beta}_2 = 1.287$, see Fig. 1. The survival distribution function of the fitted model was close to the empirical survival distribution function, see Fig 2.

3. Conclusions

The problem on how to estimate the parameters in a two-component mixture distribution is an old problem that has attracted a lot of attention. The idea to lower the complexity of the problem by momentarily consider some parameters as fixed over a grid is attractive since: modern computers are powerful, the approach is well-suited for parallelization and the approach can easily be combined with resampling. Moreover, the values of

the log-likelihood function can easily be visualized for 1- or 2-dimensional grids, which can be very informative. For the Weibull example we used a 2-dimensional grid and fixed the shape parameters, but there are several alternative reparametrizations that could be considered. Generally, there is a tradeoff between the complexity of the grid and the complexity of the equation system, the higher dimension of the grid the simpler equation system. One advantage by considering a high-dimensional grid is that there will be no need to estimate higher order moments which can be difficult, in particular if the sample size is relatively small and if the data are “contaminated” with outliers. There are several open questions regarding the construction of the grid. For example: How should the boundaries be selected? How dense does the grid need to be? Can an iterative grid-based approach, allowing for uneven grid-densities, be used?

Acknowledgments

This work was supported by grants from the Swedish Research Council, Dnr 340-2013-5185 (P. R.), the Kempe Foundations, Dnr JCK-1315 (D. K., P. R.), and the Faculty of Science and Technology, Umeå University (Yu. B., D. K., P. R.).

References

1. *Freyhult E., Landfors M., Önskog J., Hvidsten T. R., Rydén P.* Challenges in microarray class discovery: a comprehensive examination of normalization, gene selection and clustering // BMC Bioinformatics. — 2010. — Vol. 11. — Article 503.
2. *Bolón-Canedo V., Sánchez-Marono N., Alonso-Betanzos A., Benítez J. M., Herrera F.* A review of microarray datasets and applied feature selection methods-Information Sciences. — 2014. — Vol. 282, no. 1. — P. 111–135.
3. *Bordes L., Mottelet S., Vandekerkhove P.* Semiparametric estimation of a two-component mixture model // Annals of Statistics. — 2006. — Vol. 34, no. 3. — P. 1204–1232.
4. *Carta J. A., Ramírez P.* Analysis of two-component mixture Weibull statistics for estimation of wind speed distributions // Renewable Energy. — 2007. — Vol. 32, no. 3. — P. 518–531.
5. *Celeux G., Chauveau D., Diebolt J.* Stochastic versions of the EM algorithm: an experimental study in the mixture case // Journal of Statistical Computation and Simulation. — 1996. — Vol. 55, no. 4. — P. 287–314.
6. *Kallenberg O.* Foundations of modern probability. — Springer, 2006.
7. *Belyaev Yu. K., Nilsson L.* Parametric maximum likelihood estimators and resampling. Statistical Research Report, Department of Mathematical Statistics, Umeå University, 1997-15. — ISSN 1401-730X.

Non-Markovian Models of Branching Random Walks

G. Popov*, E. Yarovaya*

** Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119234, Russia*

Abstract. For applications in reliability theory it is important to reduce dynamical systems with denumerable number of states to systems with a finite number of states. We demonstrate that in such procedure Markovian property of initial dynamical systems with denumerable number of states may be lost. We consider branching processes with transport of particles called branching random walks. Non-Markovian models are constructed based on branching random walks on multidimensional lattices with a few branching sources. The object of investigation in branching random walks is the number of particles in every lattice point. By aggregation of some lattice point areas it is possible to consider a finite set of system states instead of a denumerable set of system states, but, as a result, the Markovian property of initial branching random walks is lost. In such models we assume that the distribution of the sojourn time of the particle at every lattice point is exponential and the underlying random walk is the Markov process on a countable phase space. If we consider the random walk with only two states: in the branching sources and out of them then in this case the random walk becomes Non-Markovian. The results can be used for study of particle population in branching random walk in sources and out of them. General methods are proposed to study non-Markovian models for branching random walks.

Keywords: branching random walks, non-Markovian processes, Green's function.

1. Introduction

For applications, e.g., in the reliability theory, it is important to reduce consideration of dynamical systems with denumerable number of states to consideration of systems with a finite number of states [1].

In the paper we demonstrate that in the course of such a reduction the Markovian property of initial dynamical systems with denumerable number of states may be lost. Non-Markovian models are constructed based on continuous-time branching random walks (BRWs) on \mathbf{Z}^d , $d \geq 1$, with a few branching sources, see the BRW description, e.g., in [2]. By aggregating some lattice point areas it is possible to consider a finite set of system states instead of a denumerable set of system states, but, as a result, the Markovian property of initial BRWs is lost. Such approach to study of symmetric and symmetrizable BRWs with one particle generation centre was suggested in [3].

In Sec. 2 we construct a continuous-time symmetric random walk X_t on \mathbf{Z}^d , which can be considered as moving of an initial particle on \mathbb{Z}^d without branching with two possible space states at time t . In Sec. 3

we shortly discuss Non-Markovian BRW models and formulate some limit results. Remark that the equations of Sec. 2 may be generalized on X_t with infinite variance of jumps, but the distribution time in the space states, based on the asymptotic behavior transition probabilities of X_t , will be different.

2. Non-Markovian Model of a Random Walk

We assume that the random walk of particles is defined by the infinitesimal transition matrix $A = \|a(x, y)\|_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ which is symmetric: $a(x, y) = a(y, x)$; homogeneous: $a(x, y) = a(0, y - x) = a(y - x)$; irreducible: $\forall x \in \mathbb{Z}^d \exists x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}^d : x = \sum_{i=1}^k x_i$ and $a(x_i) \neq 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$; regular: $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} a(x) = 0$, for $a(x) \geq 0, x \neq 0, a(0) < 0$, and also has a finite variance of jumps: $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^2 a(x) < \infty$.

Let us consider a continuous-time symmetric irreducible random walk X_t on \mathbb{Z}^d with two possible space states at time t .

- State I: $X_t = x_i, i = 1, 2, \dots, N$, (black lattice points on Fig. 1);
- State II: $X_t = y, y \neq \{x_i\}_{i=1}^N$, (white lattice points on Fig. 1).

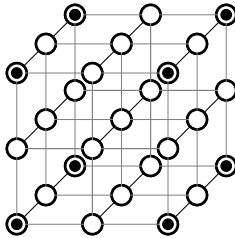


Figure 1. Example of the model on \mathbb{Z}^3 .

In [3] there was considered the case when $N = 1$ and the random walk started from the origin at time $t = 0$. In this situation the time spent by the particle at the origin until leaving it was denoted by τ_1 , and the time spent by the particle outside the origin until its first return to the origin was denoted by τ_2 . In virtue of Markovian character of the initial random walk [3] in this case the time τ_1 spent by the particle at the points x_1 was exponentially distributed random variable with parameter $-a(0)$, but the sojourn time τ_2 of X_t to be outside the origin before the first return to the origin was not exponentially distributed and depend on the lattice dimension d .

Now we consider the case $N \geq 2$. Let us assume that X_t resides in State I until its first transition to State II. Due to independence of random

variables of time at the points $x_i, i = 1, 2, \dots, N$, on \mathbb{Z}^d and their identical distributions we can conclude that for every $n, n \leq N$, the time τ_1 is defined by the sum of n independent exponentially distributed random variables, each of which has the mean value of $1/(-a(0))$, and has the Erlang distribution with the parameters $(-1/a(0), n)$.

Set $G_1(t) := P(\tau_1 < t)$ and $G_2(t) := P(\tau_2 < t)$. Below, we will obtain that the distribution of the random walk sojourn time τ_2 to be outside the State I on \mathbb{Z}^d (before the first return to State I) is not exponentially distributed. The long-time asymptotic behavior of the transition probability $p(t, x, y)$ defined by the intensities $a(x)$, as was shown, e.g., in [4], is given by $p(t, x, y) \sim \gamma d t^{-d/2}$, where d is a constant defined by the dimension d of the lattice. Denote by $G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda u} p(u, x, y) du$ the Laplace transform of transitional probability called *Green's function*. By a standard way it is possible to get the following lemma.

Lemma 1. *For the random walk under consideration we have*

$$p(t, 0, x) = 1 - G_1 + \int_0^t p(t - u, 0, x)(G_1 * G_2)\{du\},$$

where $(G_1 * G_2)(u) = P(\tau_1 + \tau_2 < u)$ and $x \in \mathbf{Z}^d$.

From here, applying the Laplace transform and the Tauberian theorems [5] we get the main proposition.

Theorem 1. *Let $N \geq 1$ then for the random walk under consideration, as $t \rightarrow \infty$, we have*

$$\begin{aligned} 1 - G_2(t) &\sim N/(-a(0)\gamma_1\pi\sqrt{t}), & d = 1, \\ 1 - G_2(t) &\sim N/(-a(0)\gamma_2 \ln t), & d = 2, \\ 1 - G_2(t) &\sim C_{N,d}, & d \geq 3, \end{aligned}$$

where $C_{N,d} > 0$.

By virtue of this theorem the distribution time outside the sources are nonexponential, and therefore we have:

Corollary 1. *The random walk under consideration is Non-Markovian.*

3. Non-Markovian Branching Random Walks

Let us consider a finite set of branching sources located at the lattice points $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbf{Z}^d, d \geq 1$. We assume that the initial particle being outside the sources performs a continuous time random walk on \mathbf{Z}^d until reaching one of the sources. The branching of particles at every point $x_i, i = 1, 2, \dots, N$, is described by the branching processes with continuous time with the infinitesimal generation function of transition

intensities $f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$, where $b_n \geq 0$ for $n \neq 1$, $b_1 < 0$ and $\sum_n b_n = 0$.

We also assume that $\beta_r := f^{(r)}(1) < \infty$, $r \in \mathbf{N}$, and $\beta := \beta_1$. Let $\mu_t(y)$ be the number of particles at time t at the point $y \in \mathbf{Z}^d$. Then, the condition that at time $t = 0$ the system consists of a single particle at the point x amounts to $\mu_0(y) = \delta_x(y)$.

Now, let us consider BRWs on \mathbf{Z}^d with State I and State II. In this case the evolution of a particle system in time may be described by the two-dimensional vector $(\sum_{i=1}^N \mu_t(x_i), \eta_t)$, where $\eta_t = \sum_{y \neq \{x_i\}_{i=1}^N} \mu_t(y)$, is the number of particles outside the branching sources. This construction is a more complicated example of the presented in Sec. 2 non-Markovian model based on random walks.

The present investigation proposes general methods to study non-Markovian models of supercritical BRW on \mathbf{Z}^d for which an exponential growth of the particle number in every lattice point is observed. In the BRW models with finitely many sources of equal intensity, as was shown in [6], there arise multipoint perturbations of the symmetric random walk generator \mathcal{A} which have the form

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{A} + \beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i},$$

where $x_i \in \mathbf{Z}^d$, $\mathcal{A} : l^p(\mathbf{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbf{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, is the symmetric operator acting by formula

$$(\mathcal{A}u)(z) := \sum_{z' \in \mathbf{Z}^d} a(z - z')u(z'),$$

$\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$, $\delta_x = \delta_x(\cdot)$ denotes the column vector on the lattice which is equal to 1 at the point x and to 0 at the other points. The perturbation $\beta \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i}$ of the operator \mathcal{A} can result in the appearance of positive eigenvalues of the operator \mathcal{H}_β . Let λ_0 be the leading positive eigenvalue of \mathcal{H}_β then for $t \rightarrow \infty$ both the numbers of particles at the sources and their total number $\mu_t := (\sum_{i=1}^N \mu_t(x_i)) + \eta_t$ grow exponentially:

Theorem 2. *Let λ_0 be the leading positive eigenvalue of \mathcal{H}_β then, in the sense of convergence of all moments,*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N \mu_t(x_i) \right) e^{-\lambda_0 t} &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \xi, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\lambda_0 t} &= \xi, \end{aligned}$$

where $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ is a function and ξ is a nondegenerate random variable.

Let us note that the limit relations in the last theorem can be meant also in the sense of convergence in distribution. The conditions under which the distribution ξ is uniquely determined by its moments were established using the Carleman criterium, see, e.g. [4]. Sufficient conditions for the exponential growth of the number of particles at the sources were obtained, e.g., in [6]. Thus, the methods developed in [6] are suitable for studying the offered non-Makrovian models based on supercritical BRWs with a finite number of branching sources.

Acknowledgments

The research was supported by the RFBR, project No. 17-01-00468.

References

1. *Koroljuk V. S., Turbin A. F.* Matematicheskie osnovy fazovogo ukрупneniya slozhnykh sistem. – “Naukova Dumka”, Kiev, 1978. (in Russian)
2. *Yarovaya E. B.* Spectral properties of evolutionary operators in branching random walk models // Math. Notes. – 2012. – Vol. 92, no. 1–2. – P. 115–131.
3. *Yarovaya E. B.* Non-markovian models of branching random walks // Proceedings of the III Symposium on semi-Markov models: Theory and Applications, Cagliari, June 17-19, 2009. – Cagliari, Italy, 2009. – P. 1–4.
4. *Yarovaya E. B.* Branching random walks in a heterogeneous environment. – Moscow : Center of Applied Investigations of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University, 2007. (in Russian)
5. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. – New York: John Wiley & Sons Inc., 1970, 1971. – Vol. I, II of Second edition.
6. *Yarovaya E. B.* Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails // Methodology and Computing in Applied Probability. – 2016. – P. 1–17.

UDC 519.218.3

Stationarity conditions for the control systems that provide service to the conflicting non-ordinary Poisson flows

M. A. Rachinskaya*, M. A. Fedotkin*

** Department of Software Engineering
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod
23 Prospekt Gagarina, Nizhni Novgorod, 603950, Russia*

Abstract. A class of the systems with several non-ordinary Poisson input flows is studied. It is assumed that the flows are conflicting which means they cannot be served simultaneously. A service device carries out the control function also. A probabilistic model for the class of the systems is constructed. Easily verifiable conditions of stationarity are determined analytically for two control algorithms: a cyclic algorithm for the homogeneous flows and a feedback algorithm for the flows that differs in priority and intensity.

Keywords: non-ordinary Poisson flow, Markov chain, stationarity conditions, control algorithm.

1. Introduction

Many nowadays systems combine service operations and control functions for several conflicting flows of customers. Some good example is a traffic intersection controlled with an automated traffic light. For the sake of traffic safety no two input flows can be served (which means vehicles are allowed to move across the intersection) simultaneously. The problem is to find the most efficient control algorithm. The efficiency in the traffic systems may imply minimization of the mean number of waiting vehicles or minimization of the mean waiting time for an arbitrary vehicle. An optimization process of this kind includes two possible steps: to choose a control algorithm among the various classes of algorithms and to determine the optimal parameters values for the chosen algorithm [1]. For instance, the control parameters in traffic intersections coordinated with traffic lights are the light timing lengths that can vary from several seconds to several minutes or even more. In order to reduce the range of possible values for the control parameters, it is firstly necessary to determine the values that are unable to guarantee the efficient control, e. g. that result in unlimited growth of mean waiting time. In such cases stationarity conditions are usually taken into account: the stationarity ensures constancy of mean system characteristics. The present paper is devoted to the problem of determination of such stationarity conditions. Two control algorithms are considered: cyclic algorithm and feedback algorithm with prolongations. Due to the stochastic nature of the input flows, the stated probabilistic problem is solved basically by the methods of queuing theory and the theory of Markov chains.

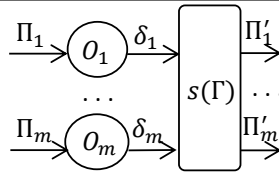


Figure 1. General scheme of the control system for the conflicting flows

A general scheme of the queueing system under consideration is presented in Fig. 1. There are $m \geq 2$ independent conflicting input flows. It is supposed that each input flow can be approximated as a non-ordinary Poisson flow Π_j (unless otherwise noted herein $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$) with the following parameters: λ_j is an intensity of batches, p_j, q_j and $s_j = 1 - p_j - q_j$ are the probabilities that an arriving batch consists of one, two and three customers. The customers are accumulated into batches due to influence of external environment [2]. So the flows have the same physical nature but can differ in intensity or priority of the customers. The customers of the flow Π_j which are arrived to the system and cannot be served immediately are forced to wait for service in a FIFO queue O_j . A service device can be in one of the possible states from the set Γ . All of the states can be divided into two types: service states for each flow and readjusting states that provide safe switching between service of different flows. No service operations are carried out in any readjusting state. The service state activates an extreme service strategy δ_j , i. e. when the service device is in the service state for the flow Π_j , as many present customers as possible are served but their number cannot exceed system service capacity l_j . The service device carries out control function as well. To this end, certain state change algorithm $s(\Gamma)$ is specified. The customers of the flow Π_j that are already served compose an output flow Π'_j . The task of the paper is to construct a model of the system and determine the conditions of system stationary mode existence.

2. Cyclic control algorithm

Let $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$. The state $\Gamma^{(2j-1)}$ is a service state for the flow Π_j . Such state is followed by the readjusting state $\Gamma^{(2j)}$. The cyclic algorithm $s(\Gamma)$ with a graph presented in Fig. 2 is considered. The service device stands in each state $\Gamma^{(k)}$, $k \in M = \{1, 2, \dots, 2m\}$, for a fixed period of time with duration of T_k . The full state change cycle duration is $T = \sum_{k \in M} T_k$. With the help of the embedded Markov chain method it is possible to observe the system in discrete moments without significant loss of information. Let τ_i (herein $i \in I = \{0, 1, \dots\}$) be a

random moment of the i -th service device state change. The increasing sequence $\{\tau_i; i \in I\}$ divides the time axis $[0, \infty)$ into the half-open intervals $\Delta_{-1} = [0, \tau_0)$, $\Delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in I$. The service device state in interval Δ_i is a random element denoted as $\Gamma_i \in \Gamma$. Let also $\eta_{j,i} \in \{0, 1, \dots\}$ and $\xi'_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \dots, l_j\}$ be the random variables that count the number of the customers of the flow Π_j which arrive to the system and depart from the system in the interval Δ_i correspondingly (here $i \in I \cup \{-1\}$). The number of waiting customers in the queue O_j in the moment τ_i is also a random variable denoted as $\kappa_{j,i} \in X = \{0, 1, \dots\}$.

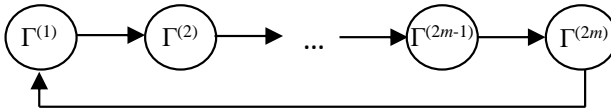


Figure 2. Graph of the cyclic control algorithm

The following results derived in [3] may be noted.

Lemma 1. For each $j \in J$ and given initial distribution of the vector $(\Gamma_0, \kappa_{j,0}, \xi'_{j,-1})$ the sequence $\{(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \in I\}$ is a homogeneous vector Markov chain with a countable state space $\Gamma \times X \times Y_j$ which consists of a class of transient states and a class of recurrent states with period $2m$.

The Markov chain $\{(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \in I\}$ describes the system dynamics only for the flow Π_j . Such separation is possible due to independence of the input flows and determinacy of the algorithm. The stationarity conditions are also splitted into independent conditions for each flow Π_j .

Theorem 1. For any $j \in J$ the stationary mode for the flow Π_j exists if and only if the system parameters meet the following inequality

$$\lambda_j T(3s_j + 2q_j + p_j) - l_j < 0. \tag{1}$$

The criterion (2) is close to the stationarity conditions for the classical queueing systems. The value $\lambda_j T(3s_j + 2q_j + p_j)$ characterizes the mean number of customers of the flow Π_j that arrive to the system during the full state change cycle. The inequality (2) means that the mean number of arriving customers must be less than the mean number of served customers.

3. Feedback control algorithm

Suppose now that the input flows differ significantly in intensity and priority. The intensity of arrivals of the flow Π_1 is quite small though the priority of its customers is the highest. The flow Π_m has the highest intensity of arrivals but low customer priority. The flows $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{m-1}$

are low-intensity low-priority flows. Based on the differences between the flows the feedback algorithm is proposed. The decision about service device state change is made according to the number of waiting customers in the queue O_1 . The algorithm assumes that service for the high-intensity flow Π_m may be prolonged. For this reason there are two service states for the flow Π_m : $\Gamma^{(2m-1)}$ with duration of T_{2m-1} and $\Gamma^{(2m)}$ with duration of $T_{2m} < T_{2m-1}$. The service intensity is the same for both of these states and equals μ_m . This means the service capacity in these states is measured by the variables $l_m = \lfloor \mu_m T_{2m-1} \rfloor$ and $l'_m = \lfloor \mu_m T_{2m} \rfloor \leq l_m$. The readjusting state for the flow Π_m is $\Gamma^{(2m+1)}$. It is proposed to prolong service for the flow Π_m in case the number of waiting customers of the high-priority flow is less than certain threshold value h_1 . The graph of this feedback control algorithm is presented in Fig. 3. In case of such algorithm, some sets are to be redefined: $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m+1)}\}$, $M = \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$, $T = \sum_{k \in M} T_k$, and all of the other variables and denotions are the same as in the section 2. It should be noted that in case $h_1 = 0$ the feedback algorithm becomes a pure cyclic algorithm.

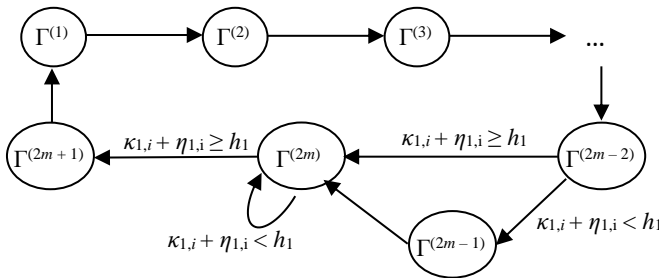


Figure 3. Graph of the feedback control algorithm

The following statements are proved for the system controlled with the feedback algorithm based on threshold priority.

Lemma 2. For any vector $(\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \kappa_{m,0}, \xi'_{1,-1}, \xi'_{m,-1})$ distribution the sequence

$$\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{m,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{m,i-1}); i \in I\} \tag{2}$$

is a homogeneous multidimensional Markov chain with a countable state space $\Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_m$ which consists of a class D_m of transient states and a class E_m of recurrent aperiodic states.

Lemma 3. For any initial distribution of (3) either the limiting equality $\lim_{i \rightarrow \infty} P(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}, \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{m,i} = x_m, \xi'_{1,i-1} = y_1, \xi'_{m,i-1} = y_m) = 0$ takes place for each $k \in M$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m \in Y_m$ and no stationary distribution exists or for any $k \in M$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m \in Y_m$

the equality

$$\begin{aligned}
 & p(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \\
 & = \lim_{i \rightarrow \infty} P(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}, \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{m,i} = x_m, \xi'_{1,i-1} = y_1, \xi'_{m,i-1} = y_m)
 \end{aligned}$$

takes place and an only stationary distribution of (3) exists. In the second case $p(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ is positive for $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E_m$ and is equal to null for the transient states $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D_m$.

Theorem 2. The stationarity criterion for the flow Π_1 consists in the inequality $\lambda_1(T - T_{2m-1})(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 < 0$ for the system parameters.

Theorem 3. No stationary mode for the flow Π_m exists if the system parameters meet conditions

$$\lambda_m T_{2m}(3s_m + 2q_m + p_m) - l'_m > 0, \lambda_m T_{2m-1}(3s_m + 2q_m + p_m) - l_m > 0$$

or conditions

$$\lambda_m(T - T_{2m})(3s_m + 2q_m + p_m) - l_m < 0, \lambda_m T(3s_m + 2q_m + p_m) - l_m - l'_m > 0.$$

4. Conclusion

The stationarity conditions derived in sections 2 and 3 can be easily verified for the real systems. Some simulation computer researches show that the feedback algorithm can degenerate in the cyclic one that in some cases may be even more efficient than the feedback control. In case of feedback control algorithm it is not possible to find the stationarity criterion for the high-intensity flow. However, the conditions stated in Theorem 3 give an idea of the desired behavior of the system: on average, the system must serve more customers than arrive to the system for any possible pathes on the graph presented in Fig. 3.

References

1. Fedotkin M. A., Rachinskaya M. A. Conflicting non-ordinary Poisson flows cyclic control process simulation model // Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport. — 2016. — No. 47. — P. 43–51.
2. Fedotkin M., Rachinskaya M. Parameters estimator of the probabilistic model of moving batches traffic flow // Distributed Computer and Communication Networks / Ser. Communications in Computer and Information Science. — 2014. — Vol. 279. — P. 154–168.
3. Rachinskaya M. A., Fedotkin M. A. Construction and investigation of a probabilistic model for the cyclic control of low-intensity flows // Vestnik of UNN. — 2014. — No 4 (1). — P. 370–376.

УДК 519.217.2

Критерий эргодичности для марковских цепей, описывающих эволюцию случайных слов

А. А. Замятин*, О. В. Машников*

* Кафедра теории вероятностей,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы 1, Москва, Россия, 119991

Аннотация. Мы рассматриваем счетные марковские цепи с дискретным временем на множестве слов. Иначе говоря, состояния цепи - упорядоченные последовательности символов (из некоторого алфавита) произвольной длины. В рассматриваемом случае алфавит является счетным множеством. Динамика цепи определяется с помощью случайной грамматики определенного типа. В каждый момент времени мы можем изменить один из концов последовательности, определяющей состояние цепи, при помощи заданного набора подстановок, каждая из которых осуществляется с определенной вероятностью. Нашей целью является доказательство критерия эргодичности для таких цепей.

Ключевые слова: марковская цепь, эргодичность, функция Ляпунова, критерий Фостера.

1. Введение

Рассмотрим однородную цепь Маркова \mathcal{A} с дискретным временем и счетным числом состояний

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, k, \dots\}$$

Состояния марковской цепи \mathcal{A} - это упорядоченные последовательности или слова $\alpha = i_n \dots i_1$ произвольной длины $n(\alpha) = |\alpha|$, где $i_s \in \mathbb{N}$. Для любых двух слов $\alpha = i_p \dots i_1$ и $\beta = j_q \dots j_1$ введем их конкатенацию (склейку) следующим образом

$$\beta\alpha = j_q \dots j_1 i_p \dots i_1$$

Обозначим через \emptyset пустое слово длины 0.

Предположим, что переходные вероятности $p_{\alpha,\beta}$ марковской цепи \mathcal{A} удовлетворяют следующим условиям:

- (C1) Возможные переходы в цепи Маркова устроены следующим образом. Мы можем удалить крайний левый символ в слове и вместо него подставить произвольное слово, состоящее не более, чем из 2-ух символов. Пусть $\alpha = i\rho$ и $\beta = \theta\rho$, где $|\theta| \leq 2$ и ρ - произвольное слово. Вероятность перехода $p_{\alpha,\beta}$ не зависит от ρ , а зависит только от i и θ . Обозначим эту вероятность через $q(i, \theta)$:

$$p_{i\rho, \theta\rho} = q(i, \theta)$$

В частности, если $\theta = \emptyset$, то с вероятностью $q(i, \emptyset)$ удаляется символ i и длина слова уменьшается на 1.

- (C2) Существует такое $K \in \mathbb{N}$, что вероятности $q(i, \theta) > 0$ для всех i и для всех $|\theta| \leq 2 : \theta = \emptyset, \theta = j_1, \theta = j_2j_1$ при условии, что $|j_2 - i| \leq K, |j_1 - i| \leq K$. Также предположим, что для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ переходная вероятность $p_{\emptyset, j_0} > 0$.
- (C3) Вероятности $q(i, \theta) = 0$ для всех i и для всех θ таких, что $1 \leq |\theta| \leq 2$, где $\theta = j_1, \theta = j_2j_1$, при условии, что либо $|j_2 - i| > K$, либо $|j_1 - i| > K$.
- (C4) Вероятность $q(i, \emptyset) \rightarrow 1$ при $i \rightarrow \infty$.

Поскольку сумма переходных вероятностей равна 1, то для любого $i \in \mathbb{N}$

$$q(i, \emptyset) + \sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j) + \sum_{j, k \in \mathbb{N}} q(i, jk) = 1 \tag{1}$$

Впервые такие марковские цепи были изучены в статье [1], где рассматривался случай конечного алфавита. В нашем случае он счетный - множество натуральных чисел.

Нашей целью является доказательство критерия эргодичности для марковской цепи \mathcal{A} .

Отметим, что условие (C2) обеспечивает неприводимость и апериодичность цепи \mathcal{A} .

Обозначим через $\alpha(t) \in \Omega$ состояние марковской цепи в момент времени t . Пусть τ_i первый момент времени, когда длина струны уменьшится на 1 при условии, что в начальный момент времени на левом конце слова стоял символ i :

$$\tau_i = \min\{t : |\alpha(t)| < |i\rho| |\alpha(0) = i\rho\}$$

Предположим, что цепь эргодична. Тогда математические ожидания $E_i = E\tau_i < \infty$ конечны и удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} E_i &= q(i, \emptyset) + \sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j)(1 + E_j) + \sum_{j, k \in \mathbb{N}} q(i, jk)(1 + E_j + E_k) = \\ &= 1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j)E_j + \sum_{j, k \in \mathbb{N}} q(i, jk)(E_j + E_k) \end{aligned}$$

Запишем эту систему в матричном виде

$$\vec{E} = \vec{1} + A\vec{E}$$

где $\vec{E} = (E_i, i \in \mathbb{N})$ и $\vec{1}$ - вектор, состоящий из единиц.

Выишем в явном виде элементы матрицы $A = \{a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}\}$

$$a_{ij} = q(i, j) + \sum_{k \in \mathbb{N}} (q(i, jk) + q(i, kj))$$

Из условия (C2) вытекает, что матрица A неприводима: для любой пары индексов (i, k) найдется такое натуральное $N = N(i, k)$, что при любом $n > N$, $a_{ik}^{(n)} > 0$, где $a_{ik}^{(n)}$ элементы матрицы A^n .

Отметим, что при выполнении условия (C3) матрица A обладает свойством:

$$a_{i, i+l} = 0, \quad |l| > K \quad (2)$$

Из этого свойства и равномерной ограниченности элементов a_{ij} следует, что матрица A определяет ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве l_2 , состоящем из вещественнозначных последовательностей $f = \{f_k\}, k \in \mathbb{N}$ таких, что $\sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k|^2 < \infty$. Линейный оператор, соответствующий матрице A , определяется стандартным способом

$$(Af)_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} f_j$$

и обозначается так же, как матрица.

Лемма 1 Пусть выполнено условие (C3). Оператор A является компактным тогда и только тогда, когда выполнено условие (C4).

Утверждение леммы следует из (1) и того факта, что

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j) + 2 \sum_{j, k \in \mathbb{N}} q(i, jk) < 2(1 - q(i, \emptyset))$$

где последнее равенство является следствием (1).

2. Основные результаты

В статье [2] теория Перрона-Фробениуса для конечных матриц была обобщена на случай компактных операторов. В частности, был доказан следующий результат.

Теорема 1 Пусть A - компактный линейный оператор в гильбертовом пространстве l_2 такой, что матрица оператора неприводима и состоит из неотрицательных элементов. Тогда существует положительное собственное значение λ , максимальное по модулю среди всех собственных значений A . Собственному значению λ отвечает собственный вектор $g = (g_i, i \in \mathbb{N}) \in l_2$, где все координаты $g_i > 0$: $Ag = \lambda g$. Собственный вектор g определяется однозначно с точностью до умножения на константу.

Сформулируем основной результат.

Теорема 2 *Предположим, что выполнены условия (C1) – (C4). Марковская цепь A эргодична тогда и только тогда, когда $\lambda < 1$, где λ – максимальное по модулю собственное значение оператора A .*

Доказательство. Пусть $\lambda < 1$. Для доказательства эргодичности цепи используем критерий Фостера [3]. Определим функцию Ляпунова следующим образом: для любого слова $\gamma = j_n \dots j_1 \in \Omega$, $\gamma \neq \emptyset$ положим

$$f(\gamma) = \sum_{k=1}^n (g_{j_k} + c)$$

где g_{j_k} – координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению λ и c – константа, которая определяется ниже. Мы докажем, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha(t) = i\rho) < -\delta \tag{3}$$

для любых $i \in \mathbb{N}$, $\rho \in \Omega$.

Пусть $g = (g_j, j = 1, 2, \dots)$ – собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению λ . Тогда

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} q(i, j)g_j + \sum_{j, k \in \mathbb{N}} q(i, jk)(g_j + g_k) = \lambda g_i, \quad i \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Принимая во внимание (1) и (2), найдем приращение функции Ляпунова

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha = i\rho) = (\lambda - 1)g_i + c \left(-q(i, \emptyset) + \sum_{j, k \in \mathbb{N}} q(i, jk) \right) \tag{5}$$

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. В силу условия (C4) можно выбрать N так, чтобы при $i > N$ было выполнено

$$-q(i, \emptyset) + \sum_{j, k \in \mathbb{N}} q(i, jk) < -\varepsilon$$

Положим $c = -\frac{\lambda-1}{2} \min_{i \leq N} g_i$ и $\delta = c\varepsilon$. Если $i \leq N$, то, согласно формуле (2)

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha = i\rho) < \frac{(\lambda - 1)g_i}{2} < -\delta$$

Если $i > N$, то $-q(i, \emptyset) + c \sum q(i, jk) < -\varepsilon$ и, следовательно,

$$E(f(\alpha(t+1)) - f(\alpha(t)) \mid \alpha = i\rho) < (\lambda - 1)g_i - c\varepsilon < -\delta$$

Таким образом, неравенство (2) выполнено. Из критерия Фостера следует, что цепь эргодична.

Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно использовать критерий незргодичности (см. [3]) с функцией Ляпунова

$$f(\gamma) = \sum_{k=1}^n g_{j_k}, \quad \gamma = j_n \dots j_1$$

где g_{j_k} — координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению λ .

Литература

1. Гайрат А. С., Мальшиев В. А., Меньшиков М. В., Пелих К. Д. Классификация марковских цепей, описывающих эволюцию случайных струн // УМН — 1995. — Vol. 50, no. 2 (302). — P. 5–24.
2. Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН — 1948. — Vol. 3, no. 1 (23). — P. 3–95.
3. Fayolle G., Malyshev V. A., Menshikov M. V. Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains. — Cambridge University Press, 2008.

UDC 519.217.2

An ergodicity criterion for Markov chains describing the dynamics of random words

O. V. Mashnikov*, A. A. Zamyatin*

* Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

We consider countable Markov chains with discrete time on the space of words. More exactly, states of the Markov chain are ordered sequences of symbols (from some alphabet) of arbitrary length. In our case the alphabet is a countable set. The dynamics of the chain is determined by a random grammar of a certain type. In each moment of time we can change one of the ends of the sequence that defines the state of the chain, with the help of specified rules of substitutions. Each substitution has a certain probability. Our goal is to prove an ergodicity criterion for such Markov chains.

Keywords: Markov chain, ergodicity, Lyapunov function, Foster criterion.

UDC 519.218.1

Skew Brownian motion with dry friction: The Pugachev–Sveshnikov equation approach

S. Berezin*, O. Zayats*

** Department of Applied Mathematics,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
Polytechnicheskaya str. 29, St. Petersburg, 195251, Russia*

Abstract. The Brownian motion with dry friction is one of the simplest but very common stochastic processes, also known as the Brownian motion with two valued drift, or the Caughey–Dienes process. This process appears in many applied fields, such as physics, mechanics, etc. as well as in mathematics itself. In this paper we are concerned with a more general process, skew Brownian motion with dry friction. We study the probability distribution of this process and its occupation time on the positive half line. The Pugachev–Sveshnikov equation approach is used.

Keywords: dry friction, skew Brownian motion, occupation time, local time, Pugachev–Sveshnikov equation, Riemann boundary value problem.

1. Introduction

Brownian motion plays an important role in statistical physics and other applied areas of science. The classical physical theory of Brownian motion was developed by Einstein and Smoluchowski [1] in the beginning of 20th century. Their model is based on the assumption that a Brownian particle is weightless, that mathematically leads to the Wiener process. The major drawback of this model is that the trajectories are continuous but nowhere differentiable, so velocity cannot be defined. A refined theory that gets over this issue by introducing particles' inertia was developed by Ornstein and Uhlenbeck [2] later on.

In both of the theories, a Brownian particle is driven by the random force resulting from collision of molecules, and the viscous friction takes place, that is, the force is proportional to the velocity of the particle. This is not always the case. A well-known example of that is the dry (Coulomb) friction of macroscopic materials. For this type of friction the resistive force is independent of the speed but depends on the direction of motion.

Behavior of the mechanical systems with dry friction under random excitation was first studied by Caughey and Dienes [3] in 60s. The Caughey–Dienes process is similar to the Ornstein–Uhlenbeck one up to the replacement of the viscous friction by dry, and its applications include control theory [4], seismic mechanics [5], communication systems theory [6], radio physics [7], and nonlinear stochastic dynamics [8]. It should be mentioned that this process also appears in purely mathematical papers [9–11]. In 2000s, there was another wave of interest in studying the Caughey–Dienes

process [12], that exist to this day. Some additional publications on the subject can be found in author's work [13].

The present paper deals with the so-called skew Caughey–Dienes process, or the skew Brownian motion with dry friction (SBM with dry friction), which generalizes Brownian motion with dry friction in the same way the skew Brownian motion generalizes the Wiener process [14].

2. Main section

For $\eta \in (-1, 1)$ we define skew Brownian motion with dry friction $X(t)$ as a unique strong solution [14] of the following equation

$$dX(t) = -2\mu \operatorname{sign}(X(t)) dt + \eta dL_X^0(t) + \sqrt{2}dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = 0.$$

By $W(t)$ we denote a standard Wiener process starting at zero, and $L_X^0(t)$ is the symmetric local time of the semimartingale $X(t)$ at the level zero

$$L_X^0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{(-\varepsilon, +\varepsilon)}(X(s)) d[X]_s,$$

where $[X]_s = 2s$ is the quadratic variation of $X(s)$. Further, we will be interested in the positive half-line occupation time of $X(t)$

$$\mathcal{I}(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{(0, +\infty)}(X(s)) ds.$$

One can think of $X(t)$ and $\mathcal{I}(t)$ as of the components of the vector diffusion process $(X(t), \mathcal{I}(t))$ governed by the system of SDEs

$$\begin{cases} dX(t) = -2\mu \operatorname{sign}(X(t)) dt + \eta dL_X^0(t) + \sqrt{2}dW(t), \\ d\mathcal{I}(t) = \mathbf{1}_{(0, +\infty)}(X(s)) ds, \quad X(0) = \mathcal{I}(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

In what follows, we derive the explicit formulas for the probability density function of (2), following ideas from [15]. Usually for this purpose one uses the Fokker–Planck–Kolmogorov equation or random walks approximation. We use an alternative approach based on the characteristic function method that manifests in use of the Pugachev–Sveshnikov singular integral differential equation.

It can be shown [15] that the characteristic function $E(z_1, z_2; t)$ of the process $(X(t), \mathcal{I}(t))$ satisfies the equation

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (z_1^2 - iz_2/2)E + (2\mu z_1 - z_2/2)\hat{E} - 2i\eta z_1\Psi_0 = 0, \quad E(z_1, z_2; 0) = 1, \quad (2)$$

where we adopt the short notation $\hat{E}(z_1, z_2; t)$ and $\Psi_0(z_2, t)$:

$$\hat{E} = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E|_{z_1=s}}{s - z_1} ds, \quad \Psi_0 = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} E|_{z_1=s} ds. \tag{3}$$

For $\text{Im } \zeta \neq 0$ let us introduce the Cauchy-type integral $\Phi(\zeta, z_2; t)$ and its limit values $\Phi^\pm(z, z_2; t)$ on the real axis from upper and lower half-planes (with respect to the first argument):

$$\Phi(\zeta, z_2; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E|_{z_1=s}}{s - \zeta} ds, \quad \Phi^\pm(z, z_2; t) = \lim_{\zeta \rightarrow z \pm i0} \Phi(\zeta, z_2; t), \quad \text{Im } z = 0.$$

It is well known that $\Phi(\cdot, z_2; t)$ is analytic when $\text{Im } \zeta \neq 0$, and that Φ^\pm satisfy Sokhotski–Plemelj formulas when $\text{Im } z = 0$:

$$\Phi^+ - \Phi^- = E, \quad \Phi^+ + \Phi^- = -i\hat{E}. \tag{4}$$

Clearly, one can rewrite (2) in terms of Φ^\pm , that gives a Riemann boundary value problem. Applying then Laplace transform with respect to t , and denoting its argument by p , we get to the formula

$$(z_1^2 + 2\mu iz_1 + p - iz_2)\tilde{\Phi}^+ - i\eta z_1 \tilde{\Psi}_0 - \frac{1}{2} = (z_1^2 - 2\mu iz_1 + p)\tilde{\Phi}^- + i\eta z_1 \tilde{\Psi}_0 + \frac{1}{2}. \tag{5}$$

The Laplace transforms are labeled with the tildes above the functions.

Note that the left-hand side of (2) can be analytically continued for all $z_1 \in \mathbb{C}$ such that $\text{Im } z_1 > 0$, also the right-hand side can be analytically continued for all $z_1 \in \mathbb{C}$ such that $\text{Im } z_1 < 0$. Since they match when $\text{Im } z_1 = 0$, they turn out to be elements of the same entire function of argument $z_1 \in \mathbb{C}$. Assuming that $\Phi^\pm(z, z_2; t) = O(\frac{1}{|z|})$ when $z \rightarrow \infty$ for $\text{Im } z \geq 0$, by generalized Liouville’s theorem one can realize that this entire function is actually linear: $G_0(z_2, t) + z_1 G_1(z_2, t)$. This leads to the equality

$$\tilde{\Phi}^\pm = \frac{G_0 + z_1 G_1 \pm i\eta z_1 \tilde{\Psi}_0 \pm 1/2}{z_1^2 \pm 2i\mu z_1 + p - (1 \pm 1)iz_2/2}. \tag{6}$$

Note that the denominator in (2) has zeros $iv^\pm = i(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + p - iz_2})$ and $i\kappa^\pm = i(\mu \pm \sqrt{\mu^2 + p})$ such that $\text{Im}(iv^\pm) \geq 0$ and $\text{Im}(i\kappa^\pm) \geq 0$. At the same time, $\tilde{\Phi}^\pm$ should be analytic in upper and lower half-planes, therefore, the singularities at iv^+ and $i\kappa^-$ should be removable. This gives a system of linear equations to determine G_0 and G_1 . Also, taking into account the definition of Ψ_0 in (2) and performing integration in (2) one

can get that $\tilde{\Psi}_0 = -iG_1$. After that, the system of linear equations for G_0 and G_1 can be written in the following form

$$G_0 + i\nu^+(1 + \eta)G_1 + 1/2 = 0, \quad G_0 + i\kappa^-(1 - \eta)G_1 - 1/2 = 0. \quad (7)$$

Finally, substituting G_0 and G_1 from (2) into (2), one can get the final expression for \tilde{E} using the first of the Sokhotski–Plemelj formulas (2). Particularly, after necessary simplifications one can get the Laplace transform of the characteristic function of $X(t)$ and $\mathcal{I}(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_X(z, p) &= \tilde{E}(z, 0; p) = \frac{1}{2i\kappa^-} \left(\frac{1 + \eta}{z + i\kappa^+} - \frac{1 - \eta}{z - i\kappa^+} \right), \\ \tilde{E}_{\mathcal{I}}(z, p) &= \tilde{E}(0, z; p) = \frac{(1 + \eta)\kappa^+ - (1 - \eta)\nu^-}{\nu^- \kappa^+ ((1 - \eta)\kappa^- - (1 + \eta)\nu^+)}. \end{aligned}$$

Cumbersome but straightforward computations will immediately lead us to the final expressions for the corresponding probability density functions (PDFs).

Theorem. *The PDF of $X(t)$, the steady-state PDF of $X(t)$, and the PDF of the positive half-line occupation time $\mathcal{I}(t)$ have the following form:*

$$\begin{aligned} f_X(x, t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(|x| + 2\mu t)^2}{4t}} + \mu e^{-2\mu|x|} \operatorname{Erfc} \frac{|x| - 2\mu t}{2\sqrt{t}} \right) \cdot \begin{cases} \alpha, & x > 0, \\ 1 - \alpha, & x < 0, \end{cases} \\ f_X^\infty(x) &= f_X(x, +\infty) = 2\mu e^{-2\mu|x|} (\alpha \mathbf{1}_{(0, +\infty)}(x) + (1 - \alpha) \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(x)), \\ f_{\mathcal{I}}(y, t) &= \frac{4e^{-\mu^2 t}}{\pi \sqrt{y(t-y)}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \chi(2\sqrt{y}s_1, 2\sqrt{t-y}s_2) s_1 s_2 e^{-s_1^2 - s_2^2} ds_1 ds_2, \end{aligned}$$

where $0 < y < t$, the function $\operatorname{Erfc}(\cdot)$ is the complementary error function, $\alpha = (1 + \eta)/2$, and

$$\begin{aligned} \chi(s_1, s_2) &= \frac{1 - \eta}{1 + \eta} e^{-\mu(s_1 + \frac{\eta-3}{\eta+1}s_2)} \chi^+(s_1, s_2) + \frac{1 + \eta}{1 - \eta} e^{-\mu(\frac{\eta+3}{\eta-1}s_1 + s_2)} \chi^-(s_1, s_2), \\ \chi^+(s_1, s_2) &= \mathbf{1}_{(0, +\infty)}((1 + \eta)s_1 - (1 - \eta)s_2), \quad \chi^-(s_1, s_2) = 1 - \chi^+(s_1, s_2). \end{aligned}$$

3. Conclusions

We derived explicit formulas for the probability density function of the Brownian motion with dry friction and its occupation time on the positive half-line, that generalizes known results for the regular Caughey–Dienes process. In fact, more general result was obtained for the Laplace transform of the joined characteristic function. Essentially, our approach is based on the reduction to a Riemann boundary value problem, and clearly it can be used to find the characteristics of more general SDEs with piecewise linear coefficients and local time.

References

1. *Einstein A., Smoluchowski M.* Brownian motion. Collected papers. — M.-L.: ONTI. — 1936.
2. *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.* On the theory of Brownian motion // *Physical Review*. — 1930. — Vol. 36, no. 5. — P. 823–841.
3. *Caughey T. K., Dienes J. K.* Analysis of a nonlinear first-order system with a white noise input // *Journal of Applied Physics*. — 1961. — Vol. 32, no. 11. — P. 2476–2479.
4. *Fuller A. T.* Exact analysis of a first-order relay control system with a white noise disturbance // *International Journal of Control*. — 1980. — Vol. 31, no. 5. — P. 841–867.
5. *Crandall S. H., Lee S. S., Williams J. H.* Accumulated slip of a friction-controlled mass excited by earthquake motions // *Journal of Applied Mechanics*. — 1974. — Vol. 41, no. 4. — P. 1094–1098.
6. *Lindsey W.C.* Synchronization systems in communication and control. — N.Y.: Prentice Hall, 1972.
7. *Tikhonov V. I., Mironov M. A.* Markov processes. — M.: Sovetskoe radio, 1977 (in Russian).
8. *Ahlbehrendt N., Kempe V.* Analysis of stochastic systems. Nonlinear dynamical systems. — Berlin: Akademie Verlag, 1984 (in German).
9. *Gairat A., Scherbakov V.* Density of skew Brownian motion and its functionals with applications in finance // *Mathematical Finance*. — 2016. — DOI: 10.1111/mafi.12120
10. *Lejay A., Lenôtre L., Pichot G.* One-dimensional skew diffusions: explicit expressions of densities and resolvent kernels. — 2015. — P. 1–28.
11. *Shiryayev A. N., Cherny A. S.* Some distributional properties of a Brownian motion with a drift and an extension of P. Lévy’s theorem // *Theory of Probability and Its Applications*. — 2000. — Vol. 44, no. 2. — P. 412–418.
12. *de Gennes P. -G.* Brownian motion with dry friction // *Journal of Statistical Physics*. — 2005. — Vol. 119, no. 5–6. — P. 953–962.
13. *Berezin S. V., Zayats O. I.* On energy dissipation in a friction-controlled slide of a body excited by random motions of a foundation // *Proceedings of NDTCS*. — 2015. — Vol. 16. — P. 117–119.
14. *Lejay A.* On the constructions of the skew Brownian motion // *Probability Surveys*. — 2006. — Vol. 3. — P. 413–466.
15. *Berezin S., Zayats O.* Application of the Pugachev–Sveshnikov equation to the Baxter occupation time problem // *Informatics and Applications*. — 2015. — Vol. 9, no. 2. — P. 39–49.

Joint distributions of synchronization models

A. Manita*

** Lomonosov Moscow State University,
Department of Probability,
Faculty of Mathematics and Mechanics,
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia*

Abstract. We consider Markov models of multicomponent systems with synchronizing interaction. Under natural regularity assumptions about the message routing graph, they have nice longtime behavior. We are interested in limit probability laws related to the steady state viewed from the center-of-mass coordinate system.

Keywords: stochastic synchronization models, long-time behavior, Markov processes.

1. Introduction

The study of stochastic synchronization models is motivated by many applications in computer science [1,2] and other domains. One of the most interesting problems is the synchronization of local clocks in asynchronous networks [3,4]. A common feature of synchronization models is the use of time-stamped messages. Dynamics of these systems is a superposition of independent random evolutions of components and an event driven interaction resulting from an information exchange between components. Such models are very similar to traditional queueing networks but the synchronizing jump interaction between components also lets to consider them as a special class of interaction particle systems. There are many results on longtime behaviour of symmetric synchronization models [5,6].

A general nonsymmetric Markovian synchronization model was introduced and studied in [7,8]. Consider a network of N nodes and denote by $x_j \in \mathbb{R}^d$ the state of the node j . The dynamics of the network is a stochastic process $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in (\mathbb{R}^d)^N$, $t \in \mathbb{R}_+$. The evolution of $x(t)$ is composed of two parts called respectively a free dynamics and synchronizing jumps. The free dynamics means that between successive epochs of interaction the components $x_j(t)$ evolve independently and their increments follow increments of some \mathbb{R}^d -valued processes $x_j^\circ(t)$. It is assumed that nodes share information about each other by sending and receiving messages. A message flow from node j_1 to node j_2 is Poissonian with rate $\alpha_{j_1 j_2}$. Messages reach their destinations instantly. A message sent at time T from j_1 to j_2 forces the destination node j_2 to adjust its state to the value x_{j_1} : $x_{j_2}(T+0) = x_{j_1}(T)$. These adjustments are interpreted as synchronizing jumps. The initial configuration $x(0)$ is chosen

independently from other sources of randomness. We also assume that the communication graph is strongly connected, i.e., that any pair of nodes can be connected by a directed path composed of arcs (j, k) such that $\alpha_{jk} > 0$ (the *connectivity assumption*).

In [7–9] as well as in the present note we will focus on Lévy-driven synchronization models, i.e., the free dynamics of the j th component is assumed to be a Lévy process $x_j^\circ(t) \in \mathbb{R}^d$ with characteristic exponent $-\eta_j$. So $x(t)$ is a continuous time Markov process. We refer to [9] for the explicit form of its generator.

2. Known results

Here is a short list of selected results proved in [8, 9]. In the center-of-mass coordinate system

$$y_j(t) = x_j(t) - M(t), \quad M(t) := N^{-1} \sum_{j=1}^N x_j(t),$$

there exists a limit in distribution of $y(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$ as $t \rightarrow \infty$. In this sense we observe a stochastic synchronization phenomenon in the long-time behaviour of the model. For non-trivial free dynamics there exists no limit in distribution of $x(t)$ as $t \rightarrow \infty$.

If all LPs $x_j^\circ(t)$ are stable with index β then the center-of-mass $M(t)$ has a simple asymptotic behavior. Rescaling it as $m(t) := M(t)/t^{1/\beta}$ and applying Theorem 2 from [8] we obtain that $m(t)$ converges in distribution, $m(t) \xrightarrow{d} m(\infty)$, moreover, $\psi_{y(t), m(t)}(u, \rho)$, the joint characteristic function (CF) of $y(t)$ and $m(t)$, has the following limit as $t \rightarrow \infty$

$$\forall u \in (\mathbb{R}^d)^N, \rho \in \mathbb{R}^d \quad \psi_{y(t), m(t)}(u, \rho) \rightarrow \psi_{y(\infty)}(u) \psi_{m(\infty)}(\rho).$$

Hence the vectors $y(t)$ and $m(t)$ become asymptotically independent.

Below we are intended to find out properties of the steady state $y(\infty)$ for Lévy-driven synchronization models under additional assumptions on network topology. Some results on limit distributions of $r_{jk}(t) = x_k(t) - x_j(t)$ were presented in [6, 8, 9]. It was shown that the class of limit distributions is rich enough to include, in particular, multivariate asymmetric Laplace distributions [10], Linnik [11] and bilateral matrix-exponential distributions [12].

Now consider a stochastic process $\vec{r}(t) = (r_{jk}(t), j, k = \overline{1, N}, j \neq k)$ with values in $(\mathbb{R}^d)^{(N-1)N}$. Similarly to Theorem 2 in [9] we get that $\vec{r}(t)$ has a limit in law: $\vec{r}(t) \xrightarrow{d} \vec{r}(\infty)$. The aim of the present short note is to obtain new explicit formulae for marginals of $\vec{r}(\infty)$.

For \mathbb{R}^d -vectors $\nu = (\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(d)})$ and $\rho = (\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(d)})$ we denote by $\nu \cdot \rho = \sum_l \nu^{(l)} \rho^{(l)}$ their scalar product. Let i be the imaginary unit, $i^2 = -1$. The limit characteristic functions (CFs)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{r_{jk}(t)}(\nu) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp i\nu \cdot r_{jk}(t)$$

will be denoted by $\varphi_{(jk)}(\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}^d$. We are going to study new synchronization models with special communication graphs.

3. The R_N -model

Consider a network with N identical nodes and the rotationally invariant topology, i.e., $\eta_j = \eta$ and $\alpha_{jk} = \alpha_{k-j}$ ($j \neq k$) where subtraction is taken modulus N . Recall that $-\eta$ is the characteristic exponent of some Lévy process hence $\operatorname{Re} \eta(\nu) \geq 0$ for all $\nu \in \mathbb{R}^d$. Put $a_0 = 0$ and $a_m = \alpha_{-m} + \alpha_m$ for $m \neq 0$. Define $\hat{a}_n := \sum_{m=0}^{N-1} a_m s_n^m$, the discrete Fourier transform of the vector (a_m) , where $s_n = \exp(2\pi i n/N)$.

Theorem 1 *The CFs $\varphi_{(jk)}(\nu)$ have the form $\varphi_{(jk)}(\nu) = H_{k-j}^{(N)}(2 \operatorname{Re} \eta(\nu))$ with functions $H_m^{(N)}(b) = F_m^{(N)}(b)/F_0^{(N)}(b)$, $m = 1, \dots, N-1$, where*

$$F_m^{(N)}(b) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s_n^{-m}}{b + \hat{a}_0 - \hat{a}_n}, \quad F_0^{(N)}(b) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \frac{1}{b + \hat{a}_0 - \hat{a}_{n_1}}.$$

The functions $H_m^{(N)}(b)$ are the Laplace-Stieltjes transforms (LSTs) of some probability distributions $\mu_{N,m}$ supported on \mathbb{R}_+ .

In other words, the theorem states that the laws of $r_{jk}(\infty)$ belong to so-called compound distributions and gives a convenient tool for characterizing the limit CFs $\varphi_{(jk)}(\nu)$.

Sometimes we drop the explicit N -dependence notation of $\varphi_{(jk)}$ and H_m when there is no confusion. It is readily seen that $F_m^{(N)}(b)$, $F_0^{(N)}(b)$ and $H_m(b)$ are rational functions of $b \in \mathbb{C}$ and $\overline{H_k(b)} = H_k(\bar{b})$. Evidently, there are no poles of $H_m(b)$ at points $\hat{a}_n - \hat{a}_0$. The degree of any of the rational functions $H_m(b)$ does not exceed $N-1$. In fact, by using the symmetry property $a_{N-j} = a_j$ it is easy to show that $H_m(b) = H_{N-m}(b)$ and that $\deg H_m \leq \lfloor N/2 \rfloor$. If the number of *distinct* values among the Fourier coefficients $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{\lfloor N/2 \rfloor}$ is *less* than $\lfloor N/2 \rfloor + 1$ then $\deg H_m < \lfloor N/2 \rfloor$. We see also that $\varphi_{(jk)}(\nu)$ are real and so $r_{jk}(\infty)$ have symmetric laws.

The proof of this theorem is longer than the allowed size of this note. The rest of the paper is devoted to examples where the theorem leads to interesting explicit results.

4. Example: the R_2 and R_3 -models

The 2-node network R_2 depends on a single parameter $\alpha_1 > 0$. We have $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $a_1 = 2\alpha_1$, $\hat{a}_0 = -\hat{a}_1 = 2\alpha_1$

$$F_1^{(2)}(b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{b + 4\alpha_1}, \quad F_0^{(2)}(b) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b + 4\alpha_1}, \quad H_1^{(2)}(b) = \frac{2\alpha_1}{b + 2\alpha_1}.$$

Thus $H_1^{(2)}$ is the LST of the exponential law. For the R_3 -model there are two parameters α_1 and α_2 and $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ is a non-degeneracy condition. For $N = 3$ we have $a_1 = a_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ and the answer is essentially the same: $H_1^{(3)}(b) = H_2^{(3)}(b) = (\alpha_1 + \alpha_2)/(b + \alpha_1 + \alpha_2)$.

Taking, for example, $\eta(\nu) = \frac{1}{2}\sigma^2 |\nu|^2 - i\nu \cdot \nu$, $c|\nu|$ or $(c|\nu|)^\beta$, where $\beta \in (0, 2)$, $c > 0$, (i.e., the common free dynamics of nodes $x^\circ(t)$ is chosen as the d -dimensional Brownian motion with constant drift $v \in \mathbb{R}^d$, the Cauchy process or the β -stable Lévy process) we obtain as distributions of $r_{jk}(\infty)$ the multidimensional asymmetric Laplace probability law [10] or distributions from the Linnik class.

5. Example: the R_4 -model

Now $a_1 = a_3 = \alpha_1 + \alpha_3$, $a_2 = 2\alpha_2$. There are two *simple cases*.

1) If $a_k = a$ for all $k = 1, 2, 3$ then $H_m^{(4)}(b) = \frac{a}{b+a}$.

2) The assumption $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ is equivalent to $a_1 = a_3 = 0$. The connectivity assumption is violated. The network is splitted into two parts $\{1, 3\}$ and $\{2, 4\}$ which are evolving independently.

In the *general case* straightforward calculations show that there exist $q_2 > q_1 > 0$ such that for all $k = 1, 2, 3$

$$H_k^{(4)}(b) = g_1^{(4,k)} \frac{q_1}{b + q_1} + g_2^{(4,k)} \frac{q_2}{b + q_2}$$

where reals $g_1^{(4,k)}$, $g_2^{(4,k)}$ are not necessarily positive and satisfy $g_1^{(4,k)} + g_2^{(4,k)} = 1$. Thus $H_k^{(4)}(b)$ are linear combinations of LSTs of two exponential distributions.

For the general R_5 -model the distributions $\mu_{5,m}$ are again mixtures of two exponential laws. Networks R_N with $N \geq 6$ provide much more intriguing structure of the probability laws $\mu_{N,m}$. We will devote to them a separate publication.

References

1. *Fujimoto R.* Parallel and Distributed Simulation Systems. — Wiley, 2000.

2. *Manita A., Simonot F.* Clustering in stochastic asynchronous algorithms for distributed simulations. In *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications*. // Springer Lecture Notes in Computer Science. — 2005. — Vol. 3777. — P. 26–37.
3. *Sundaraman B., Buy U., Kshemkalyani A.D.* Clock synchronization for wireless sensor networks: a survey. // *Ad Hoc Networks*. — 2005. — Vol. 3. — P. 281–323.
4. *Manita A.* Clock Synchronization in Symmetric Stochastic Networks. // *Queueing Systems*. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 149–180.
5. *Manita A.* Brownian Particles Interacting via Synchronizations. // *Communications in Statistics — Theory and Methods*. — 2011. — Vol. 40, no. 19–20. — P. 3440–3451.
6. *Manita A.* Intrinsic Space Scales for Multidimensional Stochastic Synchronization Models. // In *New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis*. — ISAST, 2014. — P. 271–282.
7. *Manita A.* Intrinsic scales for high-dimensional Lévy-driven models with non-Markovian synchronizing updates. // *arXiv:1409.2919 [math.PR]*. — 2014. — P. 1–50.
8. *Manita A.* On Behavior of Stochastic Synchronization Models. // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2016. — Vol. 681, no. 1. — P. 012024.
9. *Manita A.* Probabilistic issues in the node synchronization problem for large distributed systems. // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2017. — Vol. 38, no. 5. — P. 948–953.
10. *Kotz S., Kozubowski T., Podgorski K.* The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit With Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance. — Birkhäuser Boston, 2001.
11. *Linnik Yu.* Linear forms and statistical criteria. // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 1953. — Vol. 5. — P. 207–290.
12. *Bladt M., Esparza L.J.R., Nielsen B.F.* Bilateral Matrix-Exponential Distributions. // In *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models*. — Springer, 2013. — P. 41–56.

UDC 519.248: 62–192

Agreement algorithms for synchronization of clocks in nodes of stochastic networks

L. Manita*, A. Manita†

* *National Research University Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Russia*

† *Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mathematics and Mechanics, Russia*

Abstract. We propose deterministic and stochastic models of clock synchronization in nodes of large distributed network locally coupled with a reliable external exact time server.

Keywords: load balance, design of reliable networks, steady state.

1. Introduction

We study a special class of multi-dimensional stochastic processes motivated by the problem of synchronization of local clocks in asynchronous networks. Proposed models are based on network consensus algorithms. Such algorithms have a variety of applications in computer science and social network dynamics [1–5]. Stochastic models, in the presence of random noise in nodes, have much in common with Markovian queueing networks or with probabilistic models of communication networks. We prove that values of the node clocks converge in distribution and find some properties of the steady state.

2. Clock synchronization models

Network. Let indices $j \in \{1, \dots, N\} := \mathcal{N}$ mark nodes of a network. The nodes communicate in a manner to be precised below. Possibility of direct communications between pairs of nodes is described by an $N \times N$ -matrix $W = (w_{jk})_{j,k \in \mathcal{N}}$ with nonnegative off-diagonal entries. The meaning of the entry w_{jk} , $j \neq k$, is the measure of importance of an opinion (or a state) of node k for node j . Consider a digraph $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ with the set of vertices \mathcal{N} and the set \mathcal{E} of directed edges (m_1, m_2) such that $w_{m_1 m_2} > 0$, $m_1 \neq m_2$. Denote by $\mathcal{O}_j := \{k : w_{jk} > 0\}$ the set of neighbours of a node j in the graph \mathcal{G} . If $|\mathcal{O}_j| \ll |\mathcal{N}|$ for all j then the network is called distributed. Similarly, any algorithm that uses only local exchange of information between neighbouring nodes is called distributed.

In the sequel elements of \mathcal{N} will be called client nodes. There is also a stand-alone time server formally not belonging to the network but being referred in the sequel as the node 0. The system is observed at discrete times $t = 0, 1, \dots$. The variable t will also count steps of distributed algorithms. For this reason we introduce notation $\mathbb{T} := \{1, 2, \dots\}$.

Clocks. Any client node $j \in \mathcal{N}$ is equipped with an imperfect clock which current value is $\tau_j \in \mathbb{R}$. The time server (the node 0) has a perfect clock providing exact time $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Let $v > 0$ be the rate of the clocks with respect to t . Evolutions of isolated clocks are

$$\tau_0(t) = \tau_0(t-1) + v, \quad \tau_j^\circ(t) = \tau_j^\circ(t-1) + v + \delta_j(t), \quad j \in \mathcal{N},$$

where $\delta(t) = (\delta_j(t), j = 1, \dots, N) \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{T}$, are i.i.d. random vectors representing random noise related to imperfect clocks of client nodes. We assume that $\mathbf{E} \delta_j(t) = 0$. Let $B = \text{Var} \delta(t) = (\text{cov}(\delta_j(t), \delta_k(t)))_{j,k \in \mathcal{N}}$ denote the corresponding covariance matrix. Since rates of clients are equal to the server rate v the above system of clocks is drift-free.

Algorithm for internal synchronization of the network. To synchronize clocks in nodes of the distributed system one can run a linear iterating algorithm (LIA) similar to that is used for the *network consensus* problem (NC problem). Namely, for any $j \in \mathcal{N}$

$$\tau_j(t) = \tau_j(t-1) + v + \delta_j(t) + \sum_{k \neq j} w_{jk} (\tau_k(t-1) - \tau_j(t-1)). \quad (1)$$

The sum in (1) is in fact taken over $k \in \mathcal{O}_j$ and so (1) can be regarded as distributed algorithm. The last summand in (1) is a correction made by the node j by using information on local time values $\tau_k(t-1)$ obtained from the neighbourhood \mathcal{O}_j . It is convenient to put $w_{jj} = 1 - \sum_{k \neq j} w_{jk}$ and

to rewrite equations in matrix form $\boldsymbol{\tau}(t) = W\boldsymbol{\tau}(t-1) + v\mathbf{1} + \boldsymbol{\delta}(t)$ where $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{1}$ and $\boldsymbol{\delta}$ are column vectors of length N . In the study of iterations (1) the behavior of powers W^t as $t \rightarrow \infty$ plays a crucial role. While it is not necessary for general LIAs, it is natural in the context of NC problem to assume that w_{jj} are *all nonnegative*. We will adopt this assumption throughout the rest of the paper. Thus the matrix W is stochastic. Hence the Markov chain theory as well as the Perron-Frobenius theory are very useful here. Recall that a matrix A is called *primitive*¹ if there exists $t_0 \in \mathbb{N}$ such that $A^{t_0} > 0$, i.e., all entries of A^{t_0} are positive.

Theorem 1. *Let the matrix W be primitive, $\boldsymbol{\tau}(t)$ be evolving according to the agreement algorithm (1) and j_0 and k_0 be a pair of nodes. Then*

i) *in the deterministic case ($B = 0$)*

$$\tau_{j_0}(t) - \tau_{k_0}(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \quad (2)$$

ii) *for the stochastic model ($B \neq 0$)*

$$\limsup_t \mathbf{E} |\tau_{j_0}(t) - \tau_{k_0}(t)|^2 \leq C(B, W) \quad (3)$$

¹This corresponds to the notion of ergodic matrix in the Markov chain theory.

where $C(B, W) > 0$ does not depend on $\tau(0)$ and vanishes as $B \rightarrow 0$.

Clearly, the results (2) and (3) mean that after a large number t of steps in (1) all clocks τ_j show, in some sense, a common time. Differences of clock values at different nodes of the distributed network vanish as in (2) or become satisfactory small as in (3). After introducing a new vector $\tau'(t) = \tau(t) - vt\mathbf{1}$ the iterating scheme (1) turns into

$$\tau'(t) = W\tau'(t - 1) + \delta(t) \tag{4}$$

which is a stochastic version of the network consensus algorithm [1, 3, 6, 7]. Now the both statements of Theorem 1 easily follows from already known results on the NC problem. The item i) is just reformulation of the main result from [1] and the item ii) can be extracted from [6]. The use of the word *consensus* here is related to the convergence $\tau'(t) \rightarrow c\mathbf{1}$ taking place under assumptions $B = 0$ and primitivity of W . For self-evident reasons, $\{c\mathbf{1}, c \in \mathbb{R}\}$ is called a consensus subspace of \mathbb{R}^n .

To check primitivity of W for the network models we need sufficient conditions, which can be easily verified.

Assumption WI: The matrix W is irreducible or, equivalently, the digraph \mathcal{G} is strongly connected (see [8, Sect. 6.2]).

Assumption WA: There exists $j_0 \in \mathcal{N}$ such that $w_{j_0j_0} > 0$.

It is well known that validity of WI+WA implies the primitivity of W . The Perron theorem states that $\lambda_1 = 1$ is a simple eigenvalue of any primitive stochastic matrix W . Moreover, it states that $\lim_t W^t = \mathbf{1}\pi^W$.

Here a row π^W is the left eigenvector of W corresponding to $\lambda_1 = 1$ and normalized as $\pi^W \mathbf{1} = 1$. We know from the Perron theorem that π^W has all components positive. Hence $\mathbf{1}\pi^W$ is a positive $N \times N$ -matrix of rank one. Finally, we conclude that for any column vector $\rho \in \mathbb{R}^N$

$$W^t \rho \rightarrow A(\rho)\mathbf{1} \quad (t \rightarrow \infty) \tag{5}$$

where $A(\rho) := \pi^W \rho = \sum_{j=1}^N \pi_j^W \rho_j$.

Deviation from the time server. Nevertheless, in the both situations i) and ii) of Theorem 1 the client clocks are far from the *accurate time* provided by the time server 0. To see this consider deviations $x_j = \tau_j - \tau_0$. The vector $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ evolves in the same way as (4),

$$\mathbf{x}(t) = W\mathbf{x}(t - 1) + \delta(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

so all above arguments are applicable. For example, applying (5) to the deterministic case $\delta = 0$ we get $\tau_j(t) - \tau_0(t) \rightarrow A(\tau(0)) - \tau_0(0)$ as $t \rightarrow \infty$. Note that initial values $\tau(0)$ of the clients clocks are unknown.

3. Interaction with the time server

To solve a problem of synchronization of client clocks $\tau_j(t)$ with the accurate time $\tau_0(t)$ we propose a *modification* of the model (1). The *first* novelty is that the time server 0 can address messages to some (but not to all) client nodes. The schedule of this messaging will be precised later. A message $m^{0 \rightarrow j'}$ sent on some step $t = t'$ from 0 to j' contains the value $\tau_0(t')$. It is assumed that $m^{0 \rightarrow j'}$ instantly reaches the destination node. After receiving this message the node j' immediately adjusts its clock to the value recorded in $m^{0 \rightarrow j'}$: $\tau_{j'}(t') = \tau_0(t')$. This is the usual message passing mechanism with zero delays. If on step t there is no message from 0 to j then the clock value $\tau_j(t)$ is adjusted according to the j th row of (1). The *second* novelty reflects the assumption that a node just received a message from the time server *is aware* that its newly adjusted clock value is more precious than ones of its neighbours. If on step t_1 a client clock τ_{j_1} was set to the value $\tau_0(t_1)$ then during the time interval $t_1 + 1, \dots, t_1 + \Delta_{j_1}$ the node j_1 decides to ignore opinions of its neighbours. Denote by $T^{0,j} = \left\{ t_n^{(j)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ the sequence of steps t when the node j receives messages from the node 0. Hence to define the modified model one need to specify a set of message flows $T := (T^{0,j}, j \in \mathcal{N})$ and a set $\Delta := (\Delta_j, j \in \mathcal{N})$. Consider $\mathcal{T} = \{j : T^{0,j} \neq \emptyset\}$, the set of nodes receiving messages from the time server node 0. So $\mathcal{T} \subset \mathcal{N}$ and the most interesting case is that where the set \mathcal{T} is only a small part the whole distributed network.

The evolution of $x_j = \tau_j - \tau_0$ can be written as

$$\mathbf{x}(s) = W(s) \mathbf{x}(s-1) + D(s) \boldsymbol{\delta}(s), \quad s \in \mathbb{T}. \quad (6)$$

Here $W(s) = W(s; T, \Delta)$ is a time-dependent $N \times N$ -matrix with entries $w_{jk}(s)$ such that $w_{jk}(s) \in \{0, w_{jk}, 1\}$. The concrete value of $w_{jk}(s)$ is uniquely determined by the above description of the algorithm. Notation $D(s) = D(s; T)$ stands for the diagonal matrix of 0s and 1s, $D(s) := \text{diag}(\mathbb{I}_{\{s \notin T^{0,j}\}}, j \in \mathcal{N})$, indicating that the random noise term $\delta_j(s)$ are not added to $\tau_j(s)$ on the steps $s = t_n^{(j)}$. From the general point of view the model (6) is a special subclass of distributed LIAs with time-dependent topologies and the time-nonhomogeneous random noise [2].

Scheduling sequence. Let the set Δ be fixed. For any $s \in \mathbb{T}$ define $\mathcal{R}(s) := \{j \mid T^{0,j} \ni s\} \subset \mathcal{N}$, the subset of client nodes receiving messages from the time server node 0 on the step s . Evidently, $T = (T^{0,j}, j \in \mathcal{N})$ and $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(s), s \in \mathbb{T}\}$ uniquely determine each other. From the viewpoint of the node 0 the set \mathcal{R} defines a prescribed sequence of recipients $\mathcal{R}(s)$ to whom it should consequently send messages.

Assumption SP: The set \mathcal{T} (and hence \mathcal{R}) is not empty. The scheduling sequence \mathcal{R} is periodic with period d , i.e., $\mathcal{R}(s+d) = \mathcal{R}(s)$, $s \in \mathbb{T}$.

If \mathcal{R} is periodic with period d , then the sequence $\{D(s)\}_{s \in \mathbb{T}}$ is periodic too. Moreover, $\{W(s)\}_{s \geq s_0}$ is d -periodic for sufficiently large $s_0 = s_0(\mathcal{R}, \Delta)$.

Theorem 2. Consider the deterministic model $\mathbf{x}(s) = W(s)\mathbf{x}(s-1)$, $s \in \mathbb{T}$, with periodic scheduling (Assumption SP). Then under Assumptions WI and WA all clients synchronize with the node 0

$$x_j(s) = \tau_j(s) - \tau_0(s) \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty).$$

This theorem is similar to results on the NC problem in the presence of leaders [2, 5]. Now let $\mathbf{x}(s)$ be the stochastic model (6) started from nonrandom $\mathbf{x}(0)$. In Theorems 3 and 4 we make the additional assumption that W is double stochastic. Consider $\mathbf{m}(s) = \mathbf{E} \mathbf{x}(s)$ and the covariance matrix $\text{Var} \mathbf{x}(s)$. Let $\|A\|_2$ denote the spectral norm of a matrix A (see [8]).

Theorem 3. The mean vector $\mathbf{m}(s)$ follows the equation for the deterministic model studied in Theorem 2, in particular, $\mathbf{m}(s) - \tau_0(s)\mathbf{1} \rightarrow 0$. The covariance matrix is uniformly bounded, i.e., $\sup_{s \in \mathbb{T}} \|\text{Var} \mathbf{x}(s)\|_2 \leq C \|B\|_2$.

Theorem 4. For any $i \in \{0, \dots, d-1\}$ the subsequence $\{\mathbf{x}(nd+i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ has a limit in distribution as $n \rightarrow \infty$. These limit distributions can be characterized explicitly. In general, they differ for different i .

References

1. DeGroot M. H. Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. — 1974. — Vol. 69, no. 345. — P. 118–121.
2. Jadbabaie A., Lin J., Morse A. S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Transactions on automatic control. — 2003. — Vol. 48, no. 6. — P. 988–1001.
3. Olshevsky A., Tsitsiklis J. N. Convergence speed in distributed consensus and averaging // SIAM Review. — 2011. — Vol. 53, — P. 747–772.
4. Estrada E., Vargas-Estrada E. How peer pressure shapes consensus, leadership, and innovations in social groups // Scientific reports. — 2013. — Vol. 3.
5. Lin F., Fardad M., Jovanovic M. R. Algorithms for leader selection in stochastically forced consensus networks // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2014. — Vol. 59, no. 7. — P. 1789–1802.
6. Cybenko G. Dynamic load balancing for distributed memory multiprocessors. // J. Parallel Distrib. Comput. — 1989. — Vol. 7, no. 2. — P. 279–301.
7. Xiao L., Boyd S. P., Kim S.-J. Distributed average consensus with least-mean-square deviation. // J. Parallel Distrib. Comput. — 2007. — Vol. 67, no. 1. — P. 33–46.
8. Horn R. A., Johnson C. R. Matrix Analysis. — Cambridge University Press, 1986.

Размерность множества инвариантных конечно-аддитивных мер цепей Маркова в произвольном фазовом пространстве и эргодические следствия

А. И. Жданок*[†]

** Кафедра математического анализа
и методики преподавания математики,
Тувинский государственный университет,
ул. Ленина, д. 36, г. Кызыл, Россия, 667000*

*† Лаборатория математического моделирования,
Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов
СО РАН,
ул. Интернациональная, д. 117а, г. Кызыл, Россия, 667007*

Аннотация. В работе рассматриваются общие цепи Маркова в произвольном фазовом пространстве. Марковские операторы продолжаются с пространства счётно-аддитивных мер на пространство конечно-аддитивных мер. В работах автора ранее была доказана теорема о том, что, если все инвариантные конечно-аддитивные меры цепи Маркова счётно-аддитивны, то их подпространство конечномерно и цепь Маркова удовлетворяет условиям квазикompактности Дуба-Деблина. Было доказано частичное обращение этой теоремы при размерности «единица». В настоящей работе приводится обращение данного утверждения при любой конечной размерности, но при некоторых дополнительных условиях. Приводятся примеры.

Ключевые слова: общие цепи Маркова, произвольное фазовое пространство, инвариантные конечно-аддитивные меры, условия квази-компактности.

1. Введение

Приведем используемые известные обозначения и сведения.

Пусть X – произвольное бесконечное множество и Σ – сигма-алгебра его подмножеств, содержащая все одноточечные подмножества из X . Обозначим $B(X, \Sigma)$ – банахово пространство ограниченных Σ -измеримых функций $f : X \rightarrow R$ с суп-нормой. Рассматриваются также банаховы пространства ограниченных мер $\mu : \Sigma \rightarrow R$, с нормой, равной полной вариации: $ba(X, \Sigma)$ – пространство конечно-аддитивных мер; $ca(X, \Sigma)$ – пространство счётно-аддитивных мер.

Конечно-аддитивная неотрицательная мера μ называется чисто конечно-аддитивной, если любая счётно-аддитивная мера λ , удовлетворяющая условию $0 \leq \lambda \leq \mu$, тождественно равна нулю.

Обозначим множества мер $S_{ba} = \{\mu \in ba(X, \Sigma) : \mu \geq 0, \|\mu\| = 1\}$, $S_{ca} = \{\mu \in ca(X, \Sigma) : \mu \geq 0, \|\mu\| = 1\}$. Все меры из этих множеств будем называть вероятностными.

Цепи Маркова (ЦМ) на пространстве (X, Σ) задаются своей переходной функцией (вероятностью) $p(x, E)$, $x \in X$, $E \in \Sigma$, при условиях:

- 1) $0 \leq p(x, E) \leq 1$, $p(x, X) = 1$;
- 2) $p(\cdot, E) \in B(X, \Sigma)$, $\forall E \in \Sigma$;
- 3) $p(x, \cdot) \in ca(X, \Sigma)$, $\forall x \in X$.

Подчеркнем, что переходная функция у нас счетно-аддитивна по второму аргументу, т.е. мы рассматриваем классические ЦМ.

Переходная функция порождает два марковских линейных ограниченных положительных операторов:

$$T : B(X, \Sigma) \rightarrow B(X, \Sigma), Tf(x) = \int_X f(y)p(x, dy), \forall f \in B(X, \Sigma),$$

$$A : ca(X, \Sigma) \rightarrow ca(X, \Sigma), A\mu(E) = \int_X p(x, E)\mu(dx), \forall \mu \in ca(X, \Sigma).$$

Пусть начальная мера $\mu_0 \in S_{ca}$. Тогда итерационная последовательность счетно-аддитивных мер $\mu_n = A\mu_{n-1}$, $n \in N$, обычно отождествляется с цепью Маркова.

Топологически сопряженным к пространству $B(X, \Sigma)$ является (изоморфно) пространство конечно-аддитивных мер: $B^*(X, \Sigma) = ba(X, \Sigma)$. При этом топологически сопряженным к оператору T служит оператор $T^* : ba(X, \Sigma) \rightarrow ba(X, \Sigma)$, который является продолжением оператора A на все пространство $ba(X, \Sigma)$ с сохранением его аналитического вида. Мы будем обозначать оператор T^* как A .

В такой постановке естественно допустить к рассмотрению и марковские последовательности конечно-аддитивных мер: $\mu_0 \in S_{ba}$, $\mu_n = A\mu_{n-1} \in S_{ba}$, $n \in N$, сохраняя счетную аддитивность $p(x, \cdot)$.

Обозначим множества инвариантных вероятностных мер ЦМ: $\Delta_{ba} = \{\mu \in S_{ba} : \mu = A\mu\}$, $\Delta_{ca} = \{\mu \in S_{ca} : \mu = A\mu\}$, $\Delta_{ca} \subset \Delta_{ba}$. Известно, что для любой ЦМ $\Delta_{ba} \neq \emptyset$, но возможно, $\Delta_{ca} = \emptyset$.

2. Инвариантные меры и квазикомпактность

В исследованиях автора [1],[2] выяснилось, что размерность и состав множества инвариантных конечно-аддитивных мер марковского оператора A тесным образом связан с одним из центральных вопросов эргодической теории ЦМ, а именно, с известными условиями квазикомпактности марковских операторов в форме Дуба-Деблина (D). Если эти условия выполнены, т.е. если оператор A квазикомпактен, то ЦМ имеет конечное число инвариантных счетно-аддитивных мер и эргодические средние мер μ_n сходятся в некотором смысле к ним в метрической топологии.

В работе автора [2] была доказана следующая Теорема 12.2. *Для произвольной ЦМ условие Дуба-Деблина (D) (в его некоторой технической модификации) эквивалентно условию (*)*:

$$\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma),$$

что означает, что все инвариантные конечно-аддитивные меры ЦМ являются счетно-аддитивными, или, другими словами, ЦМ не имеет инвариантных чисто конечно-аддитивных мер.

Из Теоремы 12.2 [2] и свойств квазикompактной ЦМ сразу вытекает следующее утверждение: Теорема 8.2 [1]. Для произвольной ЦМ, если выполнено условие (*), т.е. $\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma)$, то $\dim \Delta_{ba} = n < \infty$.

Там же было доказано обращение этой Теоремы для $n = 1$ (в технике слабых топологий): Теорема 8.3 [1]. Для произвольной ЦМ, если $\dim \Delta_{ba} = 1$, то $\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma)$, т.е. эта мера счетно-аддитивна.

В настоящей работе мы приводим обращение Теоремы 8.2 [1] уже для произвольной размерности $n \in \mathbb{N}$, но при дополнительных условиях (α):

Пусть $\mu \in \Delta_{ba}$, и дано множество $K_\mu \in \Sigma$ такое, что $\mu(K_\mu) = 1$. Существует множество $K \subset K_\mu$, $K \in \Sigma$ такое, что $\mu(K) = 1$ и переходная функция $p(x, E)$ стохастически замкнута на K , т.е. $p(x, K) = 1$ для любого $x \in K$.

Теорема 1. Пусть $\dim \Delta_{ba} = n < \infty$, $\Delta_{ba} = co\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$. Пусть все базисные меры μ_i из Δ_{ba} попарно сингулярны, и для каждой из них выполнено условие (α).

Тогда $\Delta_{ba} \subset ca(X, \Sigma)$, т.е. все инвариантные конечно-аддитивные меры цепи Маркова являются счетно-аддитивными.

Из-за ограниченного объема статьи доказательство опускаем.

Следствие. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда для ЦМ выполнены условия Дуба-Дебмина (D), наше условие (*), у неё нет инвариантных чисто конечно-аддитивных мер, ЦМ является квазикompактной, и обладает всеми соответствующими эргодическими свойствами.

В книге Ревюза [3] (Глава 6, §3) доказываются близкие к нашим теоремам утверждения для харрисовских ЦМ на сепарабельном (X, Σ) . У нас подобных ограничений нет, результаты носят более общий характер и содержат более сильные утверждения.

Проблемой существования и свойств инвариантных конечно-аддитивных мер для ЦМ в различных фазовых пространствах занимался еще ряд авторов, прежде всего - Šidak и Foguel (подробнее об этом см. [1],[2]).

3. Частные примеры

Конечно-аддитивные меры в теории цепей Маркова возникают не только при общих фазовых пространствах. Они могут дать кое-что новое даже для “почти” феллеровских ЦМ на компакте. Ниже мы рассматриваем три ЦМ_{1,2,3}, заданные на отрезке $[0, 1]$ с обычной борелевской сигма-алгеброй.

Пример 1. Для любого $x \in (0, 1)$ у ЦМ1 возможно два перехода - в точку x^2 с вероятностью x , и в точку 0 с вероятностью $1 - x$. Точки 0 и 1 с вероятностями 1 переходят в себя, т.е. являются поглощающими. Такая ЦМ1 феллеровская, и имеет две инвариантные счетно-аддитивные меры Дирака δ_0 и δ_1 в точках 0 и 1. Она имеет также семейство мощности не менее континуума попарно сингулярных (и линейно независимых) инвариантных чисто конечно-аддитивных мер η , удовлетворяющих условию $\eta((\varepsilon, 1)) = 1$ для всех $\varepsilon \in (0, 1)$ (доказательство опускаем).

Условия Теоремы 1 не выполнены и ЦМ1 не является квазикомпактной. Однако, при любом начальном $x_0 \in [0, 1)$ порождаемая им марковская последовательность мер μ_n сильно метрически сходится к инвариантной мере δ_0 , но не равномерно по x_0 .

Пример 2. В предыдущем примере меняем местами вероятности переходов при $x \rightarrow x^2$ и $x \rightarrow 0$. Для такой ЦМ2 феллеровость нарушается лишь в точке $x = 1$. У нее остаются две инвариантные меры δ_0 и δ_1 , исчезает семейство инвариантных чисто конечно-аддитивных мер “около единицы”, но появляется новое бесконечное семейство таких инвариантных мер “около нуля” η с условием $\eta((0, \varepsilon)) = 1$ для всех $\varepsilon \in (0, 1)$ (доказательство опускаем).

Условия Теоремы 1 также не выполнены и ЦМ2 не является квазикомпактной. При этом, при любом $x_0 \in (0, 1)$ последовательность μ_n лишь \mathfrak{Z}_C - слабо сходится к мере δ_0 , и не сходится сильно.

Пример 3. Из двух ЦМ1 и 2 Примеров 1 и 2 скомбинируем новую ЦМ3 с правилами переходов на $[0, 1/2]$ такими же, как у ЦМ1 из Примера 1, а на $(1/2, 1]$ с такими же, как у ЦМ2 из Примера 2. Для новой ЦМ3 феллеровость нарушается также лишь в точке $x = 1$.

У новой ЦМ3 остаются две инвариантные счетно-аддитивные меры δ_0 и δ_1 , и уже совсем отсутствуют инвариантные чисто конечно-аддитивные меры (доказательство опускаем).

Условия Теоремы 1 (в т.ч. условия (α)) выполнены, обе инвариантные меры счетно-аддитивны, и, следовательно, ЦМ3 квазикомпактна. Выполнены также аналитические условия Дуба-Деблина (D), например, с мерой $\varphi = 0,5 \cdot \delta_0 + 0,5 \cdot \delta_1$, $\varepsilon = 0,25$ и $k = 1$. При любом начальном $x_0 \in [0, 1)$ марковская последовательность мер μ_n сильно метрически и экспоненциально быстро сходится к инвариантной мере δ_0 равномерно по $x_0 \in [0, 1)$. При $x_0 = 1$ последовательность $\mu_n \equiv \delta_1$ также сильно “сходится” ко второй инвариантной мере δ_1 . Отметим, что инвариантная мера δ_0 устойчива (притягивающая), а инвариантная мера δ_1 неустойчивая (отталкивающая).

В Примерах 1 и 2 такой сходимости μ_n к δ_0 препятствовали мощные буферы из инвариантных чисто конечно-аддитивных мер, прилипших в \mathfrak{Z}_C -топологии к инвариантным счетно-аддитивным мерам δ_1 и δ_0 соответственно.

Доказательства некоторых из свойств ЦМ из Примеров 1,2,3 не так уж просты и опираются на ряд теорем из работ автора [1] и [2].

4. Заключение

В работе представлен новый результат по теории общих цепей Маркова, продолженных на пространство конечно-аддитивных мер. Полученный факт открывает новые возможности по дальнейшим исследованиям в данном направлении.

Литература

1. *Zhdanok A.I.* Finitely additive measures in the ergodic theory of Markov chains. I // *Siberian Advances in Mathematics*. — 2003. — Vol.13, no 1. — P. 87–125.
2. *Zhdanok A.I.* Finitely additive measures in the ergodic theory of Markov chains. II // *Siberian Advances in Mathematics*. — 2003. — Vol.13, no 2. — P. 108–125.
3. *Revuz D.* *Markov Chains*. — Amsterdam, Oxford. North Holland, Math. Libr., 1984.

UDC 519.218.84/517.987.1

Dimension of the set of invariant finite additive measures of Markov chains in an arbitrary phase space and ergodic consequences

A.I. Zhdanok*†

* *Department of Mathematical analysis and Methods of teaching mathematics,
Tuvan State University,
Lenin str. 36, Kyzyl, 667000, Russia*

† *Laboratory of Mathematical modeling,
Tuva Institute of complex examination of natural resources SB RAS,
International str. 117a, Kyzyl, 667007, Russia*

Abstract: The paper considers general Markov chains in an arbitrary phase space. Markov operators extend from the traditional space of countably additive measures to the space of finitely additive measures. The author has previously proved a theorem that if all invariant finite additive measures of a Markov chain are countably additive, then their subspace is finite-dimensional and the Markov chain satisfies the Doob-Doebelin quasi-compactness conditions. A partial inversion of this theorem was proved with the dimension “one”. In this paper we prove the inversion of this assertion for any finite dimensionality, but under certain additional conditions. Examples are given.

Keywords: general Markov chains, an arbitrary phase space, invariant finitely additive measures, conditions for quasi-compactness.

Limit theorems for Additive Functionals of Semi-Markov Processes

A. Oprisan*

* *Department of Mathematics and Statistics,
Canisius College,
Buffalo NY, USA*

Abstract. We consider a class of additive functionals of ergodic semi-Markov processes and their associated Markov renewal processes that have a martingale decomposition representation. We prove an invariance principle and show that the corresponding empirical processes converge almost surely to the Wiener process (almost sure functional central limit theorem).

Keywords: additive functionals, almost sure central limit theorem, invariance principle, Markov process, Markov renewal process, semi-Markov process.

1. Introduction

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ be a complete probability space, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ the standard right-continuous filtration, (E, \mathcal{E}) a complete separable metric space and $Q(x, A \times \Gamma)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $\Gamma \in \mathcal{B}_+$ a semi-Markov kernel on $(E \times \mathbb{R}_+, \mathcal{E} \times \mathcal{B}_+)$ (\mathcal{B}_+ is the Borel σ -algebra of \mathbb{R}_+). Define a time-homogeneous semi-Markov process $\{X(t) : t \geq 0\}$ with semi-Markov kernel Q and with values in (E, \mathcal{E}) as follows. Given a jump-type Markov process defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and with values in (E, \mathcal{E}) and $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$ the jump times, then one defines a discrete-time Markov chain $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ by $X_n = X(\tau_n)$ having transition probability kernel $P(x, dy) := Q(x, dy \times [0, \infty))$. Given a probability measure μ on (E, \mathcal{E}) , define the probability measures \mathbb{P}_μ by

$$\mathbb{P}_\mu(A) = \mu \mathbb{P}(A) = \int_E \mu(dx) p(x, A), \quad x \in E, A \in \mathcal{F},$$

and the transition probability operator P ,

$$P\varphi(x) := \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) | X_n = x] = \int_E p(x, dy) \varphi(y).$$

Let P^n be the n -step transition operator corresponding to the n -step transition probability $p^n(x, A)$. The stochastic process $\{(X_n, \tau_n), n \geq 0\}$ is called the embedded Markov renewal process with renewal times τ_n and for any $n \geq 0$, $A \in \mathcal{E}$, and $\Gamma \in \mathcal{B}_+$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \in \Gamma | X_n = x) = Q(x, A \times \Gamma)$$

Let $N(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ be the point process that counts the jumps of X in the time interval $(0, t]$. The semi-Markov process $\{X_t : t \geq 0\}$ is defined by setting $X_t = X_{N(t)}$. Denote $\theta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, $n \geq 1$ the inter-jumps times. The random variable θ_n is also called the sojourn time in the state X_n and given $\{X_n, n \geq 0\}$ the random variables $\{\theta_n, n \geq 0\}$ are mutually independent. Denote $F_x(t) = \mathbb{P}(\theta_{n+1} \leq t | X_n = x) = Q(x, E \times [0, t])$ the sojourn distribution in the state $x \in E$ and $\lambda(x, t)$ its hazard rate function

$$F_x(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda(x, u) du\right\}.$$

Let's define the mean sojourn time by

$$\tilde{m} := \int_E \nu(dx)m(x) < \infty, \text{ where } m(x) := \int_0^\infty \bar{F}_x(t)dt, \bar{F}_x(t) = 1 - F_x(t).$$

The two-component process $\{(X_n, \theta_{n+1}), n \geq 0\}$ taking values in $E \times [0, \infty)$ is a Markov process, also called Markov renewal process and its transition probabilities are given in terms of the semi-Markov kernel

$$Q(x, A \times \Gamma) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A, \theta_{n+2} \in \Gamma | X_n = x).$$

In this paper we assume that the embedded Markov chain of the semi-Markov process satisfies the following assumptions:

- A1. The semi-Markov process X is regular, i.e. $(\forall) x \in E, (\forall) t \geq 0, \mathbb{P}_x(N(t) < \infty) = 1$;
- A2. The Markov chain $\{X_n, n \geq 0\}$ is Harris ergodic with stationary distribution ν , i.e.

$$\nu(A) = \int_E \nu(dx)p(x, A);$$

- A3. The mean sojourn time in a state $x \in E$ is uniformly bounded;
- A4. The family of sojourn times $\{\theta_x, x \in E\}$ is uniformly integrable, i.e.

$$\sup_{x \in E} \int_N^\infty \bar{F}_x(t) dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{and} \quad \sup_{x \in E} \int_N^\infty t \bar{F}_x(t) dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

2. Main section

Asymptotic results for additive functionals of semi-Markov processes including functional central limit theorems have been studied by many authors. For the discrete space state case we refer to [2] for a functional

central limit theorem. In a general state space context we mention [4], where a functional central limit theorem for additive functionals of semi-Markov processes on a general state space is considered but the reward function f is bounded. Note that for additive functionals of Markov processes, an important result is due to R.N. Bhattacharya [1] and in this paper we want to generalize it to semi-Markovian case.

Let $\{X_t, t \geq 0\}$ be a semi-Markov process with stationary probability measure π and $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a Borel function. Define the additive functional by

$$W_t := \int_0^t f(X_s) ds$$

Then

$$W_t = \sum_{k=1}^{N(t)} f(X_{k-1})\theta_k + (t - \tau_{N(t)})f(X_{N(t)}).$$

Let $\mathcal{D}([0, \infty), E)$ be the space of càdlàg functions $\{f : [0, \infty) \rightarrow E\}$ and let $\{\mathbf{W}(t), t \geq 0\}$ be standard Wiener process on $\mathcal{D}([0, \infty))$.

Lemma 2.1 *Assume that $\{X_t, t \geq 0\}$ is an ergodic semi-Markov process with ergodic distribution π and $\{X_n, n \geq 0\}$ is its embedding Markov chain with stationary distribution ν . Let $f \in L^2(\pi)$ be such that*

- (i) $\int_E f d\pi = 0$,
- (ii) *there exists $0 < C < \infty$ such that $d\mu P^k \leq C d\nu$ for any $k \in \mathbb{N}$ and $\int_{\{x: f^2(x) > n\}} f^2(x)\nu(dx) \leq \varphi(n)$ where $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ is such that $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.*

Let $W_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_0^{nt} f(X_u) du$ and $\tilde{W}_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{N(nt)} f(X_{k-1})\theta_k$. Then the random processes W_t^n and \tilde{W}_t^n have the same limiting distribution.

Proof: It is enough to prove that $\sup_{0 \leq t < \infty} |W_t^n - \tilde{W}_t^n|$ converges in probability to zero. This follows due to integrability and regularity conditions. ■

An important step in proving the functional central limit theorem and the almost sure central limit theorem is a martingale decomposition for the Markov renewal process.

Theorem 2.2 *Let $\{X_t, t \geq 0\}$ be an ergodic semi-Markov process with initial distribution μ and unique invariant measure π and $\{X_n, n \geq 0\}$ its embedded Markov chain with invariant probability measure ν . Consider $f \in \mathbb{L}^2(\pi)$ satisfying the following conditions:*

- (i) $\int_E f(x)\pi(dx) = 0$
- (ii) $\|P^k f\|_{L^2(\nu)} \leq \rho^k \|f\|_{L^2(\nu)}$ for some $0 < \rho < 1, k \in \mathbb{N}$

- (iii) there exists $0 < C < \infty$ such that $d\mu P^k \leq C d\nu$ for any $k \in \mathbf{N}$ and $\int_{\{x: f^2(x) > n\}} f^2(x) \nu(dx) \leq \exp(-\varphi(n))$ for n large, with $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ is such that $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\log x} = \infty$.
- (iv) $|P^k f(x)| \leq Cn$, whenever $|f(x)| \leq n$ for some $1 < C < \infty$ and n sufficiently large.

Then the additive functional of the Markov renewal process satisfies the following martingale decomposition:

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n f(X_{k-1})\theta_k = M_n + R_n$$

where M_n is a local L^2 -martingale with respect to the filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k, 0 \leq k \leq n\}$ and the remainder term goes in probability to zero and satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \log \mathbf{P} \left\{ \frac{\sup_{1 \leq k \leq n} R_k^2}{n} > \varepsilon \right\} = -\infty. \tag{1}$$

Proof: Since $\{(X_{n-1}, \theta_n), n \geq 1\}$ is the corresponding renewal Markov process associated to the semi-Markov process, it is stationary with probability invariant measure $\tilde{\nu} = \nu \cdot F, \tilde{\nu}(dy \times ds) = \nu(dy)F_y(ds)$.

Define the measurable function $g : E \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ as $g(y, s) = f(y)s$, and let $S_n(g) = \sum_{k=1}^n g(X_{k-1}, \theta_k)$. The martingale decomposition follows using the technique developed in [3], Theorem 3.1. ■

Theorem 2.3 *Let $\{X_t, t \geq 0\}$ be a stationary ergodic semi-Markov process with invariant distribution π and $f \in L^2(E, \pi)$ satisfying the assumptions of Theorem 2.2. Then the process $W_t^n := \frac{1}{\sigma\sqrt{nt}} \int_0^{nt} f(X_s) ds$ converges weakly to the standard Wiener process W on $\mathcal{D}([0, \infty), E)$.*

Proof: According to Theorem 2.2, $S_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} f(X_{k-1})\theta_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} M_t^n + \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} R_t^n$, with the remaining term converging almost surely to zero. Indeed, let $A_n = \{\omega : \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{|R_t^n(\omega)|}{\sigma\sqrt{n}} \geq \varepsilon\}$. From (2.2) we get that $\mathbf{P}(A_n) \leq n^{-a_n}$ where a_n is a sequence converging to infinity. Since $\sup_{n=1}^\infty n^{-a_n} < \infty$, Borel-Cantelli lemma implies that A_n converges to zero \mathbf{P} -a.s.. The first term is a local L^2 -martingale, and following a standard localizing technique the convergence in distribution to the Wiener measure on $\mathcal{D}([0, \infty), E)$ is reduced to the convergence in distribution for square integrable martingales. Since $\sup_{0 \leq t < \infty} \left| \frac{N(nt)}{n} - \frac{t}{m} \right| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, with $m = \mathbf{E}_\pi(X_1)$, using Anscombe-Donsker Invariance principle for Markov

chains, we get the limiting distribution of $\tilde{W}_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{nm}} \sum_{k=1}^{N(nt)} f(X_{k-1})\theta_k$ to the Wiener process W . Based on Lemma 2.1, the conclusion follows. \blacksquare

Theorem 2.4 (*almost sure central limit theorem*) Let $\{X_t, t \geq 0\}$ be a semi-Markov process with an unique stationary distribution π . Consider the additive functional $W_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{nm}} \int_0^{nt} f(X_s) ds$ and the corresponding empirical measure $\mathbf{W}_n(\omega) = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta_{\mathbf{W}^{(k)}(\omega)}$. Then, under the assumptions of Theorem 2.2, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{W}_n = \mathbf{W}$, \mathbb{P} -a.e., where \mathbf{W} is the Wiener measure on $\mathcal{D}[0, \infty)$.

3. Conclusions

The functional central limit theorem and almost sure central limit theorem for additive functionals of Markov processes have been studied in our previous work [3], [5]. We generalized these results in the case of semi-Markov processes. Our approach is different than the methodologies used in other papers existing in the literature that studied the invariance principle for additive functionals of semi-Markov processes, and relies on the martingale decomposition of a renewal process associated with the semi-Markov process. This martingale decomposition is crucial in proving further that the functional central limit theorem admits an almost sure version.

Acknowledgments

The work is partially supported by the Dean of Arts and Sciences Summer Grant, Canisius College.

References

1. *Bhattacharya R.N.* On the functional central limit theorem and the law of the iterated logarithm for Markov processes // *Z. Wahrsch. verw. Gebiete.* — 1982. — Vol. 60. — P. 185–201.
2. *Glynn P.W., Haas P.J.* On functional central limit theorems for semi-Markov and related processes // *Communications in Statistics - Theory and Methods.* — 2004. — Vol. 33. — P. 487–506.
3. *Korzeniowski A., Oprisan A.* Large deviations for additive functionals of Markov processes // *International Journal of Pure and Applied Mathematics.* — 2009. — Vol. 53. — P.441–459.
4. *Limnios N.* Estimation of the stationary distribution of semi-Markov processes with borel state space // *Statistics & Probability Letters.* — 2006. — Vol. 76. — P. 1536–1542.

-
5. *Oprisan A., Korzeniowski A.* Large deviations via almost sure clt for functionals of Markov processes // *Stochastic Analysis and Applications*. — 2012. — Vol. 30. — P. 933–947.

УДК 519.248

Оценка вероятности переполнения буфера для неоднородного трафика

О. В. Лукашенко^{*†}, Е. В. Морозов^{*†}, Ю. С. Хохлов[‡]

** Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

† Петрозаводский государственный университет

‡ Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Аннотация. Для случая когда входящий поток требований на сервер есть сумма независимых дробного броуновского движения и альфа-устойчивого движения Леви получена асимптотическая нижняя оценка вероятности переполнения большого буфера.

Ключевые слова: дробное броуновское движение, альфа-устойчивый процесс Леви, вероятность переполнения.

1. Введение

Задача оценки качества обслуживания является одной из наиболее важных задач при анализе телекоммуникационных систем. На протяжении многих лет такие оценки производились на основе пуассоновской модели входящего потока или близких к ней марковских моделей. В начале девяностых годов на основе измерений трафика [1], было обнаружено, что трафик современных телекоммуникационных систем обладает совершенно новыми свойствами. В дальнейшем это было подтверждено и в многочисленных других эмпирических исследованиях. Было обнаружено, что такой трафик обладает тремя важными новыми свойствами: он является самоподобным в широком диапазоне шкал измерений, обладает свойством долговременной зависимости и величина нагрузки, поступающая от отдельных источников, имеет распределение с тяжелыми хвостами. Было показано, что если не учитывать этих особенностей, то это приводит к серьезным ошибкам при оценке качества обслуживания.

Были построены новые модели для описания такого трафика. Наиболее популярными среди них являются процесс дробного броуновского движения и устойчивый процесс Леви. Оказалось, что эти две модели тесно связаны с распределениями с тяжелыми хвостами и различными скоростями подключения источников. При быстром подключении мы получаем дробное броуновское движение, при медленном подключении возникает устойчивое движение Леви (см., например, [2]). Эмпирические исследования [3], [4] показали, что часто возникают и такие ситуации, когда трафик содержит обе описанные выше компоненты.

Пионерской работой, где рассматривалась система обслуживания с самоподобным входным потоком, является работа И. Норроса [5].

Входящий поток в данной работе строится на основе дробного броуновского движения. Выбор такого рода входного потока мотивирован функциональными предельными теоремами, согласно которым дробное броуновское движение возникает при суперпозиции большого числа независимых так называемых on/off-источников с тяжелыми хвостами [6].

В настоящей работе на основе методики, предложенной в работе Норроса, получена нижняя асимптотическая оценка вероятности переполнения большого буфера, когда на вход подается поток, состоящий из двух независимых компонент: дробного броуновского движения и устойчивого движения Леви с одинаковыми показателями Херста.

2. Основная часть

Предположим, что на вход системы с неограниченным буфером поступает входной процесс следующего вида:

$$A(t) = mt + B_{H_1}(t) + L_\alpha(t),$$

где $B_{H_1} = (B_{H_1}(t), t \in R^1)$ – процесс дробного броуновского движения (ДБД) с параметром Херста H_1 , $L_\alpha = (L_\alpha(t), t \in R^1)$ – симметричное α -устойчивое движение Леви. Оба слагаемых являются самоподобными процессами с параметрами Херста H_1 и $H_2 = 1/\alpha$.

Всюду далее предполагается, что $H_1 = H_2 = H$, $H \in (1/2, 1)$, процессы B_{H_1} и L_α независимы. В этом случае процесс $B_H + L_\alpha$ также будет самоподобным с параметром Херста H . Теперь процесс A можно переписать в следующем виде:

$$A(t) = mt + t^H [B_H(1) + L_{1/H}(1)].$$

Пусть в системе имеется постоянная скорость обслуживания $C > 0$. Введем коэффициент $r := C - m$, имеющий смысл коэффициента загрузки. Обозначим через $Q(t)$ величину нагрузки (незавершенную работу) в момент времени t . Если $Q(0) = 0$, то для $Q(t)$ справедливо выражение

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leq s \leq t} (A(t) - A(s) - C(t - s))$$

где символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению. Если $r > 0$, то величина стационарной нагрузки определяется следующим образом

$$Q \stackrel{d}{=} \sup_{t \geq 0} (A(t) - Ct)$$

Рассматривается задача оценки вероятности того, что величина стационарной нагрузки Q превысит некоторое пороговое значение b (вероятность переполнения):

$$\varepsilon(b) := \mathbb{P}[Q > b].$$

Используя подход из [5], искомая вероятность может быть ограничена снизу

$$\begin{aligned} \varepsilon(b) &= \mathbb{P}[Q > b] = \mathbb{P}\left(\sup_{\tau \geq 0} (A(\tau) - C\tau) > b\right) \geq \\ &= \mathbb{P}\left[B_H(1) + L_\alpha(1) > \inf_{\tau \geq 0} \frac{b + r\tau}{\tau^H}\right] \end{aligned}$$

Функция $f(\tau) = \frac{b + r\tau}{\tau^H}$ достигает минимума в точке

$$\tau_0 = \frac{bH}{(1-H)r},$$

а соответствующее минимальное значение равно

$$f(\tau_0) = \frac{r^H(1-H)^{-(1-H)}}{H^H} \cdot b^{1-H}.$$

С учетом данных соотношений нижняя граница вероятности переполнения может быть записана в виде

$$\varepsilon(b) \geq \mathbb{P}\left[B_H(1) + L_\alpha(1) > r^H(1-H)^{-(1-H)}H^{-H}b^{1-H}\right] =: g(b).$$

Справедлива следующая

Теорема 1 Для нижней границы вероятности переполнения справедлива следующая асимптотика:

$$g(b) \sim C_1(r, \alpha) \cdot b^{-(\alpha-1)}, \quad b \rightarrow \infty,$$

где

$$C_1(r, \alpha) = \mathbb{E}(|U|^\alpha) \frac{\sin(\pi\alpha/4) \cdot \Gamma(\alpha/2) \cdot (\alpha-1)^{\alpha-1}}{\pi \cdot \alpha^\alpha \cdot r}, \quad U \stackrel{d}{=} N(0, 1).$$

3. Заключение

В работе рассмотрена модель системы обслуживания с постоянной скоростью и входным потоком, представляющим собой сумму дробного броуновского движения и α -устойчивого процесса Леви. Для нижней границы вероятности переполнения была найдена точная асимптотика при растущем буфере.

Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15–07–02341, № 15–07–02354, № 15–07–02360.

Литература

1. *Leland W., Taqqu M., Willinger W., Wilson D.* On the selfsimilar nature of Ethernet traffic (extended version) // IEEE/ACM Trans. Networking. — 1994. — Vol. 2, no. 1. — P. 1–15.
2. *Mikosch T., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A.* Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Ann. Appl. Probab. — 2002. — Vol. 12, no. 1. — P. 23–68.
3. *Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R.* Connection-level analysis and modeling of network traffic. — Tech. Rep., ECE Dept., Rice Univ., 2001.
4. *Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R.* Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic // Proceedings of the 1st ACM SIGCOMM Workshop on Internet Measurement. — 2001. — P. 99–103.
5. *Norros I.* A storage model with self-similar input // Queuing Syst. — 1994. — Vol. 16. — P. 387–396.
6. *Taqqu M. S., Willinger W., Serman R.* Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling // Computer Communications Review. — 1997. — Vol. 27, no. 2. — P. 5–23.

UDC 519.248

On the asymptotic bound for the overflow probability of fluid queue with heterogenous input

O. V. Lukashenko^{*†}, E. V. Morozov^{*†}, Y. S. Khokhlov[‡]

^{*} *Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre RAS*

[†] *Petrozavodsk State University*

[‡] *Lomonosov Moscow State University*

For the fluid queue fed by superposition of fractional Brownian motion and alpha-stable Levy process the asymptotic of lower bound for the overflow probability was obtained.

Keywords: fractional Brownian motion, alpha-stable Levy process, overflow probability.

UDC 51(091)

Leibniz's Contributions to Financial and Insurance Mathematics

E. Knobloch*[†]

* *Institute for Philosophy, History of Literature, Science and Technology,
Berlin University of Technology,
Strasse des 17. Juni, 135, 10623, Berlin, Germany*

[†] *Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities,
Jägerstrasse, 22/23, 10117, Berlin, Germany*

Abstract. Leibniz was a philosopher who devoted his legal knowledge and his mathematical competence to the service of public welfare. Five aspects of this service will be discussed: 1. Leibniz emphasized the need for the creation of a system of public insurances that was based on the principle of solidarity. 2. He taught how to calculate the cash value of a sum of money that is to be paid in the future. 3. Leibniz acknowledged the importance of statistics for the sake of good governance of a state. But he used strongly simplifying hypotheses for his mathematical model of human life. 4. Leibniz discussed different types of life annuities and deduced the purchase price of a pension by means of his operation of rebate. He found out the presumable life spans of three different types of associations. 5. He explained how life annuities were suitable for eliminating excessive indebtedness of states.

Keywords: public welfare, public insurances, cash value, statistics, mathematical model, life annuities, operation of rebate, associations, indebtedness of states.

1. Introduction

Leibniz combined mathematics, law, and politics when he occupied himself with problems of great public interest that have remained topical until today: 1. Insurance cover, 2. Justice in financial operations, 3. Demographic evolution, 4. Old-age pensions, 5. Public indebtedness. Thus he devoted his legal knowledge and his mathematical competence to the service of the commune bonum or "public welfare". He published nearly nothing of such studies and considerations during his lifetime.

2.1. The economy and science: mathematics as a cultural force

In his memoranda for the Hannoverian duke John Frederick, for the Brandenburg elector Fredrick III in Berlin, and for the German emperor Leopold I in Vienna, he emphasized the need for the creation of a system of public insurance in the interest of a flourishing community and thus in the interest of all, including the sovereign [6, nos. I,1; I,2; I,3; I,4; I,5]. Its purpose was to protect the individual citizen against damages particularly caused by fire or water, "because", he added, "one cannot demand something from people which they do not have" [6, p. 13].

In a memorandum for the foundation of an academy of sciences, written on the 26th of March 1700, he emphasized: “One of the best useful things for the benefit of the country and of the people would be a reliable institution for the protection against damages caused by fire, because in the meantime one has found excellent means against that based on machines and on a mathematical foundation [...] Similarly it would be necessary to establish an institution against damages caused by water [...] To that important end one has but to correctly use geometry. Indeed, now the art of the spirit level has been much advanced.” [6, p. 25].

2.2. *Negotium mathematici iuris*: mathematics as a legal force

How should one calculate the current value of a sum of money that is to be paid in the future? This is a problem that concerns law, politics, and mathematics. The rebate must be determined. None of these three disciplines can decide this question by itself. The just value must favour neither the debtor nor the creditor. It must conciliate the interest within the framework of commercial law and valid law of contract: No composite interest; the legal rate of interest is 5%.

According to civil law the following principle was valid: Somebody who pays earlier than he is obliged to pay, has to pay less at that moment. The legitimate rebate was called *interusurium*, “interest accruing in the meantime”. This notion was introduced, but not defined by the Roman law. There was no explanation of how to calculate it, either. When Leibniz applied it to the restitution of debts, to sales by auctions, and to various kinds of insurance (old-age-insurance, etc.) he had to find his own solution because the solutions of Benedict Carpzov and of the jurists contradicted his principles of justice.

Let p be the sum of the lent money, let a be the number of years after which the sum has to be repaid, let i be the legal rate of interest and x the current value looked for, $\nu = 100/i$. Then

$$x = p \left(\frac{\nu}{\nu + 1} \right)^a .$$

Leibniz deduced this solution in three ways: as the sum of an infinite series, by stepwise calculating the infinite number of virtual anticipations and compensations, and by inverting the formula of compound interest. But why was the objection to the application of compound interest not justified here? Leibniz answered [6, p. 242f.]: “One can claim interest on interest paid before the date agreed upon. One cannot claim interest on interest which the debtor did not pay punctually.”

2.3. *Calculus politicus*: demography

Leibniz invariably underlined the importance of statistics relating to the country and the people for the sake of good governance of the state.

In 1682 he enumerated 56 questions relevant to his demographical interest [6, no. III.15]. But he preferred hypothetical considerations in order to calculate life expectancy and the value of life annuities. Thus he was a pioneer of mathematical modelling of reality and was conscious of working with strongly simplifying hypotheses. He nearly always used the following assumptions [6, p. 416- 419, 472f.]:

Assumption 1: All people are equally vital.

Assumption 2: Every age is equally fatal.

Assumption 3: The limit of human life is 80 (70, 81) years.

2.4. Life annuities: mathematics as a political force

Leibniz looked for the just price of a life annuity. The duration of life can only be revealed by a prophet, by Divine Revelation. As an actuary he must use the calculus of probabilities in order to attribute a presumable duration to life annuities and thus a just purchase price. He calculated this price of a pension by means of his operation of rebate. It was a matter of the current values of payments made at different times for a common date of purchase.

Let a , i , v have the meaning as above, let x be the purchase price, p the annual pension. The price will be the sum of a geometric series:

$$x = \left(1 - \left(\frac{v}{v+1}\right)^a\right) \nu p.$$

Leibniz stepwise generalized the conditions. Originally all pensions are equal. The payments are made after one year. The money is given to one person. If it is the matter of several persons, these persons are of the same age.

Then the conditions are changed: The pensions are unequal. The time intervals between the payments are shorter than one year. The money is given to associations with members who might be of different ages. He called life annuities of the last case "the apogee of this study" [6, p. 468f.]. In the case of associations he needed two definitions:

Definition 1. The life span of an association is the upper limit of the individual life spans of its members. An association survives up to the death of its last member.

Definition 2. The presumed life span of an association of n arbitrary persons is the arithmetical mean of the life spans of n -tuples.

Leibniz determined the life expectations of a group of the same age as well as those of persons of different ages. His combinatorial approach is based on the enumeration of cases. The presupposed conditions are decisive. The persons might have different or equal life spans. Once one has calculated the presumed life span of such an association one has to insert it into the formula for the price of a life annuity. There the calculated value has to replace a .

If for example n persons of a group have the same age, but different life spans and if $x = 80$ is the maximal life span, Leibniz needs four steps

in order to deduce the presumed life span of such an association: He looks for all possible associations (combinations) of k persons (of k -tuples). He determines the life spans of the associations (combinations) (pairs, triples, . . . , n -tuples). He calculates the total number of years of the life spans. He calculates the presumed life span of k persons. His result reads:

$$\frac{80n - 1}{n + 1}$$

years.

2.5. Public indebtedness

For Leibniz, life annuities, or other amortizable pensions, seems to be the appropriate means for eliminating excessive indebtedness of states or for providing the necessary money for cities, states, and sovereigns. The aim of such an action must be justice. He explicitly explains that public welfare is more important than individual welfare. While we cannot compel an individual against his will to accept a pension, that is, an instalment, so that the debtor can settle his debt, a state which got into financial straits must have this right [6, p. 384f.].

In fact, in case of need and for reasons of equity one might concede a higher percentage than that dictated by mathematics. One has to reckon with, so to speak, a payment of damages. For mathematical reasons, about 6% would be reasonable. For political rather than legal reasons, one could concede 10% or even 14% in order to grant compensation for a risk that is hardly calculable for a private creditor.

Leibniz discusses the example of a city whose revenues are 24000. It loses 5000 because of interest and spends 20000 for public responsibilities [6, p. 386f.]. In order to settle this difficulty, Leibniz suggested financial support for a period of ten years to be paid by the citizens and a temporary restriction of public expenses. In this case, the creditor could get from 13000 to 15000 a year. After ten years the debts would be redeemed.

3. Conclusions

In 1997 Walter Hauser published his PhD dissertation *On the origins of the calculus of probabilities* [1]. He amply discussed the pioneer works by Jan de Witt, John Graunt, William Petty on political arithmetic, on the order of mortality, on demography, on life annuities, on insurance problems which Leibniz knew, cited, and used. He did not say anything about the relevant Leibnizian works. Apart from Parmentier's booklet [5], which was used by Mora Charles [9], most of these works had not been published at that time.

Leibniz's only publication on this subject was and remained his article [4]. Financial and insurance mathematics are an especially good example

for his statement that he wrote to the jurist Vincentius Placcius on February 21, 1696 [8, p. 139]: “Qui me non nisi editis novit, non novit.” (Who knows me only by my publications, does not know me).

Since then the situation has changed completely. The bilingual volume containing Leibniz’s fifty most important papers dealing with this subject appeared in 2000 [6]. The present article is largely based on that volume. In 2001 twenty-five studies were reprinted in [7]. Also in 2001 Jean-Marc Rohrbasser and Jacques Veron published their booklet [10] in Paris. It demonstrates the quick reception of, and the great interest in, these Leibnizian studies.

References

1. *Hauser W.* Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Verbindung von Glücksspieltheorie und statistischer Praxis vor Laplace. — Steiner Verlag, 1997.
2. *Knobloch E.* Leibniz’s versicherungswissenschaftliche Schriften im Überblick. — Zeitschrift für die gesamte Versicherungswirtschaft. — 2001. — Vol. 90. — P. 293–302.
3. *Knobloch E.* Finanz- und Versicherungswesen im Zeichen Leibniz’scher Auffassung von Gerechtigkeit // Vision als Aufgabe, Das Leibniz-Universum im 21. Jahrhundert / Martin Grotschel, Eberhard Knobloch, Juliane Schiffers, Mimmi Woisnitza, Gunter M. Ziegler — Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, 2016.
4. *Leibniz G. W.* Meditatio Juridico-mathematica de interusorio simplice // Acta Eruditorum. — 1683. — Vol. October. — P. 425–432.
5. *Leibniz G. W.* L’estime des apparences, 21 manuscrits de Leibniz sur les probabilités, la théorie des jeux, l’espérance de vie. Texte établi, traduit, introduit et annoté par Marc Parmentier. — Vrin, 1995.
6. *Leibniz G. W.* Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik, ed. by Eberhard Knobloch and Matthias Graf von der Schulenburg. — Akademie Verlag, 2000.
7. *Leibniz G. W.* Sämtliche Schriften und Briefe / Ed. by the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities and by the Academy of Sciences in Göttingen. Series IV, vol. IV. — Akademie Verlag, 2001.
8. *Leibniz G. W.* Sämtliche Schriften und Briefe / Ed. by the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities and by the Academy of Sciences in Göttingen. Series II, vol. III. — Akademie Verlag, 2013.
9. *Mora Charles, M. S. de.* Pensions, rentas y seguros. Los primeros cálculos y la participación de Leibniz. — Historia de la probabilidad y la estadística por A.H.E.P.E. vol. 2002. — P. 35–48.
10. *Rohrbasser J.-M., Véron, J.* Leibniz et les raisonnements sur la vie humaine. (Préface de Marc Barbut). — Institut National d’Études Démographiques, 2001.

Numerical analysis of phase transitions in supercritical branching random walks

D. Balashova*

* *Department of Probability Theory,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
Lomonosov Moscow State University,
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskiye Gory, Main Building*

Abstract. We consider a continuous-time symmetric supercritical branching random walk on a multidimensional lattice with a finite set of particle generation centers, i.e. branching sources. We construct the model with three branching sources located at the vertices of the simplex with positive or negative intensities and present branching random walk, where arbitrary number of the branching sources with positive or negative intensities are located in the vertices of the simplex. It is established that the amount of positive eigenvalues of the evolutionary operator, counting their multiplicity, does not exceed the amount of the branching sources with positive intensity, while the maximal of eigenvalues is simple.

Keywords: branching random walks, evolutionary operator, discrete spectrum, analytical methods in probability theory.

1. Introduction

The continuous-time branching random walk (BRW) with a finite number of branching sources situated at the points of the multidimensional lattice \mathbb{Z}^d ($d \geq 1$) is considered. The behaviour of the mean number of particles both at an arbitrary point and on the entire lattice can be described in terms of the evolutionary operator of a special type (e.g. [2]), which is a perturbation of the generator \mathcal{A} of a symmetric random walk. This operator has form

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^N \beta_i \delta_{x_i} \delta_{x_i}^T, \quad x_i \in \mathbb{Z}^d,$$

where $\mathcal{A} : l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$ is a symmetric operator and $\delta_x = \delta_x(\cdot)$ denotes a column vector on the lattice taking the value one at the point x and zero otherwise. Branching occurs at some sources x_i and is defined by an infinitesimal generating functions $f_i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n} u^n$ such that $\beta_{i,r} = f_i^{(r)}(1) < \infty$ for all $r \in \mathbb{N}$. The quantity $\beta_i \equiv \beta_{i,1}$ characterizing the intensity of x_i source.

General analysis of this operator was first done in [2]. The perturbation of the form $\sum_{i=1}^N \beta_i \delta_{x_i} \delta_{x_i}^T$ of the operator \mathcal{A} may result in the emergence

of positive eigenvalues of the operator \mathcal{H}_β and the multiplicity of each of them does not exceed N . In [3] it was proved that for the case of equal β_i and finite variance of jumps the total multiplicity of all eigenvalues does not exceed N and the multiplicity of each eigenvalue of the operator \mathcal{H}_β does not exceed $N - 1$. In [4] the same was proved for the case of infinite variance of jumps and was demonstrated that the appearance of multiple lower eigenvalues in the spectrum of the evolutionary operator can be caused by a simplex configuration of branching sources.

2. Main section

We consider branching random walk with $p + n$ sources, that are located in the vertices of a simplex on \mathbb{Z}^d . P sources $x_1 \dots x_p$ have intensity $\beta > 0$ and n sources $x_{p+1} \dots x_{p+n}$ have intensity $-\beta$. Sources with positive intensity perform points where the degree of birth prevails over the degree of death and it's the opposite in sources with negative intensity.

Proposition. The amount of eigenvalues $\lambda > 0$ of the evolutionary operator \mathcal{H}_β (counting their multiplicity) does not exceed the amount of branching sources with positive intensity, and the maximal of these eigenvalues is simple.

The evolutionary operator in this case has form

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{A} + \beta \Delta_{x_1} + \beta \Delta_{x_2} + \dots + \beta \Delta_{x_p} - \beta \Delta_{x_{p+1}} - \beta \Delta_{x_{p+2}} - \dots - \beta \Delta_{x_{p+n}}$$

Assume $|x_i - x_j| = s, i \neq j$. Then $\lambda > 0$ is an eigenvalue of the operator \mathcal{H}_β if and only if

$$\begin{aligned} & (\beta G_\lambda - \beta G_\lambda(s) - 1)^{p-1} (\beta G_\lambda - \beta G_\lambda(s) + 1)^{n-1} \\ & \quad \times ((\beta G_\lambda)^2 + (p+n-2)\beta^2 G_\lambda G_\lambda(s) - (p+n-1) \\ & \quad \quad \times (\beta G_\lambda(s))^2 + (p-n)\beta G_\lambda(s) - 1) = 0 \end{aligned}$$

For $p \geq 2$ it has two positive roots (of multiplicity $p - 1$ and 1):

$$\beta_1 = \frac{1}{G_0 - G_0(s)}, \quad \beta_2 = \max\{A - B, A + B\},$$

where

$$\begin{aligned} A &= \frac{(n-p)G_0(s)}{2(G_0 - G_0(s))(G_0 + G_0(s)(n+p-1))}, \\ B &= \frac{\sqrt{(n-p)^2(G_0(s))^2 + 4(G_0 - G_0(s))(G_0 + G_0(s)(n+p-1))}}{2(G_0 - G_0(s))(G_0 + G_0(s)(n+p-1))}. \end{aligned}$$

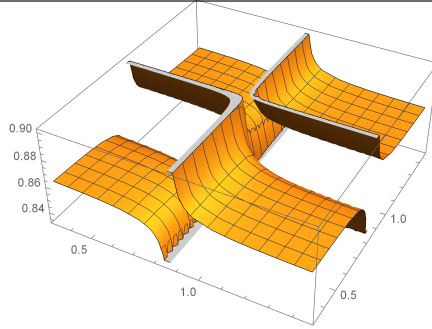


Figure 1. β_1, β_2 and β_3 areas

Example. We consider branching random walk with three sources, that are located in the vertices of a simplex on \mathbb{Z}^3 . The evolutionary operator has the form

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{A} + \beta_1 \Delta_{x_1} + \beta_2 \Delta_{x_2} + \beta_3 \Delta_{x_3}.$$

We denote the transition probability of a random walk by $p(t, x, y)$. This function is determined by the transition intensities $a(x, y)$. Green's function of the operator \mathcal{A} can be represented as the Laplace transform of the transition probability $p(t, x, y)$:

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^3} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta, \quad \lambda > 0,$$

where $\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^3} a(z) e^{i(\theta, z)}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Denote $G_0(0, 0) = G_0$ and assume $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_3| = |x_2 - x_3| = s$. In this case $\lambda > 0$ is an eigenvalue of the operator \mathcal{H}_β if and only if

$$\begin{aligned} &\beta_1 \beta_2 \beta_3 (3G_0^2(s)G_0 - 2G_0^3(s) - G_0^3) \\ &+ (\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_3) (G_0^2 - G_0^2(s)) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) G_0 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Depending on the values of β_1, β_2 and β_3 this equation can have zero, one, two or three positive solutions (eigenvalues) λ . (see Fig. 1)

3. Conclusions

Models with branching sources located at the simplex vertices (intensities are arbitrary, positive or negative) were presented. In the case of

arbitrary number of the branching sources with positive intensities β or negative intensities $-\beta$ we found the upper limit of the amount of eigenvalues $\lambda > 0$ of the evolutionary operator \mathcal{H}_β and stated the simplicity of the maximal eigenvalue.

The condition that the highest positive eigenvalue λ_0 of the operator \mathcal{H}_β is strictly positive means the exponential growth of the first moment of the total number of particles both at an arbitrary point and on the entire lattice (see [1]): denote by $\mu_t(y)$ the number of particles at site $y \in \mathbb{Z}^d$ and by μ_t the total number of particles at time t , $m_n(t, x, y) := \mathbb{E}_x \mu_t^n(y)$ and $m_n(t, x) := \mathbb{E}_x \mu_t^n$, where \mathbb{E}_x stands for the expectation under the condition $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$. For all $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{Z}^d$, if

$$m(n, x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_n(t, x, y)}{m_1^n(t, x, y)}, \quad m(n, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_n(t, x)}{m_1^n(t, x)},$$

then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(y) e^{-\lambda_0 t} = \xi \psi(y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\lambda_0 t} = \xi,$$

where $\psi(y)$ is the eigenfunction corresponding to the eigenvalue and ξ is a nondegenerate random variable, are valid for multiple sources in the sense of moment convergence.

Constructed supercritical branching random walk models with arbitrary intensity sources and positive or negative intensity sources presents the approach for finding critical β values.

Acknowledgments

The research is supported of RFBR Grant 17-01-00468.

References

1. *Yarovaya E. B.* Criteria for exponential growth of the numbers of particles in models of branching random walks // Theory of Probability and its Applications. — 2011. — Vol. 55, no. 4. — P. 661–682.
2. *Yarovaya E. B.* Spectral properties of evolutionary operators in branching random walk models // Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 92, no. 1. — P. 115–131.
3. *Antonenko E. A., Yarovaya E. B.* Raspolozhenie polozhitel'nyh sobstvennykh znachenij v spektre jevoljucionnogo operatora v vetvjash-hemsja sluchajnom bluzhdanii // Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki, Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika. — 2015. — Vol. 10, no. 3 — P. 9–22. (in Russian)
4. *Yarovaya E. B.* The Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2016. — P. 1–17. — DOI 10.1007/s11009-016-9492-9.

UDC 51(091)

On mathematics in Lvov from the second half of the 19th century till the end of WWII

S. Domoradzki*

* *Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszów,
1 Pigońia Str., 35-959 Rzeszów, Poland*

Abstract. A brief outline of the history of mathematics in Lvov from the second half of the 19th century till the end of the Second World War with emphasizing of the role of the Lvov School of Mathematics.

Keywords: history of mathematics, Poland, autonomy period, Lvov University.

The date of establishment of the Academy is considered as the establishment of the Lvov University: 20 January 1661 King Jan Kazimierz signed the act of foundation, which gave the same rights and privileges to the existing since 1608 the College of the Jesuit Fathers and the Academy of Cracow. The Academy was against the approval of foundation act, so it did not really come into effect. Only Pope Clement XIII approved it on 26 March 1759. The Academy has two departments: the philosophical and theological one, but gave no degrees. It functioned until the First partition of Poland in 1773, when Lvov belonged to Austria, and the dissolution of the Jesuit Order followed. The Academy was closed and a high school functioned in its building. In 1784, Emperor Joseph II founded the Lvov University with the Latin language of teaching and four departments. The university, called Joseph's University after the name of the ruler, existed until 1804, when it was transformed into a Lvov high school. In 1817 Emperor Franz I resumed activity of the University with German language of teaching. When Galicia obtained autonomy (in 1861) Polish language of teaching was introduced in 1871. Spring of Nations, the aspiration for freedom opened a new phase of the university (1848-1871). The Philosophy Department obtained permission to conduct independent studies. On September 29, 1848, the authorities in Vienna introduced Polish as the teaching language. German Professors protested, Lvov was bombed, revolutionary sentiments were suppressed and the authorities in Vienna on 4 December 1848 cancelled the previous order and German language again became the teaching language at the university. Attempts to make University Polish in 1858, gradually led to the increase of the number of chairs with the Polish language of teaching. But only since 1871, since the provision of the Austrian authorities about freedom of choosing the teaching language, we can consider that Polish was restored at the Lvov University. The Head of the Department of Mathematics in the period 1872-1889 was Wawrzyniec Żmurko (1824 – 1889), a long-term professor of mathematical analysis and theoretical mechanics. After the death of Żmurko in 1889 Joseph Knyaz Puzyna (1856-1919) became the head of

the Department. Their scientific and organizational activities can be seen as a huge commitment and significant contribution to the development of mathematical culture. Among other things, during Puzyna's activity the Math seminar came into being with two lower and higher departments at the Lvov University (from 1893 to 1894). In Lvov, J. Puzyna published two volumes "Theory of analytic functions", about which S. Saks and A. Zygmund wrote later that: it is a true encyclopaedia of analysis. Puzyna also had a great experience, but his role in the introduction of the set theory in Poland is still unappreciated. It is remembered that W. Sierpiński gave the first lecture on set theory at the Lvov University in 1909 and wrote a book *The outline of the set theory* in 1919 as well as an article in the *Guide for self-taught* in 1915. It is less known however that in Poland Puzyna was the first to write about this theory in the work *Theory of analytical functions* (volume I was published in Lvov in 1898, volume II also in Lvov in 1900. It is worth noting that Puzyna introduced language of set theory and used the language of intuitive topology. In 1910, the Ministry of Education in Vienna agreed to restart the Second Department of Mathematics at the Faculty of Philosophy, of the Lvov University, and Wacław Sierpiński, who started his work at the Lvov University after his habilitation in 1908 in Lvov. W. Sierpiński directed the II Chair of Mathematics until 1918 (with a break for internment in Russia, 1914-1917), then he moved to the Warsaw University. In the period of the Lvov University he concentrated talented young mathematicians around himself, among others Zygmunt Janiszewski and Stefan Mazurkiewicz (1888-1945), with whom he later cooperated in Warsaw. In the period 1909 to 1914 he conducted a seminar on set theory (one of the first in the world). In 1909 he introduced a series of lectures on the set theory, one of the first university lectures on set theory as a separate subject. On 10 July 1913 Zygmunt Janiszewski got a nomination for the post of assistant in the "ordinary chair of mathematics of professor Józef Puzyna for the period from 1 October 1913 to 30 September 1915." In the same document we can read that the number of professors (faculty council) on the meeting on 11 July 1913 granted him *venia legendi* - the right of teaching mathematics at the Lvov University. He received his doctorate degree on the work "Sur les continus irréductibles entre deux points". Janiszewski in the article *On the needs of mathematics in Poland* suggested "to get independent positions for Polish mathematicians". It is worth stressing that topics related to set theory were in the scope of interest of the Lvov group, i.e., Sierpiński, Janiszewski, Mazurkiewicz, later also S. Ruziewicz (1889-1941). At the beginning of the XX century one of the students of the Polytechnic School in Lvov was the most talented Polish mathematician of the XX century, Stefan Banach (1892-1945). When after the outbreak of World War I Banach returned to Krakow, an unusual meeting with Steinhaus took place: There, quite by chance he met Stefan Banach. As he mentioned this fact – "during this walk I heard the words "... Lebesgue measure ..." – I went to the bench and introduced myself to two young students of mathematics. They told me that their companion was also Witold Wilkosz, who was highly praised.

They were Stefan Banach and Otto Nikodym. Since then, we met regularly, and because of fact that Władysław Ślebodziński, Leon Chwistek, and Jan Króo and Władysław Stożek were in Cracow we decided to start a Mathematical Society.

Hugo D. Steinhaus's relation with the university in the period of autonomy was a short one, a bit over a year, and took place in the complicated wartime and post-war situation. Steinhaus studied and obtained a doctorate in mathematics in Goettingen. In March 1917, he went to Lvov to deliver his habilitation lecture at the Lvov University, after which he obtained his *veniam legendi*) Thanks to Steinhaus Banach got a position at the Polytechnic School with prof. Łomnicki (after the Polish-Soviet war in 1920). Afterwards his career developed rapidly. Together with Steinhaus he created after 1920 in Lwow one of significant mathematical schools—the Lvov Mathematical School, for which the ground was prepared by a half-century of achievements of Lvov mathematicians connected with the University and Polytechnic School in Lvov. The theory of Banach spaces, functional analysis, the journal “*Studia Mathematica*” and the *Scottish Book* changed the mathematics of the XX century. But one should not forget that there were also active mathematicians in Lvov beyond the Lvov School, among them Lucjan Emil Boettcher, a pioneer in iteration theory.

References

1. *Domoradzki S.* The Growth of Mathematical Culture in the Lvov area in the Autonomy period (1870-1920). — Matfyzpress, Prague, 2011.
2. *Duda, R.* Pearls from a Lost City: The Lvov School of Mathematics (translated by Daniel Davies) // AMS, History of Mathematics. — 2014. — Vol. 40.
3. *Domoradzki S., Stawiska M.* Lucjan Emil Böttcher and his Mathematical Legacy // Mathematics Without Boundaries. Surveys in Pure Mathematics, (eds.), Themistocles M. Rassias, Panos M. Pardalos. — Springer 2014. — P. 127-161.
4. *Domoradzki S., Zarichnyi M.* On beginnings of topology in Lvov // Technical Transactions. — 2015. — No. 2. — P. 143–152.

UDC 519.218.4

Analytical and discrete methods for determination of the Weibull-Gnedenko renewal density

V. N. Rusev*, A.V. Skorikov*

* *Department of Higher Mathematics,
Gubkin Russian State University of Oil and Gas
(National Research University),
Leninskiy prospect. 65-1, Moscow, Russia*

Abstract. Renewal density of restorable systems and their components which depends on statistical estimates based on real operational data is studied. It is assumed that the objects' entire life cycle is described by the Weibull-Gnedenko distribution. Analytical and discrete approaches for the solution to the renewal equation are proposed. New calculation schemes of the renewal density of restorable systems and their components are presented. Equivalence of suggested approaches is illustrated by numerical examples.

Keywords: the Weibull-Gnedenko distribution, reliability theory, renewal density (intensity), numerical methods for solving renewal equation, collocation knots, moments generating function.

1. Introduction

Let component (or system) failures occur at time moments $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ and it is assumed that replacement is negligible relative to the operational time. Then t_n represents the operational time until the n -th failure. And it is supposed that the time intervals between failures $T_n = t_n - t_{n-1}$ are independent and identically distributed. Here T_n is the random life time of the n -th item with cumulative distribution function $F(t)$ and probability density function $f(t)$, and $N(t)$ is the number of renewals in the time interval $(0, t)$. The renewal function $H(t)$ is the expected value of renewals in that interval: $H(t) = E(N(t))$. The renewal density (intensity) by the definition is given by equality $h(t) = H'(t)$. Renewal functions have wide variety of applications in warranty analysis, inventory theory, supply planning [1]. Examples of processing of real statistical data on refusals of technologically active elements of gas supply systems are considered in [2]. The fundamental renewal density equation has the following form (e.g. [1]):

$$h(t) = f(t) + \int_0^t h(\tau)f(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

The closed form solution of this equation is not available, except for some cases when the renewal process is driven by the exponential and

the Erlang distributions. In this paper new analytical and discrete methods of calculating $h(t)$ are presented for the Weibull-Gnedenko probability density function which depends on two parameters: α , named a "scale" parameter and β , called a "shape" parameter:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^\beta \beta x^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

For large t it is well-known the asymptotic result for the renewal density function

$$h(t) \sim \frac{1}{\mu}, (t \rightarrow \infty),$$

where $\mu = E(T_n)$. But the values of $h(t)$ can oscillate about the asymptotic value, thus it is important to have opportunity to calculate values of $h(t)$ more accurately.

W.L. Smith and M.R. Leadbetter (1963) developed a method to compute for the renewal function Weibull-Gnedenko distribution by using power series expansion of t^β where β is the shape parameter of the Weibull-Gnedenko. However, for $\beta > 1$, the numerical computation this series is limited to the small range of t : $0 < t < 2,5$. A. G. Constantine and N.I. Robinson (1997) presented estimation method of $h(t)$, $H(t)$ by residue calculations of the Laplace transform of the renewal integral equation to form uniformly convergent series of damped exponential terms. There are also many other approximations such as L. Cui and M. Xie (1990), E. Smeltink and R. Dekker (1990), S. Maghsoodloo and D. Helvaci (2014) explored for the Normal, Gamma, Uniform underlying lifetime distributions.

2. Analytical solution of the integral renewal equation

To solve equation (1), we use the method of moments generating function under the assumption of the two-parameter Weibull-Gnedenko distribution. The Laplace transform (or moments generating function) for the given distribution has the form:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-st)^n}{n!} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{s^n}{n!} \nu_n,$$

where ν_n is the initial moment of a random variable ξ with the probability density function $f(t)$ of order n for the given distribution:

$$\nu_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right),$$

and $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ is the Euler gamma function, $s \in \mathbb{C}$. Equation (1) in Laplace transforms has the form

$$\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{f}(s).$$

Applying the well-known in calculus technique of dividing infinite series, one can obtain the following expansion:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{\nu_1^{k+1}} \cdot F^{(k)}(t), \quad (3)$$

where $F^{(0)}(t) = F(t)$ is the cumulative distribution function and the coefficients of the expansion are determined through the moments ν_n .

It can be proved that $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$.

Thus, the solution of equation (1) is obtained (2) in terms of the probability moments of the initial distribution of a non-negative random variable. It should be noticed that it is true not only for the Weibull-Gnedenko distribution (1) under some conditions.

A good estimate of exact solution is found (Fig. 1) by taking the first 7 terms of the expansion (2).

3. The discrete methods

A numerical method which generates a cubic spline approximation of the renewal function by the Galerkin technique for solving the renewal equation was proposed Z.S. Deligonul and S. Bilgen (1984). The discretizing time method has been used by M.Xie to approximate the renewal equation. Numerical algorithm in papers of M. Xie [3] was based on the definition of the Riemann - Stieltjes integral (RS-method). T.K. Boehme, W.Preuss, V. van der Wall (1991) have also used a similar method. M. Tortorella (2005) presented a paper describing analysis the method based on quadrature schemes for Stieltjes integrals. Some numerical procedure, when the time scale is discrete, can be found in the books on reliability theory by E.A. Elsayed [1], A. K. S. Jardine, A. H. C. Tsang (2013).

In this paper the function $h(t)$ is approximated by step functions or linear functions. The accuracy of this discretization was checked in three different ways. It is obvious that approximation error can be diminished by increasing the number of collocation knots. All calculations presented below were carried out by using Wolfram Mathematica software including integrals calculus without algorithm of numerical quadrature schemes.

The first step in the discretization scheme is the division of the specified time interval $[0, t]$ into n equal-length subintervals of by points (collocation knots)

$$t_0 = 0, \quad t_1 = t_0 + \Delta, \dots, \quad t_n = t_0 + n \Delta$$

where $\Delta = t/n$ is the length of each subinterval.

The method of right knots. Approximate solution $h(t)$ has the form of a linear combination functions $u_n(t) = \sum_{k=1}^n u_k I_k(t)$ of the so-called coordinate functions $I_k(t)$ vanishes outside the interval $(t_{k-1}, t_k]$ and $I_k(t) = 1$, $t_{k-1} < t \leq t_k$, $u_k = h(t_k)$. Thus, the approximate solution is determined from the conditions in the right collocation knots of the interval $(t_{k-1}, t_k]$.

The midpoint method. Let the value of the approximate solution at the n -th segment is an average value

$$\tilde{u}_k = \frac{h(t_{k-1}) + h(t_k)}{2}.$$

The approximate solution, respectively, has the form $u_n(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{u}_k I_k(t)$.

The Line-Spline Finite Element Solution. The function $h(t)$ in $[t_{k-1}, t_k]$ can be approximated by Lagrange polynomials as follows

$$\tilde{u}_k(t) = u_{k-1} \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} + u_k \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}},$$

where $u_k = h(t_k)$.

The solution of the Weibull-Gnedenko renewal density equation in these methods are defined by recurrent formulas.

Note, algorithms of solution linear systems are important for calculating with large number of knots. The best approximation of the exact solution provided the second method of discretization, that is, the midpoints method. The third method is time consuming for large values $n > 40$.

The discrete methods presented here can be used in the case where the life distribution has a density with a singularity at the origin, such as the Weibull - Gnedenko distribution (1) with shape parameter less than 1. It is important for applications of gas supply systems [4].

The following illustration (Fig. 1) gives the results of numerical computations performed according to the methods of this paper. The considered solutions of equation (1) are presented for the Rayleigh distribution (with $\alpha = 1$, $\beta = 2$ of the Weibull-Gnedenko distribution, and number of knots $n = 20$). An increase in the number of knots up to $n = 100$ gives a practical coincidence of approximate solutions found using the above discrete methods.

4. Conclusions

The research technique of restorable systems and their components renewal density are presented. They take into account the dependence of

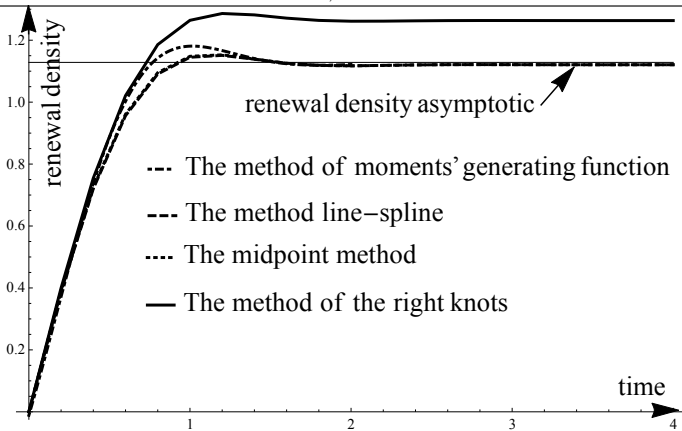


Figure 1. The renewal density Rayleigh distribution

the reliability indicators on time and is based both on analytical and discrete methods. Using the Weibull-Gnedenko distribution the relationships have been obtained. They can be used for engineering calculations on the basis of failures statistics. The advantages of the considered discrete methods include its universality, simplicity of algorithms and calculations. For computing the renewal density function gives a comprehensive review of the collocation methods. Practical significance of research results was demonstrated on several examples of processing of real statistical data on technologically active elements in gas supply systems failures [2, 4].

References

1. *Elsayed E. A.* Reliability Engineering. — John Wiley and Sons, Hoboken, 2012.
2. *Rusev V. N., Skorikov A. V.* Analysis of elements of gas supply systems by method of moment generatining functions // Proceeding of Gubkin Russian State University of Oil and Gaz. — 2016. — No. 1 (282). — P. 68–79. (In Russian).
3. *Xie M.* On the solution of the renewal-type integral equations // Communications in Statistics. — 1989. — Vol. 18, no. 1. — P. 281–283.
4. *Rusev V. N., Skorikov A. V.* Analytical and discrete methods of research of failure intensity in gas transport // Proceeding of Gubkin Russian State University of Oil and Gaz. — 2016. — No. 3 (284). — P. 104–117. (In Russian).

Interpolation using stochastic local iterated function systems

A. Soós*, I. Somogyi*, L. Simon*

** Babeş-Bolyai University,
Faculty of Mathematics and Computer Science,
Kogalniceanu str. 1, Cluj-Napoca, Romania*

Abstract. We will use iterated function systems to construct fractal functions. Local iterated function systems are important generalization of iterated function systems. The classical data interpolation methods can be generalized with fractal functions. In this article using the fact that graphs of piecewise polynomial functions can be written as the fixed points of local iterated function system we study the behavior of stochastic local iterated function systems using interpolation methods.

Keywords: fractal function, iterated function system, local iterated function system, stochastic local iterated function system.

1. Introduction

A function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, defined on the real closed interval I is named by Barnsley a **fractal function** if the Hausdorff dimension of the graph is noninteger. Barnsley introduced in [1] the notion of fractal interpolation function (FIF). He said that a fractal function is a (FIF) if it possess some interpolation properties. In the last few decades the methods of fractal interpolation methods was applied successfully in many fields of applied sciences. It has the advantage that it can be also combine with the classical methods or real data interpolation. Hutchinson and Rüschendorf [4] gave the stochastic version of fractal interpolation function. In order to obtain fractal interpolation functions with more flexibility Wang and Yu [5] use instead of a constant scaling parameter a variable vertical scaling factor. Barnsley introduced the notion of local iterated function systems which are an important generalization of the global iterated function systems. In this paper we study the case of a locally stochastic fractal interpolation function with random variable as scaling parameter.

2. Local iterated function systems and local fractal functions

Let (X, d_X) be a complete metric spaces with metric d_X and $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ the set of positive integers.

For $n \in \mathbb{N}$ let $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, and consider a family of nonempty subsets of X , $\{X_i | i \in N_n\}$. Assume that there exists continuous mapping $f_i : X_i \rightarrow X, i \in N_n$, for each X_i . Then $\mathbb{F}_{loc} = \{X, (X_i, f_i) | i \in N_n\}$ is called a **local iterated function system**.

If each $X_i = X$ then this definition give us the usual definition of a global iterated function system on a complete metric space.

A mapping $f : Y \subset X \rightarrow X$ is a contraction on Y if exists a constant $\lambda \in [0, 1)$ such that

$$d_X(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

A local IFS \mathbb{F}_{loc} is called contractive if there exists a metric d' equivalent to d_X with respect to which all functions $f \in \mathbb{F}_{loc}$ are contractive on their respective domains.

Let be the power set of X , $2^X = \{S | S \subset X\}$. On this set we consider a set-valued operator using a local IFS:

$$\mathbb{F}_{loc}(S) = \cup_{i=1}^n f_i(S \cap X_i),$$

where $f_i(S \cap X_i) = \{f_i(x) | x \in S \cap X_i\}$.

A subset $G \in 2^X$ is called a **local attractor** for the local IFS

$$\{X, (X_i, f_i) | i \in N_n\}$$

if

$$G = \mathbb{F}_{loc}(G) = \cup_{i=1}^n f_i(G \cap X_i).$$

For example the empty set is a local attractor of the local IFS, and if G_1 and G_2 are distinct local attractors than $G_1 \cap G_2$ is also a local attractor. So, exists a largest local attractor for the IFS, and this will be the so-called local attractor of the local IFS. In the case when X is compact and $X_i, i \in N_n$ are also compact in X , and the local IFS $\{X, (X_i, f_i) | i \in N_n\}$ is contractive, the local attractor may be computed in the following way. Let $L_0 = X$ and

$$L_n = \mathbb{F}_{loc}(L_{n-1}) = \cup_{i \in N_n} f_i(L_{n-1} \cap X_i), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then $\{L_n | n \in N_0\}$ is a decreasing nested sequence of compact sets. If each L_n is nonempty, then by the Cantor intersection theorem,

$$L = \cap_{n \in N_0} L_n \neq \emptyset,$$

we have that

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n,$$

where the limit is taken with respect to the Hausdorff metric. This implies that

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cup_{i \in N_n} f_i(L_{n-1} \cap X_i) = \cup_{i \in N_n} f_i(L \cap X_i) = \mathbb{F}_{loc}(L).$$

Follows that, $L = G_{loc}$. Also Barnsley introduce the local fractal functions as the local attractors which are the graphs of bounded functions.

Let X be a nonempty connected set and $\{X_i | i \in N_n\}$ are subsets of X which are nonempty and connected. We will consider a family of bijective mappings, $v_i : X_i \rightarrow X, i \in N_n$ such that $\{v_i(X_i), i \in N_n\}$ is a kind of partition of X , $X = \cup_{i=1}^n v_i(X_i)$ and $v_i(X_i) \cap v_j(X_j) = \emptyset, \forall i \neq j \in N_n$.

Let be also (Y, d_y) a complete metric space with the metric d_y , than a function $f : X \rightarrow Y$ is called is bounded with respect to the metric d_y , if exists $M > 0$ such that $\forall x_1, x_2 \in X, d_Y(f(x_1), f(x_2)) < M$.

Than the space $D(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y | f \text{ is bounded}\}$, with the metric $d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$ is a complete metric space, $(D(X, Y), d)$.

In a similar way we can define $D(X_i, Y)$, for all $i \in N_n$ and let be $f_i = f|X_i$. We will consider now a set of functions which are uniformly contractive in the second variable $w_i : X_i \rightarrow X, i \in N_n$, and the Read-Bajactarević operator $B : D(X, Y) \rightarrow Y^X$ defined by

$$Bf(x) = \sum_{i=1}^N w_i(v_i^{-1}(x), f_i \circ v_i^{-1}(x)) \chi_{u_i(X_i)}(x),$$

where

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

Using the contraction property's on the second variable of the applications w_i , it follows that the operator B is also a contraction on the complete metric space $D(X, Y)$ and therefore it has a unique fixed point f^* in $D(X, Y)$. This unique fixed point will be called a local fractal function, generated by B .

In this presentation we consider the random version of the above construction.

References

1. *Barnsley M.F.* Fractal Functions and Interpolation // Constructive Approximation. — 1986. — Vol. 2. — P. 303–329.
2. *Barnsley M.F.* Fractals Everywhere. — Academic Press, 1993.
3. *Chand .K.B, Kapoor G.P.* Generalized cubic spline interpolation function // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — Vol. 44, no. 2. — P. 655–676.
4. *Hutchinson J.E., Rüschemdorf L.* Selfsimilar Fractals and Selfsimilar Random Fractals // Progress in Probability. — 2000. — Vol. 46. — P. 109–123.
5. *Wang H.Y., Yu J.S.* Fractal interpolation functions with variable parameters and their analytical properties // J. Approx. Theory. — 2013. — Vol. 175. — P. 1–18.

UDC 519.21

Harmonic Analysis of Random Walks on Lattices

A. I. Rytova*

* *Department of Probability Theory,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*

Abstract. We consider continuous-time symmetric, spatially homogeneous, irreducible branching random walks on the multidimensional lattice. Corresponding transition intensities of the random walk have heavy tails. This assumption implies that the variance of jumps becomes infinite. The growth rate estimate of the Fourier transform for transition intensities of random walk on \mathbb{Z}^3 is obtained.

Keywords: branching random walks, Fourier transform, Watson lemma.

1. Introduction

We consider a symmetric branching random walk (BRW) on \mathbb{Z}^d with continuous time and only branching source at the origin. Assume that initially there is a single particle located at site $x \in \mathbb{Z}^d$ and it jumps on the lattice until walking into the origin. Here particle dies and starts a branching process, giving birth to offsprings. Then each of these new particles walk independently according to the same law. The main objects of interest are the local, i.e. at site of lattice, and total numbers of particles at an arbitrary moment of time.

This BRW model for a simple random walk with one source and pure birth was introduced in [1]. The more general cases of a symmetric BRW with finite variance of jumps and one source has been studied by many authors (e.g., [2,3]). Random walks with infinite variance of jumps without branching were widely investigated (see, e.g., [4] and detailed bibliography therein). In [5] it was shown that for BRW the rejection of an assumption about finiteness of variance leads to new phenomena, which is related to the recurrence properties of random walk.

According to the [5], consider the next BRW model. Let $A = (a(x, y))$ for $x, y \in \mathbb{Z}^d$ be the matrix of transition intensities of the random walk, where $a(x, y) \geq 0$ for $x \neq y$, $-\infty < a(x, x) < 0$. For the symmetry and spatially homogeneity, $a(x, y) = a(y, x) = a(0, y - x) = a(y - x)$, and $a(0) = -\sum_{z \neq 0} a(z)$. It is assumed that the function $a(\cdot)$ is irreducible, i.e., for each $z \in \mathbb{Z}^d$, there exists a collection of vectors z_1, \dots, z_k such that $z = \sum_{i=1}^k z_i$ and $a(z_i) \neq 0$ for $i = 1, \dots, k$.

Let $|\cdot|$ be the Euclidean norm \mathbb{R}^d . Suppose now that for all $z \in \mathbb{Z}^d$ with sufficiently large norm, the asymptotic relation

$$a(z) \sim \frac{H\left(\frac{z}{|z|}\right)}{|z|^{(d+\alpha)}}, \quad \alpha \in (0, 2), \quad (1)$$

holds, where $H(\cdot)$ is a continuous positive function symmetric on the sphere $\mathbb{S}^{d-1} = \{z \in \mathbb{R}^d : |z| = 1\}$, and $a(0) := -\sum_{z \neq 0} a(z)$. This condition leads to the divergence of the series $\sum_{z \neq 0} |z|^2 a(z)$, i.e. to the infinity of the variance of jumps and .

By $p(t, x, y)$ denote the transition probability of the random walk, that at time $t \geq 0$ the particle will be at site y , if at time $t = 0$ it is at site x , and determined by the transition intensities $a(x, y)$ (see, e.g., [7]).

The analysis of such models depends on behavior of the probability $p(t, x, y)$ and the Green function, whose properties are closely related to the spectral properties of the operator \mathcal{A} (see [2], [6], [8]). Due to the fact that these functions can be expressed in terms of the Fourier transform of transition intensities, its studying is one of the key points of the analysis of the BRW.

The present work is mainly devoted to the implementation of the Fourier transform studying approach proposed in [9] for \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 , by using the assertion about multidimensional series with constant coefficients, to \mathbb{Z}^3 for the BRW model with infinite variance under assumption (1).

2. Main section

Consider the Fourier transform of the transition intensities $a(\cdot)$ of the described above random walk

$$\phi(\theta) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^3} a(z) e^{i\langle z, \theta \rangle}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d.$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the scalar product on \mathbb{R}^d .

From, e.g., [5, 6],

$$p(t, 0, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \cos\langle z, \theta \rangle e^{\phi(\theta)t} d\theta. \quad (2)$$

As shown in [6], in case of finite variance of jumps the function $\phi(\theta)$ is correctly defined, takes real values, twice continuously differentiable, $\phi(\theta) \leq -\gamma|\theta|^2$ for some $\gamma > 0$, and by Theorem 4.1 ch.2 [10] for every $d \geq 1$ and every $x, y \in \mathbb{Z}^d$ have $p(t, x, y) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}$ as $t \rightarrow \infty$, where $\gamma_d = ((2\pi)^d D_d)^{-\frac{1}{2}}$, $D_d = |\det \phi''(\theta)|$. However, in case of infinite variance of jumps, $\phi''(\theta)$ doesn't exist and the same theorem is not applicable. To obtain the asymptotics of $p(t, x, y)$ it is needed to study the asymptotic behavior of $\phi(\theta)$ and then of the corresponding multidimensional Laplace's integral in (2).

The first problem began to be investigated in [5] for \mathbb{Z} and in [9] for \mathbb{Z}^2 . The main technical result of the last paper was to estimate the growth rate

of $\phi(\theta)$. Then the assertions about multidimensional series with constant coefficients were used. Some generalizations of such series for $d \geq 1$ were established in [11], which made it possible to obtain the asymptotics of $\phi(\theta)$. The second problem was solved with the analogue of Watson lemma (see [12]), and the asymptotics for $p(t, x, y)$ of symmetric random walk on \mathbb{Z}^d with infinite variance of jumps was found. It behaves as $h_{\alpha,d} t^{-\frac{d}{\alpha}}$, where $h_{\alpha,d} > 0$ is not depending on x and y for any fixed α, d .

Consider the described in Introduction BRW model with infinite variance of jumps under assumption (1) on \mathbb{Z}^3 and apply approach to study the Fourier transform from [9]. The main result is

Theorem 1 *If an function $a(z)$ satisfies listed above assumptions, then the following estimate for its Fourier transform $\phi(\theta)$ is valid:*

$$C|\theta|^\alpha \leq |\phi(\theta)|,$$

where $\theta \in [-\pi, \pi]^3$ and $C > 0$.

Note that $\phi(\theta)$ is symmetric due to $a(z) = a(-z)$ model assumption and $H_0 \cdot 3^{-(3+\alpha)} f(\theta) \leq |\phi(\theta)| \leq H^0 f(\theta)$, where $0 < H_0 \leq H(\cdot) \leq H^0$, and

$$f(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^3, z \neq 0} \frac{1}{\|z\|^{3+\alpha}} (1 - e^{i\langle z, \theta \rangle}) = \sum_{k \geq 1} \sum_{z \in S_k} \frac{1}{k^{3+\alpha}} (1 - e^{i\langle z, \theta \rangle}).$$

Let $C_k := \{z \in \mathbb{Z}^3 | \|z\| \leq k\}$ is the lattice cube containing $(2k + 1)^3$ points with center at $0 \in \mathbb{Z}^3$. Besides, $S_k = C_k \setminus C_{k-1}$ and summation on C_k is simpler then on S_k , because in the last case we need to fix consequentially by each two coordinates and vary the third from $-k$ to k , but on C_k we can vary all coordinates without fixing. Therefore, it is expediently to express $f(\theta)$ through C_k .

After transformations for $\sum_{z \in C_k} e^{i\langle z, \theta \rangle} - \sum_{w \in C_{k-1}} e^{i\langle w, \theta \rangle}$ and with designation $S_{3,\alpha}(\varphi) := \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{3+\alpha}} \cos(k\varphi)$ we get

$$\begin{aligned} f(\theta) = & -1/2(C_1(\theta)S_{3,\alpha}(\theta_1 - \theta_2 - \theta_3) + C_2(\theta)S_{3,\alpha}(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3) + \\ & + C_3(\theta)S_{3,\alpha}(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3) + (-C_4(\theta) + 2)S_{3,\alpha}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) + \\ & + 24 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{1+\alpha}} + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{3+\alpha}}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} C_j(\theta) := & (-1)^{\delta_{3j}} \text{ctg}(\theta_1/2) \text{ctg}(\theta_2/2) + (-1)^{\delta_{2j}} \text{ctg}(\theta_1/2) \text{ctg}(\theta_3/2) + \\ & + (-1)^{\delta_{1j}} \text{ctg}(\theta_2/2) \text{ctg}(\theta_3/2) + 1. \end{aligned}$$

Put $S_\alpha(\varphi) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \sin(n\varphi)$, $S_{1,\alpha}(\varphi) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\alpha}} (1 - \cos(n\varphi))$, $S_{2,\alpha}(\varphi) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2+\alpha}} \sin(n\varphi)$. As shown in [9], for $\alpha \in (0, 2)$ and $\varphi \rightarrow 0+$ the following asymptotic equalities are valid:

$$S_{1,\alpha}(\varphi) \sim \frac{1}{\alpha} \Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right) \varphi^\alpha,$$

$$S_{2,\alpha}(\varphi) \sim \varphi \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\alpha}} - \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right) \varphi^{\alpha+1}.$$

Note, $S_{3,\alpha}(0) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3+\alpha}}$, $S'_{3,\alpha}(\varphi) = -S_{2,\alpha}(\varphi)$. By integrating the last equality over $[0, \varphi]$ we conclude, as $\varphi \rightarrow 0+$

$$S_{3,\alpha}(\varphi) \sim L_\alpha - \frac{1}{2} N_\alpha \varphi^2 + M_\alpha |\varphi|^{2+\alpha},$$

where $L_\alpha = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{3+\alpha}}$, $N_\alpha = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$, $M_\alpha = \frac{\Gamma(1-\alpha) \cos(\frac{1}{2}\pi\alpha)}{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}$.

Then for $\theta \in [0, \pi]^3$, $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$, as $|\theta| \rightarrow 0$

$$f(\theta) \sim M_\alpha \cdot F_M(\theta) + N_\alpha \cdot F_N(\theta),$$

where functions $F_M(\theta), F_N(\theta)$ have the following complex representation

$$F_M(\theta) = -1/2 \cdot (C_1(\theta) \cdot |\theta_1 - \theta_2 - \theta_3|^{2+\alpha} + C_2(\theta) \cdot |\theta_1 - \theta_2 + \theta_3|^{2+\alpha} + C_3(\theta) \cdot |\theta_1 + \theta_2 - \theta_3|^{2+\alpha} + C_4(\theta) \cdot |\theta_1 + \theta_2 + \theta_3|^{2+\alpha}),$$

$$F_N(\theta) = -2 \cdot \theta_1 \theta_2 \operatorname{ctg}(\theta_1/2) \operatorname{ctg}(\theta_2/2) - 2 \cdot \theta_1 \theta_3 \operatorname{ctg}(\theta_1/2) \operatorname{ctg}(\theta_3/2) - 2 \cdot \theta_2 \theta_3 \operatorname{ctg}(\theta_2/2) \operatorname{ctg}(\theta_3/2) + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + 24.$$

For $\theta \in [0, \pi]^3$, $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$, as $|\theta| \rightarrow 0$ the next estimations are valid

$$F_M(\theta) \gtrsim C^* |\theta|^\alpha, F_N(\theta) \gtrsim C^{**} |\theta|^2,$$

with $C^* > 0$, $C^{**} > 0$. For proof it was the convenient way to use the function $\mu(x) := |x|^{2+\alpha} = (x^2)^{\frac{2+\alpha}{2}}$ with $\mu''(x) = (2 + \alpha)(1 + \alpha)|x|^\alpha$ for $F_M(\theta)$ estimate and to use the expansion $x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ as $x \rightarrow 0$ for $F_N(\theta)$ estimate.

Consequently for $\theta \in [0, \pi]^3$, $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$, as $|\theta| \rightarrow 0$ the following inequality holds

$$f(\theta) \gtrsim C' |\theta|^\alpha,$$

where constant $C' > 0$. Thus the result of Theorem 1 is obtained.

Hence, we can establish the criteria for transient behavior on \mathbb{Z}^3 by analogy with the Theorem 3 in [9]: let $X = (X_t)_{t \geq 0}$ be a random walk on \mathbb{Z}^d , as it was determined in Introduction, with infinite variance of jumps under

assumption (1). Then the random walk X is transient (i.e. $G_0 < \infty$) for $d = 1$ and any $0 < \alpha < 1$, and for $d \geq 2$ and any $1 \leq \alpha < 2$.

The proof is based on the next relations

$$\int_0^{\infty} p(t, 0, 0) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d\theta}{-\phi(\theta)} \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d\theta}{C|\theta|^\alpha},$$

where $C > 0$, and convergence of the latter integral for $\alpha < d$.

3. Conclusions

The estimation of the Fourier transform for transition intensities of random walk on \mathbb{Z}^3 with infinite variance of jumps under assumption (1) by using the assertions about multidimensional series with constant coefficients is established. The criteria for transient behavior of the corresponding random walk based on the mentioned above estimation is considered.

Acknowledgments

The research was supported by the RFBR, project no. 17-01-00468-a.

References

1. *Yarovaya E. B.* Use of spectral methods to study branching processes with diffusion in a noncompact phase space // *Theor. Math. Phys.* — 1991. — Vol. 88, no. 1. — P. 690–694.
2. *Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B.* Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source // *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math.* — 1998. — Vol. 326. — P. 975–980.
3. *Vatutin V. A., Topchii V. A.* Limit theorem for critical catalytic branching random walks // *Theory Probab. Appl.* — 2005. — Vol. 49, no. 3. — P. 498–518.
4. *Borovkov A., Borovkov K.* Asymptotic Analysis of Random Walks. Heavy-Tailed Distributions. — Cambridge University Press, 2008.
5. *Yarovaya E.* Branching random walks with heavy tails // *Commun. Statist. Theory Methods.* — 2013. — Vol. 42, no. 16. — P. 3001–3010.
6. *Yarovaya E. B.* Branching Random Walks in an Inhomogeneous Medium. — Center for Applied Studies, Dept. of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, 2007. [in Russian]
7. *Gikhman I. I., Skorokhod A. V.* Theory of Random Processes. — M.: Nauka, 1973. [in Russian]
8. *Yarovaya E. B.* The structure of the positive discrete spectrum of the evolution operator arising in branching random walks // *Dokl. Math.* — 2015. — Vol. 92, no. 1. — P. 507–510.

9. *Yarovaya E.* Criteria for transient behavior of symmetric branching random walks on \mathbb{Z} and \mathbb{Z}^2 // *New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis* / Ed. by J. R. Bozeman, V. Girardin, C. H. Skiadas. ISAST Athens Greece. — 2014. — P. 283–294.
10. *Fedoryuk M. V.* *Asymptotics: Integrals and Series.* — M.: Nauka, 1987. [in Russian]
11. *Kozyakin V.* On the Asymptotics of Cosine Series in Several Variables with Power Coefficients // *J. Comm. Tech. Electron.* — 2015. — Vol. 60, no. 12. — P. 1441–1444.
12. *Rytova A. I., Yarovaya E. B.* Multidimensional Watson lemma and its applications // *Math. Notes.* — 2016. — Vol. 99, no. 3. — P. 406–412.

УДК 519.214.4, 519.671, 519.651.1

О вычислении абсолютной константы в неравенстве Берри – Эссеена для двухточечных распределений

А. Я. Золотухин*, С. В. Нагаев†, В. И. Чеботарев‡

* Кафедра вычислительной механики и математики,
Тульский государственный университет,
пр. Ленина, 92а, Тула, Россия, 300012

† Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск, Россия, 630090

‡ Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск, Россия, 680000

Аннотация. В работе показано, что абсолютная константа в неравенстве Берри – Эссеена для бернуллиевских случайных величин, обозначим ее C_{02} , строго меньше, чем постоянная Эссеена C_E , если $n \leq 500000$, где n – число слагаемых. В силу аналитического результата Нагаева и Чеботарева 2011 г. это означает, что $C_{02} < 0.4099539$ (при всех $n \geq 1$).

Ключевые слова: оптимальное значение абсолютной константы в неравенстве Берри – Эссеена, биномиальное распределение, численные методы.

1. Введение

Рассмотрим неравенство Берри – Эссеена в случае независимых одинаково распределенных слагаемых. Абсолютную постоянную в этом неравенстве обозначим C_0 . В 1956 г. К.-Г. Эссееном [1] доказал, что $C_0 \geq C_E \equiv \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0.40973218\dots$ Верхние оценки, найденные к тому времени, и этот результат послужили аргументом для предположения $C_0 = C_E$, которое высказал В.М. Золотарев в 1966 г. [2].

С тех пор был получен ряд верхних оценок C_0 , исторический обзор которых можно найти, например, в [3] и [4]. Наилучшая верхняя оценка, известная к настоящему времени, принадлежит Шевцовой: $C_0 \leq 0.469$ [4]. Заметим, что в получении верхних оценок, начиная с оценок в [2, 5], существенную роль играло использование вычислительной техники.

Тот факт, что нижняя оценка Эссеена достигается на некотором специальном двухточечном распределении, послужил толчком к рассмотрению задачи о константе C_0 в частном случае двухточечных распределений. В этом случае мы вместо C_0 будем писать C_{02} . В 2007 г. в работе [6] опубликовано доказательство неравенства $C_{02} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ симметричном случае. В 2016 г. Й. Шульц доказал, что если условие симметричности нарушается, то имеет место равенство $C_{02} = C_E$ [7].

Отметим, что еще в 2011 г. в работе [8, теорема 1.1] была получена новая оценка погрешности нормального приближения для биномиального распределения. Главная часть найденной там мажоранты погрешности содержит в качестве множителя функцию $\mathcal{E}(p) = \frac{2-p}{3\sqrt{2\pi}[p^2+(1-p)^2]}$, где p – параметр исходной случайной величины, $0 \leq p \leq 0.5$. При этом остаточная часть мажоранты положительна, убывает по n и при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее главной части. Так как максимальное значение функции $\mathcal{E}(p)$ равно постоянной C_E , то этот результат из [8] позволяет находить верхнюю границу для C_{02} , сколько угодно близкую к C_E , при условии, что n достаточно велико.

Вместо C_{02} мы будем писать $C_{02}(\underline{N})$, если предполагается, что $n \geq N$, и $C_{02}(\overline{N})$, если предполагается, что $n \leq N$.

Таким образом, теорема 1.1 из [8] позволяет по данному $\varepsilon > 0$ находить такое N_ε , что для всех $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство $C_{02} \leq C_E + \varepsilon$.

В [8], в частности, было доказано, что если $\varepsilon = 0.4215 - C_E = 0.0117678 \dots$, то $N_\varepsilon = 200$, т. е. $C_{02}(\underline{200}) \leq 0.4215$. В дополнение к этой теоретической оценке были проведены вычисления (см. [9]), которые показали, что $C_{02}(\underline{200}) < C_E$. Следовательно, при всех $n \geq 1$ верна оценка $C_{02} \leq 0.4215$. Заметим, что вычисления проводились на обычном персональном компьютере.

Однако при достаточно малом $\varepsilon > 0$ номер N_ε может быть настолько большим, что проверка неравенства $C_{02}(\overline{N_\varepsilon}) < C_E$ потребует более мощной вычислительной техники.

Пусть $\varepsilon = 0.4099539 - C_E = 0.0002217 \dots$. Вследствие [8, теорема 1.1] имеем $N_\varepsilon = 500000$ и $C_{02}(\overline{N_\varepsilon}) \leq 0.4099539$. Чтобы доказать справедливость оценки $C_{02} \leq 0.4099539$ при всех $n \geq 1$, остается проверить это неравенство для $1 \leq n \leq 500000$. На самом деле, как показали вычисления и дополнительный анализ, справедливо более сильное неравенство: $C_{02}(\overline{500000}) < C_E$. Вычисления проводились на суперкомпьютере Blue Gene/P ВЦ ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

2. Кратко о вычислениях и аргументации

Пусть X, X_1, X_2, \dots, X_n последовательность независимых случайных величин с одним и тем же распределением: $\mathbf{P}(X=1)=p$, $\mathbf{P}(X=0)=q=1-p$. Далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$F_{n,p}(x) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i < x\right), \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt, \quad G_{n,p}(x) = \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$\Delta_n(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{n,p}(x) - G_{n,p}(x)|, \quad \rho(p) = \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{pq}}, \quad K_n(p) = \frac{\Delta_n(p)\sqrt{n}}{\rho(p)}.$$

Величина $\sup_{n \geq 1} \sup_{p \in (0, 0.5]} K_n(p)$ суть абсолютная постоянная в неравенстве

Берри – Эссеена, если его рассматривать не для всех распределений с конечным абсолютным третьим моментом, а только для класса двухточечных распределений. В настоящей работе решается задача вычисления $K(n) = \sup_{p \in (0, 0.5]} K_n(p)$ для всех таких n , что $1 \leq n \leq 5 \cdot 10^5$.

Заметим, что при фиксированных n и p супремум $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{n,p}(x) - G_{n,p}(x)|$ достигается в некоторой точке разрыва функции $F_{n,p}(x)$. Таким образом, можно искать сначала

$$\Delta_n(p) = \max_{0 \leq i \leq n} \{|F_{n,p}(i) - G_{n,p}(i)|, |F_{n,p}(i+0) - G_{n,p}(i)|\}, \quad (1)$$

где i – целые, а затем $K(n)$.

Отметим, что вместо отрезка $[0, 0.5]$ (для параметра p) мы можем иметь дело с более узким отрезком, причем отделенным от нуля, а именно, с отрезком $I = [0.1689, 0.5]$. Основанием для этого служит следующее утверждение.

Лемма 1. Если $0 < p \leq 0.1689$, то $K_n(p) < 0.4096$ при любом $n \geq 1$.

Лемма 1 выводится с помощью модифицированного неравенства Берри – Эссеена с числовыми константами, доказанного в [10].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть S – равномерная сетка на I с шагом $h = 10^{-12}$. Если $p \in I$, а p' – узел сетки S , ближайший к p , то при всех $1 \leq n \leq 500000$

$$|K_n(p) - K_n(p')| \leq 2 \cdot 10^{-8}.$$

Доказательство теоремы 1 весьма громоздко и здесь не приводится из-за ограничений на объем статьи.

Результат вычислений. При всех $1 \leq n \leq 500000$

$$\max_{p_j \in S} K_n(p_j) < 0.40973214. \quad (2)$$

Алгоритм счета представляет собой тройной цикл: цикл по параметру i (см. (2)) вложен в цикл по параметру p , который в свою очередь вложен в цикл по параметру n .

С ростом n время вычислений быстро росло. К примеру, при $2000 \leq n \leq 2100$ вычисления заняли более 3 часов на компьютере с процессором Core2Duo E6400. Для $2101 \leq n \leq 500000$ вычисления проводились на суперкомпьютере Blue Gene/P ВЦ ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Из [11, Следствие 7] вытекает, что в цикле по i нужно перебирать не все значения i от 0 до n , а лишь те, которые удовлетворяют неравенству $np - (\nu + 1)\sqrt{npq} \leq i \leq np + \nu\sqrt{npq}$, где $\nu = \sqrt{3 + \sqrt{6}}$ при условии,

что $n > 200$. Это привело к значительному сокращению времени вычислений. Например, для промежутка $10000 \leq n \leq 11024$ машинное время составило около 3 минут (без учёта ожидания очереди). Заметим, что вычисления на суперкомпьютере для $490000 \leq n \leq 500000$ продолжались 7 часов. Программа написана на языке программирования C+MPI и зарегистрирована [12].

Из теоремы 1, леммы 1 и (2) следует, что при всех $1 \leq n \leq 500000$ и $p \in (0, 0.5]$ справедлива оценка $K_n(p) < 0.40973216$. Нетрудно обосновать, что это неравенство верно и при $p \in (0.5, 1)$.

3. Заключение

Установлено, что для всех $n \leq 500000$ справедлива оценка $C_{02} < C_E$. В силу аналитического результата Нагаева и Чеботарева 2011 г. [8] тогда справедлива оценка $C_{02} < 0.4099539$ (при всех $n \geq 1$). Заметим, что $0 < 0.4099539 - C_E < 0.0002218$.

Благодарности

Мы благодарим В.Ю. Королева, зав. кафедрой математической статистики ВМК МГУ, И.Г. Шевцову, доцента той же кафедры, за содействие в получении возможности использовать суперкомпьютер, Гуляева А.В., зам. декана факультета ВМК МГУ, и Коробкова С.В., главного администратора ЦОД, за предоставленную возможность проводить вычисления без очереди.

Литература

1. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem // Scand. Aktuarietidskr. J. — 1956. — Vol. 3–4. — P. 1–170.
2. *Золотарев В.М.* Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен. — 1966. — Т. 11, вып. 1. — С. 108–119.
3. *Королев В. Ю., Шевцова И. М.*, О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена // Теория вероятн. и ее примен. — 2009. — Т. 53, вып. 4. — С. 671–695.
4. *Шевцова И. М.*, Оптимизация структуры моментных оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин. — Дисс. на соискание уч. степ. д. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2013.
5. *Zolotarev V. M.*, A sharpening of the inequality of Berry – Esseen // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. — 1967. — Vol. 8. — P. 332–342.

6. *Hipp C., Mattner L.* On the normal approximation to symmetric binomial distribution // Теория вероятн. и ее примен. — 2007. — Т. 52, вып. 3. — С. 610–617.
7. *Schulz J.* The optimal Berry–Esseen constant in the binomial case. — Dissertation. Universität Trier, 2016.
8. *Нагаев С. В., Чеботарев В. И.* Об оценке близости биномиального распределения к нормальному // Теория вероятн. и ее примен. — 2011. — Т. 56, вып. 2. — С. 248–278.
9. *Нагаев С. В., Михайлов К. В., Чеботарев В. И.* Об оценке близости биномиального распределения к нормальному для ограниченного числа наблюдений. — Препринт 2010/160. Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2010.
10. *Королев В. Ю., Шевцова И. М.*, Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским суммам // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2010. — Т. 17, вып. 1. — С. 25–56.
11. *S. V. Nagaev, V. I. Chebotarev, A. Ya. Zolotukhin* On a non-uniform bound of the remainder term in Central Limit Theorem for Bernoulli random variables // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 214, no. 1. — P. 83–100.
12. *Золотухин А. Я.* Программа вычисления оценки главного члена в центральной предельной теореме распределения Бернулли для ограниченного числа наблюдений. — Свидет. о госуд. рег. программы для ЭВМ № 2015617151 от 01.06.2015.

UDC 519.214.4, 519.671, 519.651.1

On calculating the absolute constant in the Berry–Esseen inequality for two-point distributions

A. Ya. Zolotukhin*, S. V. Nagaev[†], V. I. Chebotarev[‡]

* *Department of Computational Mechanics and Mathematics,
Tula State University,*

Lenin avenue, 92a, Tula, 300012, Russia

[†] *Sobolev Institute of mathematics,
pr. Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia*

[‡] *Computing Center FEB RAS,
Kim Yu Chen st., 65, Khabarovsk, 680000, Russia*

It is shown in the paper that the absolute constant C_{02} in the Berry–Esseen inequality for Bernoulli random variables is less than the Esseen constant C_E , if $n \leq 500000$, where n is the number of summands. Then the bound $C_{02} < 0.4099539$ (for all $n \geq 1$) follows from the analytic result obtained by Nagaev and Chebotarev in 2011.

Keywords: optimal value of the absolute constant in the Berry–Esseen inequality, binomial distribution, computational methods.

Transient Analysis of a Multi-Server Queuing Model with Discouraged Arrivals and Retention of Reneging Customers

R. Kumar*, S. Sharma*

** Department of Mathematics,
Shri Mata Vaishno Devi University, Katra
Jammu and Kashmir, India-182320*

Abstract. In this paper, we study a finite capacity Markovian multi-server queuing system with discouraged arrivals, reneging, and retention of reneging customers. The transient state probabilities of the queuing system are obtained by using a computational technique based on the 4th order Runge- Kutta method. With the help of the transient state probabilities, we develop some important measures of performance of the system, such as time-dependent expected system size, time-dependent expected reneging rate, and time-dependent expected retention rate. The transient behavior of the system size probabilities and the expected system size is also studied. Further, the variations in the expected system size, the expected reneging rate, and the expected retention rate with respect to the probability of retaining a reneging customer are also studied. Finally, the effect of discouraged arrivals in the same model is analyzed.

Keywords: transient analysis, reneging, discouraged arrivals, multi-server queuing system, retention.

1. Introduction

Queuing systems are used in the design and analysis of computer-communication networks, production systems, surface and air traffic systems, service systems etc. Queuing systems with customers' impatience have attracted a lot of attention because impatience leads to loss of potential customers. Pioneer works in queuing theory involving impatient customers include that of Haight (1959), and Ancker and Gafarian [(1963a), (1963b)]. Queuing systems with discouraged arrivals are widely studied due to their significant role in managing daily queueing situations. In many practical situations, the service facility possesses defense mechanisms against long waiting lines. For instance, the congestion control mechanism prevents the formation of long queues in computer and communication systems by controlling the transmission rates of packets based on the queue length(of packets) at source or destination. Moreover, a long waiting line may force the servers to increase their rate of service as well as discourage prospective customers which results in balking. Hence, one should study queueing systems by taking into consideration the state-dependent nature of the system. In state-dependent queues the arrival and service rates depend on the number of customers in the system. The discouragement

affects the arrival rate of the queueing system. Customers arrive in a Poisson fashion with rate that depends on the number of customers present in the system at that time i.e. $\frac{\lambda}{n+1}$. Morse (1958) considers discouragement in which the arrival rate falls according to a negative exponential law.

Queueing systems with customers' impatience have negative impact on the performance of the system, because it leads to the loss of potential customers. Kumar and Sharma (2012a) take this practically valid aspect into account and study an $M/M/1/N$ queueing system with renegeing and retention of renegeing customers. Kumar (2013) obtains the transient solution of an $M/M/c$ queue with balking, renegeing and retention of renegeing customers. Kumar and Sharma (2012b) study a finite capacity multi server Markovian queueing model with discouraged arrivals and retention of renegeing customers. They derive steady-state solution of the model.

The steady-state results do not reveal the actual functioning of the system. Moreover, stationary results are mainly used within the system design process and it cannot give insight into the transient behavior of the system. That is why, we extend the work of Kumar and Sharma (2012b) in the sense that the transient analysis of the model is performed. The transient numerical behavior is studied by using a numerical technique Runge-Kutta method.

2. Queueing Model Description

The queueing model is based on following assumptions:

1. The customers arrive to the queueing system according to a Poisson process with parameter λ . A customer finding every server busy arrive with arrival rate that depends on the number of customers present in the system at that time i.e. if there are n ($n > c$) customers in the system, the new customer enters the system with rate $\frac{\lambda}{n-c+1}$.
2. There are c servers and the service time distribution is negative exponential with parameter μ . The mean service rate is given by $\mu_n = \{n\mu; 0 \leq n \leq c - 1$ and $c\mu; n \geq c\}$.
3. Arriving customers form a single waiting line based on the order of their arrivals and are served according to the first-come, first-served (FCFS) discipline.
4. The capacity of the system is finite (say N).
5. A queue gets developed when the number of customers exceeds the number of servers, that is, when $n > c$. After joining the queue each customer will wait for a certain length of time T (say) for his service to begin. If it has not begun by then he may get renege with probability p and may remain in the queue for his service with probability q ($= 1 - p$) if certain customer retention strategy is used. This time T is a random variable which follows negative exponential distribution with parameter ξ . The renegeing rate is given by

$$\xi_n = \begin{cases} 0, & 0 < n \leq c \\ (n - c)\xi, & n \geq c + 1 \end{cases}$$

6. Initially there is no customer in the system.

Let $P_n(t), n \geq 0$ be the probability that there are n customers in the system at time t .

The differential-difference equations of the model are:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t), 1 \leq n < c$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} = & - \left[\left(\frac{\lambda}{n-c+2} \right) + c\mu + (n-c)\xi p \right] P_n(t) + \\ & + \left(\frac{\lambda}{n-c+1} \right) P_{n-1}(t) + (c\mu + (n-c+1)\xi p) P_{n+1}(t), \\ & c \leq n < N \end{aligned}$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = \left(\frac{\lambda}{N-c+1} \right) P_{N-1}(t) - (c\mu + (N-c)\xi p) P_N(t)$$

3. Transient analysis of the model

In this section, we perform the transient analysis of a finite capacity multi-server Markovian Queuing model with discouraged arrivals and retention of reneging customers using Runge-Kutta method of fourth order (R-K 4). The “ode45” function of MATLAB software is used to find the transient numerical results corresponding to the differential-difference equations of the model.

We study the following performance measures in transient state:

1. Average Reneging Rate ($R_r(t) = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\xi p P_n(t)$)
2. Average Retention Rate ($R_R(t) = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\xi q P_n(t)$)

Now, we perform the transient numerical analysis of the model with the help of a numerical example. We take $N = 10, \lambda = 3, \mu = 5, \xi = 0.1, p = 0.4$ and $c = 3$. The results are presented in the form of Figures 1-3. Following are the main observations:

- (a) In Figure 1, the probabilities of number of customers in the system at different time points are plotted. We observe that the probability values $P_1(t), P_2(t), \dots, P_{10}(t)$ increase gradually until they reach stable values except the probability curve $P_0(t)$ which decreases rapidly in the beginning and then attains steady-state with the passage of time.

- (b) The variation in average retention rate with probability of retention is shown in Figure 2. We can see that there is a proportional increase in $R_R(t)$ with increase in q , which justifies the functioning of the model.
- (c) In figure 3, the impact of discouraged arrivals on the performance of the system is shown. We compare two multi server finite capacity Markovian queuing systems having retention of renegeing customers with and without discouraged arrivals. One can see from Figure 3 that the expected system size is always lower in case of discouraged arrivals as compare to the queuing model without discouragement.

4. Conclusions

The transient analysis of a multi-server queuing system with discouraged arrivals, renegeing and retention of renegeing customers is performed by using Runge Kutta method. The numerical results are computed with the help of MATLAB software. The effect of probability of retaining a renegeing customer on various performance measures is studied. We also study the impact of discouraged arrivals on the system performance.

Acknowledgments

One of the authors Dr. Rakesh Kumar would like to thank the UGC, New Delhi, India, for financial support given to him for this research work under the Major Research Project vide Letter No. F.-43-434/2014(SR).

References

1. *Ancker. Jr., C.J., Gafarian A.V.* Some queuing problems with balking and renegeing I. // *Oper. Res.* — 1963. — Vol. 11. — P. 88–100
2. *Ancker. Jr., C.J., Gafarian A.V.* Some queuing problems with balking and renegeing II. // *Oper. Res.* — 1963. — Vol. 11. — P. 928–937.
3. *Haight, F. A.* Queuing with renegeing // *Metrika.* — 1959. — Vol. 2. — P. 186–197.
4. *Kumar, R. and Sharma, S. K.* An M/M/1/N queuing system with retention of renegeed customers // *Pak. J. Stat. Oper. Res.* — 2012. — Vol. 8. — P. 859–866.
5. *Kumar, R. and Sharma, S. K.* A Multi-Server Markovian Queueing System with Discouraged Arrivals and Retention of Renegeed Customers // *Int. J. Oper. Res.* — 2012. — Vol. 9, no. 4. — P. 173–184.
6. *Kumar, R.* Economic analysis of an M/M/c/N queuing model with balking, renegeing and retention of renegeed customers // *Opsearch.* — 2013. — Vol. 50. — P. 383-403.
7. *Morse, P.M.* Queues, inventories and maintenance. — Wiley, New York, 1958.

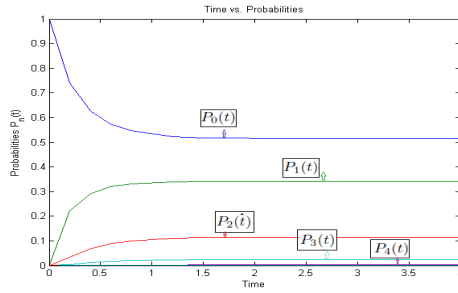


Figure 1. The probability values for different time points are plotted for the case $\lambda = 3, \mu = 5, \xi = 0.1, p = 0.4$ and $c = 3$

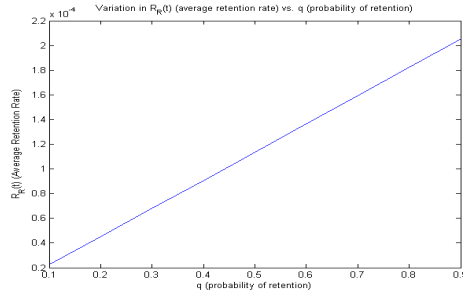


Figure 2. Variation of average retention rate with the variation in probability of retention for the case $\lambda = 3, \mu = 5, \xi = 0.1, p = 0.4, c = 3, t = 0.8$, and $q = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$

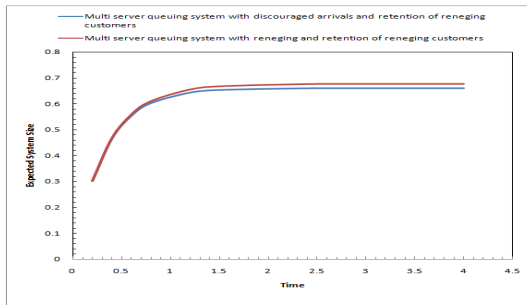


Figure 3. The impact of discouragement on expected system size

UDC 519.21

The Asymptotic Estimation The System Refuse Intensively When Elements Are Repaired Without Waiting And Elements That Have Reach The Repair Return Into The System With Minimal Standby Beginning Off any Quantity

A. V. Makarichev*, I. V. Brysina†

* *Department of Transportation Systems and Logistics,
Kharkiv National Automobile and Highway University,
Yaroslav Mudry str. 25, Kharkiv, 61002, Ukraine*

† *Department of Higher Mathematics and System Analysis,
N. Ye. Zhukovskiy National Aerospace University
«Kharkiv Aviation Institute»,
Chkalov str. 17, Kharkiv, 61070, Ukraine*

Abstract. The asymptotic estimation the system refuse intensity when elements are repaired without waiting and elements that have reach the repair return into the system with minimal standby beginning off any quantity are obtained.

Keywords: return into the system with minimal standby beginning off any quantity.

1. Introduction

In work [1] for complexes of the restored systems with a cold reserve for a wide class of repair service systems the rule of return of the restored elements to systems with the minimum reserve that allows to increase significantly of systems and complexes when number of reserve elements in systems not less then two is considered. Further as repair system the system like $M|G|_{\infty}$ is considered.

2. Main section

The group of N identical repairable systems with n standby is considered. Failed elements of each system are to be repaired. We assume that the stream of repairing demands from every system is Poisson with parameter λN^{-1} . Every failed element immediately enters the unlimited repair facility so that its repairing starts immediately. Each element after it has been repaired returns into that system which has the largest group beginning off ℓ ($\ell \geq 2$) of faulty elements. Let $G(x)$ be the distribution function of random repairing time of element. Repairing times of different elements are independent and identically distributed. We use the notation

$$m_1 = \int_{x \geq 0} x dG(x).$$

Let $\rho = \lambda m_1$ be the total load to repair facility formed by all systems. Let $\Lambda_j(r_0)$ be the refuse intensity of the j system ($1 \leq j \leq N$).

Theorem *Suppose there exists finite first moment $m_1 < \infty$. Then for any natural number $n \geq 2$ and $\ell \geq 2$ we have*

$$\Lambda_j(r_0) \leq B(\lambda, N, G, \ell, n),$$

where

$$\begin{aligned} B(\lambda, N, G, \ell, n) &= \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{n+1} \int \cdots \int_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n} \exp\left(-\frac{\lambda x_n}{N}\right) \times \\ &\times \left\{ \prod_{r=1}^{\ell-1} [1 - G(x_n - x_r)] \right\} \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^k}{k!} \exp(-\rho) \left\{ \frac{1}{m_1} \int_{x_n - x_{\ell-1}}^{\infty} [1 - G(t)] dt \right\}^k \times \\ &\times \left\{ \prod_{j=\ell}^{n-1} [1 - G(x_n - x_j)] \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \\ &\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{n+1} \frac{\exp(-\rho)}{(\ell-1)!} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left[\int_{t \geq 0} [1 - G(t)] \exp\left(-\frac{\lambda t}{N}\right) dt \right]^{k+n}}{(k+\ell)(k+\ell+1) \dots (k+\ell+n)} \leq \\ &\leq B(\lambda, N, G, \ell, n) \leq \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{N}\right) \left(\frac{\rho}{N}\right)^n \frac{\exp(-\rho)}{(\ell-1)!} \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^k}{k!} \frac{1}{(k+\ell)(k+\ell+1) \dots (k+\ell+n)} \end{aligned}$$

and for $\frac{\rho}{N} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} B(\lambda, N, G, \ell, n) &\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right) \left(\frac{\rho}{N}\right)^n \frac{\exp(-\rho)}{(\ell-1)!} \times \\ &\times \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^k}{k!} \frac{1}{(k+\ell)(k+\ell+1) \dots (k+\ell+n)}. \end{aligned}$$

3. Conclusions

The top estimates (and their asymptotic) for intensity of refusals of systems allow to estimate from below effect from use of the rule r_0 returns of the restored elements to systems with the minimum reserve in comparison with the usual rule r of return of the restored elements to those systems where they refused, a case when number of reserve elements in system not less than two.

References

1. *Makarichev A. V.* Optimal Allocation of Elements in a Complex of Renewable Standby Systems // *Theory Probab. Appl.* — 1995. — Vol. 40, no. 1. — P. 66–75.

Надежность систем в комплексах с восстановлением и абсолютным приоритетом в обслуживании элементов систем с минимальным резервом при большой нагрузке

А. В. Макаричев*, В. А. Макаричев†

* *Кафедра транспортных систем и логистики,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет,
ул. Ярослава Мудрого, 25, Харьков, Украина, 61002*

† *Кафедра высшей математики и системного анализа,
Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»,
ул. Чкалова, 17, Харьков, Украина, 61070*

Аннотация. Рассмотрена надежность восстанавливаемых систем в комплексах с абсолютным приоритетом в обслуживании элементам из систем с минимальным резервом при любой допустимой нагрузке.

Ключевые слова: надежность систем в комплексах, абсолютный приоритет в обслуживании элементов из систем с минимальным резервом.

1. Введение

В настоящей работе продолжается исследование, связанное с идеей приоритета в ремонтном обслуживании элементов из систем с минимальным числом резервных элементов, которая с точки зрения возвращения восстановленных элементов в системы с минимальным резервом была рассмотрена в работе [1].

2. Основная часть

Рассмотрим комплекс из N восстанавливаемых систем. Интенсивность отказа элементов из каждой систем равна λN^{-1} . Обслуживание отказавших элементов идет в порядке поступления с абсолютным приоритетом для элементов из систем с максимальным числом отказавших элементов и дообслуживанием прервавших свое обслуживание элементов в однолинейной системе массового обслуживания (РО). Пусть $G(x)$ - функция распределения времени обслуживания отказавшего элемента. Отказ системы наступает в случае отказа $n + 1$ элементов из этой системы. Отказ комплекса наступает в случае отказа хотя бы одной из систем комплекса. Обозначим

$$m_k = \int_{x \geq 0} x^k dG(x),$$

а $\rho = \lambda m_1$ нагрузку на систему обслуживания.

Пусть

$$b_{n-1}^G = \int_{x \geq 0} \left(\frac{\lambda}{N} \right) \left(\frac{\lambda x}{N} \right)^{n-1} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda x}{N}\right)}{(n-1)!} [1 - G(x)] dx,$$

$$b_0^{G_{ocm}} = \frac{\lambda}{N} \int_{x \geq 0} \exp\left(-\frac{\lambda x}{N}\right) \int_{t > x} \frac{1 - G(t)}{m_1} dt dx,$$

$$\lambda_- = \lambda - \frac{\lambda}{N}, \quad \rho_- = \lambda_- m_1.$$

Обозначим через τ_j время от момента, когда в РО нет на обслуживании неисправных элементов до отказа j -й системы комплекса.

Теорема. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_2 < \infty$. Тогда

$$P\{\Lambda\tau_j > x\} \rightarrow \exp(-x) \text{ при } \frac{\lambda m_2}{Nm_1(1-\rho)^{1,5}} \rightarrow 0,$$

где $\Lambda_j^- \leq \Lambda \leq \Lambda_j^+$,

$$\Lambda_j^- = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho_-)} \frac{\lambda}{N} \left[b_{n-1}^{(G)} + \rho b_0^{(G_{ocm})} b_{n-2}^{(G)} + \frac{\lambda_- m_2}{2(1-\rho_-)} b_0^{(G)} b_{n-2}^{(G)} \right],$$

$$\Lambda_j^+ = \frac{\lambda}{N} \left[b_{n-1}^{(G)} + \rho b_0^{(G_{ocm})} b_{n-2}^{(G)} + \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)} b_0^{(G)} b_{n-2}^{(G)} \right], \quad 1 \leq j \leq N.$$

3. Заключение

Приведенные оценки для интенсивности отказов систем в комплексах восстанавливаемых систем с абсолютным приоритетом в обслуживании отказавших элементов из систем с минимальным резервом позволяют определить возможный эффект от использования этого обслуживания в сравнении с обычным обслуживанием отказавших элементов в порядке их поступления при любой допустимой нагрузке.

Литература

1. Макаричев А. В. Оптимальное распределение элементов в комплексе восстанавливаемых систем с холодным резервом // Теория вероятностей и ее применения. — 1995. — Т. 40, вып. 1. — С. 84–95.

Reliability Of Systems in Complexes with the Restoration and the Absolute Priority of Service Elements with Minimal Reserve Systems Under Heavy Load

A. V. Makarichev*, V. A. Makarichev†

** Department of Transportation Systems and Logistics,
Kharkiv National Automobile and Highway University,
Yaroslav Mudry str. 25, Kharkiv, 61002, Ukraine*

*† Department of Higher Mathematics and System Analysis,
N. Ye. Zhukovsky National Aerospace University
«Kharkiv Aviation Institute»,
Chkalov str. 17, Kharkiv, 61070, Ukraine*

Reliability of systems in complexes with the restoration and the absolute priority of service elements with minimal reserve systems under heavy load are considered.

Keywords: reliability of systems, the absolute priority of service elements with minimal reserve systems.

УДК 519.21

Оценка вероятности отказа системы с минимальным накоплением обслуживания элементов

А. В. Макаричев*

* *Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет,
ул. Ярослава Мудрого, 25, Харьков, Украина, 61002*

Аннотация. Получены оценки надежности восстанавливаемых систем с минимальным накоплением обслуживания элементов.

Ключевые слова: вероятность отказа восстанавливаемой системы на периоде регенерации, минимальное накопление обслуживания элементов.

1. Введение

В настоящей работе продолжаются исследования А.Д. Соловьева и его учеников в области получения оценок для вероятности отказа восстанавливаемых резервированных систем на периоде регенерации. Одна из таких верхних оценок несколько другим методом может быть слегка улучшена, что позволяет при обычном дублировании свести ее к нижней оценке и тем самым к точному значению исследуемой вероятности. Этому и посвящается следующее исследование.

2. Основная часть

В ремонтный орган (РО), представляющий собой однолинейную систему массового обслуживания, поступает пуассоновский поток с параметром λ требований на восстановление элементов. Требования обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания требований независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $H(x)$. Обозначим

$$h(s) = \int_{x>0} \exp(-sx) dH(x)$$

преобразование Лапласа для времени η обслуживания требования. Во время обслуживания требования с интенсивностью ν возникает простейший поток накопления обслуживания. В зависимости от числа k точек этого простейшего потока за время обслуживания требования возникает дополнительный набор из независимых одинаково распределенных с ф.р. $F(x)$ случайных времен X_1, X_2, \dots, X_k , из которых

выбирается условный минимум $X_{min}^{(k)} = \min\{X_1, \dots, X_k\}$ с функцией распределения

$$F^{(k)}(x) = 1 - P\{X_{min}^{(k)} > x\} = 1 - \prod_{j=1}^k P\{X_j > x\} = 1 - \prod_{j=1}^k \bar{F}^j(x)$$

и он добавляется ко времени обслуживания требования, здесь $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Пусть

$$\bar{R}(x) = \int_{t>0} \sum_{k \geq 0} \frac{(\nu t)^k}{k!} \exp(-\nu t) [\bar{F}(x)]^k dH(t) = h\{-\nu[F(x)]\}$$

- функция, дополняющая до единицы функцию распределения

$$R(x) = 1 - \bar{R}(x)$$

безусловного минимума X_{min} возможно дополнительно возникшего времени ко времени обслуживания требования. А

$$G(x) = P\{\eta + X_{min} \leq x\} = \int_0^x R(x-t)dH(t)$$

- функция распределения суммарного времени обслуживания требования.

После восстановления элемент возвращается туда, откуда он потул. Случайный процесс обслуживания в момент времени t задаётся числом элементов на обслуживании в РО. Он является регенерирующим. Моментами регенерации являются моменты перехода случайного процесса в состояние $\{0\}$ (в РО нет требований). В момент перехода этого случайного процесса из состояния $\{n\}$ в состояния $\{n+1\}$ наступает отказ, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через q вероятность отказа на периоде регенерации этого случайного процесса обслуживания.

Пусть $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$ и

$$b_{n-1} = \int_0^{\infty} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x) \bar{G}(x) dx.$$

Лемма 1. Пусть для чисел $a_{ij} \geq 0$, $b_i > 0$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ известно, что

$$x_i \leq b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда для всех справедливо неравенство

$$x_i \leq \frac{b_i}{1 - \alpha}, \text{ где } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} b_j}{b_i}.$$

Доказательство. Из условия леммы $0 < x_j \leq b_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда для всех $j = 1, 2, \dots, n$ верно $x_j = \frac{b_j}{1 - \alpha_j}$, где $\alpha_j = 1 - \frac{b_j}{x_j}$.

Пусть $\alpha_k = \max_{1 \leq j \leq n} \alpha_j$. Тогда из условия и последнего равенства верна цепочка соотношений

$$\begin{aligned} b_k \left(1 + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_k} \right) &= \frac{b_k}{1 - \alpha_k} = x_k \leq b_k + \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \\ &= b_k \left(1 + \frac{1}{b_k} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right) = b_k \left(1 + \frac{1}{b_k} \sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{b_j}{1 - \alpha_j} \right) \leq \\ &\leq b_k \left(1 + \frac{1}{b_k(1 - \alpha_k)} \sum_{j=1}^n a_{kj} b_j \right). \end{aligned}$$

Сравнивая левую и правую части этих соотношений, мы видим, что

$$b_k \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha_k} \right) \leq b_k \left(1 + \frac{1}{b_k(1 - \alpha_k)} \sum_{j=1}^n a_{kj} b_j \right),$$

и отсюда верны неравенства

$$\alpha_j \leq \alpha_k \leq \sum_{j=1}^n \frac{a_{kj} b_j}{b_k} \leq \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} b_j}{b_i}.$$

Следовательно, для всех $j = 1, 2, \dots, n$ верно $x_j = \frac{b_j}{1 - \alpha_j} \leq \frac{b_j}{1 - \alpha}$.

Лемма 2. Для любых неотрицательных целых чисел i, j верно $b_i b_j \leq C_{i+j}^i b_0 b_{i+j}$. Доказательство. Обозначим

$$f(x) = \frac{\lambda \exp(-\lambda x) \bar{G}(x)}{\int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda x) \bar{G}(x) dx}$$

и

$$M_i = \int_0^{\infty} x^i f(x) dx.$$

Заметим, что $M_i = \frac{i!b_i}{\lambda^i b_0}$. Отсюда и неравенства для моментов [1] $M_i M_j \leq M_{i+j}$ следует цепочка соотношений

$$\begin{aligned} b_i b_j &= \frac{b_0^2}{i!j!} \frac{i!b_i}{\lambda^i b_0} \frac{j!b_j}{\lambda^j b_0} \lambda^{i+j} = \lambda^{i+j} \frac{b_0^2}{i!j!} M_i M_j \leq \lambda^{i+j} \frac{b_0^2}{i!j!} M_{i+j} = \\ &= \lambda^{i+j} \frac{b_0^2}{i!j!} \frac{(i+j)!b_{i+j}}{\lambda^{i+j} b_0} = C_{i+j}^i b_0 b_{i+j}, \end{aligned}$$

то есть $b_i b_{i+j} \leq C_{i+j}^i b_0 b_{i+j}$.

Обозначим через $q_r(n+1)$ условную вероятность отказа на периоде регенерации при условии, что в его начале в РО находятся ровно r полных требований на восстановление элементов, $r = 1, 2, \dots, n-1$ (напомним, отказ наступает в случае в момент перехода системы из состояния $\{n\}$ в состояние $\{n+1\}$, то есть когда неисправными окажутся $n+1$ элементов).

Теорема. *Для всех натуральных чисел n верно неравенство*

$$q = q_1(n+1) \leq \frac{n-1}{1-b_0(2^{n-1}-1)}.$$

Доказательство. Обозначим через j - число отказавших элементов за время восстановления первого отказавшего элемента на периоде занятости РО по формуле полной вероятности запишем

$$q_1(n+1) = b_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j q_j(n+1).$$

По формуле полной вероятности записываем выражение для вероятности отказа $q_r(n+1)$, когда вначале периода занятости в РО ровно r (не менее двух) полных требований,

$$q_r(n+1) = b_{n-r} + \sum_{j=0}^{n-r} a_j q_{r-1+j}(n+1), \quad 2 \leq r \leq n.$$

Заметим, что $a_0 = 1 - b_0$ и $a_j = b_{j-1} - b_j$, $j \geq 1$. Эти равенства и преобразование Абеля позволяют записать и оценить сверху вторые

слагаемые в правых частях последних двух серий выражений соответственно в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} a_j q_j(n+1) &= \sum_{j=1}^{n-1} [b_{j-1} - b_j] q_j(n+1) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} b_j [q_j(n+1) - q_{j-1}(n+1)] - b_{n-1} q_{n-1}(n+1) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} b_{j-1} [q_j(n+1) - q_{j-1}(n+1)] \end{aligned}$$

(здесь по определению считаем $q_0(n+1) = 0$),

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-r} a_j q_{r-1+j}(n+1) &= \sum_{j=1}^{n-r} [b_{j-1} - b_j] q_{r-1+j}(n+1) + [1 - b_0] q_{r-1}(n+1) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-r} b_{j-1} [q_{r-1+j}(n+1) - q_{r-2+j}(n+1)] - b_{n-r} q_{n-1}(n+1 + q_{r-1}(n+1)) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-r} b_{j-1} [q_{r-1+j}(n+1) - q_{r-2+j}(n+1)] + q_{r-1}(n+1) \end{aligned}$$

для $2 \leq r \leq n$.

Обозначим через $\gamma_{n-j+1}(n+1) = q_j(n+1) - q_{j-1}(n+1)$, $2 \leq j \leq n-1$. По определению $\gamma_n(n+1) = q_1(n+1)$. Подставляя вместо вторых слагаемых в правых частях вышеозначенных выражений полученные верхние оценки для них, перенося последние слагаемые (для r не менее двух) справа налево, преобразуем наши выражения для вероятностей отказов в виде равенств в неравенства для них и их разностей соответственно

$$\gamma_n(n+1) \leq b_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j-1} \gamma_{n-(j-1)}(n+1)$$

для $r = 1$ и

$$\gamma_{n+1-r}(n+1) \leq b_{n-r} + \sum_{j=1}^{n-r} b_{j-1} \gamma_{n+1-r-(j-1)}(n+1)$$

для $2 \leq r \leq n$. Для этой системы неравенств в условиях леммы 1 матрица $A = \{a_{ij}\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 \\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & b_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вышеупомянутой системы неравенств используем лемму 1, взяв $x_i = \gamma_{n+1-i}(n+1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Из этой системы неравенств согласно лемме 1

$$\gamma_n(n+1) = q_1(n+1) \leq \frac{b_{n-1}}{1-\alpha}, \text{ где } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{b_{j-1}b_{n-j}}{b_{n-1}}.$$

Согласно лемме 2 для всех целых $1 \leq j \leq n$ верно неравенство $b_{j-1}b_{n-j} \leq C_{n-1}^{j-1}b_0b_{n-1}$ и

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{b_{j-1}b_{n-j}}{b_{n-1}} \leq b_0 \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n-i} C_{n-1}^{j-1} = b_0 \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^{j-1} = b_0(2^{n-1}-1).$$

Получив верхнюю оценку для величины α , $\alpha \leq b_0(2^{n-1}-1)$, мы тем самым оценили и вероятность отказа системы на периоде регенерации случайного процесса в модели резервирования с восстановлением

$$q = q_1(n+1) \leq \frac{b_{n-1}}{1-b_0(2^{n-1}-1)}.$$

Следствие. Для вероятности отказа q верна двусторонняя оценка

$$b_{n-1} \leq q = q_1(n+1) \leq \frac{b_{n-1}}{1-b_0(2^{n-1}-1)}, n = 1, 2, \dots$$

3. Заключение

Для простого дублирования, когда $n = 1$, эта оценка даёт точное значение для вероятности $q_1(2) = b_0$ (сравните с полученной другим методом похожей верхней оценкой великого нашего учителя А.Д. Соловьёва (с. 98–100 в [2]), в которой отсутствует вычитаемая единица в

скобках в знаменателе). Стоит также отметить, что при числе резервных элементов $n = 2$ величина в скобках в знаменателе у новой оценки вдвое меньше, чем соответствующий множитель у верхней оценки этой вероятности в замечательном труде [2].

Литература

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.
2. Вопросы математической теории надежности / Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко, А. Д. Соловьев, И. А. Ушаков / Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Радио и связь, 1983.

UDC 519.21

Assessment of the Probability of System Failure with Minimum Service Accumulation Elements

A. V. Makarichev*

* *Kharkiv National Automobile and Highway University,
Yaroslav Mudry str. 25, Kharkiv, 61002, Ukraine*

Assessment of the probability of system failure with minimum service accumulation elements are obtained.

Keywords: the probability of system failure, minimum service accumulation elements.

Numerical Solving of Relativistic Schrödinger Equation with Random Quasipotential

I. S. Kolosova*, S. A. Vasilyev*

* *Department of Applied Probability and Informatics,
RUDN University,
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

Abstract. In this paper we consider the numerical solutions of the relativistic Schrödinger equation (the singularly perturbed differential equation of the infinite order) with the random quasipotential. We formulate for this equation the boundary value problems on the interval $[0, r_0]$, the boundary value problem with periodic and antiperiodic boundary conditions on the interval $[0, r_0]$ and the boundary value problem on the positive half-line $[0, +\infty)$. The numerical analysis of eigenfunctions and eigenvalues for these boundary value problems is made using MatLab eigenvalues and eigenvectors packages.

Keywords: stochastic process, random quasipotential, relativistic Schrödinger equation, computational methods.

1. Introduction

In the papers [1, 2, 4, 5], the authors considered the relativistic Schrödinger difference equation (Logunov-Tavkhelidze-Kadyshevsky equation, LTK equation) with the quasipotential in the relativistic configurational space for the radial wave functions of bound states for two identical elementary particles without spin

$$[H_0^{rad} + V(r) - 2c\sqrt{q^2 + m^2c^2}]\psi(r, l) = 0, \quad (1)$$

$$H_0^{rad} = 2mc^2 ch \left(\frac{i\hbar}{mc} D \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr \left(r + \frac{i\hbar}{mc} \right)} \exp \left(\frac{i\hbar}{mc} D \right)$$

where m is a mass, q is a momentum, l is an angular momentum of each elementary particle and $V(r)$ is a quasipotential (a piecewise continuous function). Asymptotic solutions of boundary value problems for LTK equation was studied in [1,2]. Boundary value problems with the quasipotential were studied on an interval and on a positive half-line for this equation. Using asymptotic methods solutions were obtained in the form of regular and boundary layer parts. Asymptotic behavior of solutions was investigated when a small parameter $\varepsilon \rightarrow 0$. In papers [1,2], for LTK equation was made the transition from the infinite order equation to the equation of finite order $2m$. For this "cutting" equation (Logunov-Tavkhelidze-Kadyshevsky truncation equation, LTKT equation) have also been formulated boundary value problems on an interval and on a positive half-line, asymptotic

solutions were built for these problems and studied their behavior when the order LTKT equation $m \rightarrow \infty$.

In paper [3], solutions of elliptic and parabolic equations was obtained with oscillatory random potentials.

In this paper the numerical analysis of LTK and LTKT equations are investigated with the random quasipotential. It is studying the boundary value problems on the interval $\mathcal{A} \in [0, r_0]$, the boundary value problem with periodic and antiperiodic boundary conditions on the interval $\mathcal{A} \in [0, r_0]$ and the boundary value problem on the positive half-line $\mathcal{B} \in [0, +\infty)$ for obtaining eigenfunctions and eigenvalues.

2. Statement of the boundary value problems

If in the equation (1) we assume that $h = 1, m = 1, l = 0$ (S -wave function),

$$\varepsilon = \frac{1}{c}, \lambda_{\varepsilon, \infty} = 2q^2 / \sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1, q^2 = (1 + 0.25\varepsilon^2 \lambda_{\varepsilon, \infty}) \lambda_{\varepsilon, \infty},$$

then the equation (1) has the form

$$[\tilde{L}_{\infty}^{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon, \infty}] \psi_{\varepsilon, \infty}(r) = 0, \tag{2}$$

$$\tilde{L}_{\infty}^{\varepsilon} = L_2 + \varepsilon^2 L_{\infty}^{\varepsilon} = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^{2p-2} \hat{L}_{2p} + V_{\varepsilon}(r, \omega),$$

$$\hat{L}_{2p} = \frac{2(-1)^p}{(2p)!!} D^{2p}, L_2 = -D^2 + V_0(r), D^p = d^p / dr^p,$$

where $V_{\varepsilon}(r; \omega)$ is a random quasipotential which depends on a small parameter ε and $(r; \omega) \in \mathcal{X} \times \Omega$ ($(\Omega; \mathbf{F}; \mathcal{P})$ is an abstract probability space for $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$ or $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$). We suppose that the quasipotential $V_0(r)$ has the deterministic limit $V_{\varepsilon}(r; \omega)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. This differential equation (2) of infinite order with a small parameter ($\varepsilon \ll 1$) belongs to the class of singularly perturbed equations.

For this differential equation we can formulate the boundary value problem $A_{IBC, \varepsilon}^{\infty}$ on the interval $[0, r_0]$, the boundary value problem $B_{IPBC, \varepsilon}^{\infty}$ with periodic boundary conditions on the interval $[0, r_0]$, the boundary value problem $B_{IAPBC, \varepsilon}^{\infty}$ with antiperiodic boundary conditions on the interval $[0, r_0]$ and the boundary value problem $C_{HLBC, \varepsilon}^{\infty}$ on the positive half-line $[0, +\infty)$ for finding the eigenfunctions $[\psi_{\varepsilon, \infty, \gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ and eigenvalues $[\lambda_{\varepsilon, \infty, \gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$

$$[\tilde{L}_{\infty} - \lambda_{\varepsilon, \infty}] \psi_{\varepsilon, \infty}(r) = 0,$$

where

$$D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(0) = D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(r_0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots,$$

are the boundary conditions for the problem $A_{IBC, \varepsilon}^\infty$,

$$D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(0) = D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(r_0), \quad i = 0, 1, \dots$$

are the boundary conditions for the problem $B_{IPBC, \varepsilon}^\infty$,

$$D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(0) = -D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(r_0), \quad i = 0, 1, \dots$$

are the boundary conditions for the problem $B_{IAPBC, \varepsilon}^\infty$,

$$D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(0) = D^i \psi_{\varepsilon, \infty}(+\infty) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

are the boundary conditions for the problem $C_{HLBC, \varepsilon}^\infty$.

If we admit that $\varepsilon = 0$ we can formulate degenerate problems for obtaining the eigenfunctions $[\psi_{0, \gamma}]_{\gamma=1}^\infty$ and eigenvalues $[\lambda_{0, \gamma}]_{\gamma=1}^\infty$

$$[L_2 - \lambda_0] \psi_0(r) = 0,$$

$$\psi_0(0) = \psi_0(r_0) = 0$$

are the boundary conditions for the problem $A_{IBC, 0}$,

$$D^i \psi_0(0) = D^i \psi_0(r_0) \quad i = 0, 1,$$

are the periodic boundary conditions for the problem $B_{IPBC, 0}$,

$$D^i \psi_0(0) = -D^i \psi_0(r_0) \quad i = 0, 1,$$

are the periodic boundary conditions for the problem $B_{IAPBC, 0}$,

$$\psi_0(0) = \psi_0(+\infty) = 0 \tag{3}$$

are the boundary conditions for the problem $C_{HLBC, 0}$.

If we admit that the differential equation (2) has a finite order $m > 1$

$$[\tilde{L}_{2m}^\varepsilon - \lambda_{\varepsilon, 2m}] \psi_{\varepsilon, 2m}(r) = 0,$$

$$\tilde{L}_{2m}^\varepsilon = L_2 + \varepsilon^2 L_{2m}^\varepsilon = \sum_{p=1}^m \varepsilon^{2p-2} \hat{L}_{2p} + v(r),$$

$$L_{2m}^\varepsilon = \sum_{p=1}^{m-1} \varepsilon^{2p-2} \hat{L}_{2p+2} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p+2)!!} \varepsilon^{2p-2} D^{2p+2},$$

we can formulate the truncation boundary value problem $A_{IBC,\varepsilon}^{2m}$ on the interval $[0, r_0]$, the boundary value problem $B_{IPBC,\varepsilon}^{2m}$ with periodic boundary conditions on the interval $[0, r_0]$, the boundary value problem $B_{IAPBC,\varepsilon}^{2m}$ with antiperiodic boundary conditions on the interval $[0, r_0]$ and the boundary value problem $C_{HLBC,\varepsilon}^{2m}$ on the positive half-line $[0, +\infty)$ for obtaining the eigenfunctions $[\psi_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ and eigenvalues $[\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$

$$[\tilde{L}_{2m} - \lambda_{\varepsilon,2m}] \psi_{\varepsilon,2m}(r) = 0, \tag{4}$$

$$D^i \psi_{\varepsilon,2m}(0) = D^i \psi_{\varepsilon,2m}(r_0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1$$

are the boundary conditions for the truncation problem $A_{IBC,\varepsilon}^{2m}$,

$$D^i \psi_{\varepsilon,2m}(0) = D^i \psi_{\varepsilon,2m}(r_0), \quad i = 0, 1, \dots, 2m - 1$$

are the periodic boundary conditions for the truncation problem $B_{IPBC,\varepsilon}^{2m}$,

$$D^i \psi_{\varepsilon,2m}(0) = -D^i \psi_{\varepsilon,2m}(r_0), \quad i = 0, 1, \dots, 2m - 1$$

are the periodic boundary conditions for the truncation problem $B_{IAPBC,\varepsilon}^{2m}$,

$$D^i \psi_{\varepsilon,2m}(0) = D^i \psi_{\varepsilon,2m}(+\infty) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1$$

are the boundary conditions for the truncation problem $C_{HLBC,\varepsilon}^{2m}$.

If we admit that $\varepsilon = 0$ in (2) we can formulate degenerate problems $A_{IBC,0}$, $B_{IPBC,0}$, $B_{IAPBC,0}$, $C_{HLBC,0}$ for obtaining the eigenfunctions $[\psi_{0,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$ and eigenvalues $[\lambda_{0,\gamma}]_{\gamma=1}^{\infty}$.

3. Numerical analysis of the boundary value problems

The numerical analysis of the boundary value problems $A_{IBC,\varepsilon}^{\infty}$ and $A_{IBC,\varepsilon}^{2m}$ on the interval $[0, 1]$, the boundary value problems $B_{IPBC,\varepsilon}^{\infty}$ and $B_{IPBC,\varepsilon}^{2m}$ with periodic boundary conditions on the interval $[0, 1]$, the boundary value problems $B_{IAPBC,\varepsilon}^{\infty}$ and $B_{IAPBC,\varepsilon}^{2m}$ with antiperiodic boundary conditions on the interval $[0, 1]$ and the boundary value problems $C_{HLBC,\varepsilon}^{\infty}$ and $C_{HLBC,\varepsilon}^{2m}$ on the interval $[0, 100]$ and the degenerate problems $A_{IBC,0}$, $B_{IPBC,0}$, $B_{IAPBC,0}$, $C_{HLBC,0}$ for obtaining the eigenfunctions $[\psi_{\varepsilon,\infty,\gamma}]$, $[\psi_{\varepsilon,2m,\gamma}]$, $[\psi_{0,\gamma}]$ and eigenvalues $[\lambda_{\varepsilon,\infty,\gamma}]$, $[\lambda_{\varepsilon,2m,\gamma}]$, $[\lambda_{0,\gamma}]$ is made using MatLab eigenvalues and eigenvectors packages.

The numerical studies were made under the assumption that the random quasipotential $V_{\varepsilon}(r; \omega)$ has the form

$$V_{\varepsilon}(r; \omega) = r^2 + \varepsilon \eta_r, \quad V_0(r) = r^2$$

where parameters η_r is an independent normally distributed $N(0, \sigma^2)$ random variable (in the numerical example $\sigma = 0.1$) and $V_0(r)$ is a oscillator quasipotential. The behavior of the eigenfunctions $[\psi_{\varepsilon, 2m, \gamma}]$ and eigenvalues $[\lambda_{\varepsilon, 2m, \gamma}]$ were studied for cases when $\varepsilon \rightarrow 0$ and/or $m \rightarrow 0$.

4. Conclusions

In this paper the numerical analysis of the relativistic Schrödinger equation (the singularly perturbed differential equation of the infinite order) with the random quasipotential is made using MatLab eigenvalues and eigenvectors packages. The boundary value problems on the interval $[0, r_0]$, the boundary value problem with periodic and antiperiodic boundary conditions on the interval $[0, r_0]$ and the boundary value problem on the positive half-line $[0, +\infty)$ for obtaining the eigenfunctions and eigenvalues are studied. It is shown the existence of the convergence of the solutions to the deterministic limit for cases when $\varepsilon \rightarrow 0$ and/or $m \rightarrow 0$.

Acknowledgments

The reported study was funded within the Agreement No 02.a03.21.0008 dated 24.11.2016 between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and RUDN

References

1. *Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Zhidkova I. E., Vasilyev S. A.* Construction of an asymptotic approximation of eigenfunctions and eigenvalues of a boundary value problem for the singular perturbed relativistic analog of the Schrödinger equation with an arbitrary potential // *Mat. Model.* — 2003. — Vol. 15, no. 9. — P. 3–16.
2. *Amirkhanov I. V., Vasilyev S. A., Vasilyeva D. G., Karaschiuk A. F., Denisov V. E., Udin D.N.* Asymptotic Solution of Boundary Problem for Relativistic Finite-Difference Schrödinger Equation with Singular Oscillator Quasipotential // *Bulletin of PFUR, series “Mathematics. Informatics. Physics.”* — 2008. — No. 3. — P. 55–68.
3. *Bal G., Yu Gu.* Limiting models for equations with large random potential // *Communication in Mathematical Sciences.* — 2015. — Vol. 13, no. 3. — P. 729–748.
4. *Kadyshevsky V. G.* Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude // *Nucl. Phys.* — 1968. — Vol. B6, no. 1. — P. 125–148.
5. *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* Quasi-Optical approach in quantum field theory // *Nuovo Cimento.* — 1963. — Vol. 29, no. 2. — P. 380–399.

УДК 519.248+519.873

Специальный курс «Основы математической теории надежности» в техническом университете

А. В. Калинкин*, И. В. Павлов*, Н. И. Сидняев*

** Кафедра высшей математики,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., д.5, Москва, Россия, 105005*

Аннотация. В докладе приводятся и обсуждаются типовые задачи по математической теории надежности для студентов старших курсов технического университета.

Ключевые слова: надежность, преподавание, типовые задачи.

1. Содержание курса

В Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана для студентов машиностроительных специальностей факультетов «Робототехника и комплексная автоматизация», «Специальное машиностроение», «Машиностроительные технологии» читается обязательный семестровый курс «Основы математической теории надежности». Эта дисциплина дополняет общетехнический курс «Надежность и долговечность машин и механизмов».

Содержание курса определено монографиями [1, 4, 5]. Обязательный семестровый курс соответствует программам магистерской подготовки и является продолжением стандартного курса теории вероятностей. Для студентов специальности «Прикладная математика» факультета «Фундаментальные науки» читается расширенный курс теории надежности [6], требующий большей подготовки по базовым математическим дисциплинам.

Программа специального курса включает следующие разделы: показатели надежности элемента; расчет надежности невосстанавливаемых систем; расчет надежности восстанавливаемых систем; статистическое оценивание показателей надежности. Эти темы отражены в учебном издании [7]; каждый раздел методички [7] состоит из кратких теоретических сведений и решений примеров.

2. Типовой расчет

Для освоения специального курса студентами выполняется типовой расчет [7] по решению задач по математической теории надежности. Приведем условия пяти задач типового расчета; каждая задача содержит 30 вариантов и значения параметров в задаче зависят от номера варианта.

В первой задаче для отдельного элемента время работы до отказа подчинено вероятностному закону распределения $F(t)$ с известными параметрами. Вычислить вероятность безотказной работы $P(t)$, интенсивность отказа $\lambda(t)$ при значениях времени t_1, \dots, t_n и построить графики показателей надежности от t ; найти среднюю наработку на отказ.

Во второй задаче дан вид структурной схемы надежности системы из n элементов A_1, \dots, A_n . Вероятности безотказной работы элементов A_1, \dots, A_{n-1} подчинены экспоненциальному закону с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Для A_n вероятность безотказной работы элемента подчинена другому вероятностному закону с известными параметрами. Требуется вычислить надежность (вероятность безотказной работы) системы $P = P(t)$ при заданном времени t .

В третьей задаче рассматривается восстанавливаемая система из n элементов, соединенных последовательно или параллельно, и работающих независимо друг от друга. Задана интенсивность отказа для каждого элемента $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Число ремонтных органов r , работающих независимо друг от друга, и интенсивность восстановления j -м ремонтным органом $\mu_j = \mu, j = 1, \dots, r$. Для работоспособности системы необходимо не менее m исправных элементов. В зависимости от варианта предполагается: из n элементов $n - 1$ имеют одинаковую интенсивность отказов λ , а указанный один элемент имеет интенсивность отказа λ' ($\lambda' \neq \lambda$); или при появлении отказавших элементов интенсивность отказов оставшихся элементов увеличивается по заданному правилу.

Составить граф состояний и переходов системы и выписать прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей. Выписать систему уравнений для стационарных вероятностей и решив ее, найти алгебраические выражения для стационарных вероятностей. Затем при данных числовых значениях λ, μ, λ' вычислить значение коэффициента готовности K_T системы в стационарном режиме работы.

В четвертой задаче в зависимости от варианта предполагается, что условие работоспособности изделия (на некоторый момент времени) имеет вид $a < \xi$ или $\xi < b$, где ξ — определяющий параметр изделия, распределенный по нормальному закону с неизвестными параметрами m и σ . Дана числовая выборка результатов измерений при испытании n образцов изделия; для вероятности безотказной работы изделия $P = P(t)$ требуется найти точечную оценку \hat{P} и нижнюю доверительную границу \hat{P}_γ при заданной доверительной вероятности γ .

В пятой задаче предполагается, что наработка изделия до отказа ξ подчиняется экспоненциальному закону распределения с неизвестным параметром λ . Испытания проведены по плану $[n, B, T]$ (цензурирование по времени) или по плану $[n, B, r]$ (цензурирование по числу отказов) и приведена числовая выборка результатов измерений при испытании n образцов изделия. Для вероятности безотказной работы

изделия $P = P(t)$ требуется найти точечную оценку \hat{P} и нижнюю доверительную границу \underline{P}_γ при заданной доверительной вероятности γ (оценки найти на заданный момент времени t).

Процесс решения задач содержит как аналитические вычисления, так и возможно применение компьютерных технологий с использованием программных пакетов Matlab, Maple, Mathematica с визуализацией данных. Решение каждой задачи доводится до чисел.

Пять изложенных примеров хорошо известны и подробно рассматриваются в классических курсах по теории надёжности (см. также книги [2, 3]).

Факультативно, для третьей задачи, предлагается смоделировать на ЭВМ марковский процесс рождения и гибели [8] и статистически испытаниями приближенно определить значение K_T в нестационарном и стационарном режимах работы системы с восстановлением элементов.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности: основные характеристики надежности и их статистический анализ. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Либроком, 2013. — 584 с.
2. Barlow, R. E., Proschan, F. Mathematical Theory of Reliability. — London: John Wiley, 1965. — 255 p. Русский перевод: Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М.: Советское радио, 1969. — 488 с.
3. Barlow, R. E., Proschan, F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models. — New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975. — 290 p. Русский перевод: Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1984. — 328 с.
4. Gnedenko B. V., Pavlov I. V., Ushakov I. A. Statistical Reliability Engineering. — New York: John Wiley, 2006. — 517 p.
5. Капитанов В. А., Медведев А. И. Теория надежности сложных систем. 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 608 с.
6. Садыхов Г. С., Савченко В. П., Сидняев Н. И. Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. — 382 с.
7. Калинкин А. В., Павлов И. В. Основы математической теории надежности: методические указания к выполнению типового расчета. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. — 56 с. <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1600.html>
8. Калинкин А. В. Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием: методические указания к выполнению типового расчета. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. — 44 с. <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1630.html>

**Special course «Fundamentals
of the mathematical theory of reliability»
in the technical university**

A. V. Kalinkin*, I. V. Pavlov*, N. I. Sidnyaev*

** Department of Higher Mathematics,
Bauman Moscow State Technical University,
2-nd Baumanskaya str., 5, Moscow, 105005, Russia*

The report presents and discusses standard problems in the mathematical theory of reliability for senior students of a technical university.

Keywords: reliability, teaching, standard problems.

UDC 519.21

Analysis of renewable reliability systems by Markovization method

Vladimir Rykov^{*†}, Dmitry Kozyrev^{*‡}

** Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya Street, Moscow, 117198, Russian Federation*

*† Gubkin Russian State University of oil and gas, 65 Leninsky Prospekt,
Moscow, 119991, Russia*

*‡ V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
Emails: rykov_vv@rudn.university, kozyrev_dv@rudn.university*

Abstract. Markovization method is used for the reliability analysis of a heterogeneous double redundant hot standby renewable system. Time dependent, stationary and quasi-stationary probability distributions for the system are calculated.

Keywords: Markovization method, reliability system, time-dependent, stationary and quasi-stationary probabilities.

1. Introduction and Motivation

Stability of different systems characteristics under the changes of initial states or exterior factors are the key problems in all natural sciences. For stochastic systems stability often means insensitivity or weak sensitivity of their output characteristics to the shapes of some input distributions.

One of the earliest results concerning insensitivity of systems' characteristics with respect to the shape of input distribution has been obtained by B. Sevast'yanov [1], who proved the insensitivity of Erlang's formulas to the shape of service time distribution with fixed mean value for loss queueing systems with Poisson input flow. In [2] I.Kovalenko found the necessary and sufficient conditions for insensitivity of stationary reliability characteristics of redundant renewable systems with exponential life and general repair time distributions of their components to the shape of the latters. These conditions consist in sufficient amount of repairing facilities, i.e. in possibility of immediate start to repair any of failed element. The sufficiency of this condition for the case of general life and repair time distributions has been found in [3] with the help of multi-dimensional alternative processes theory. However, in the case of limited possibilities for restoration these results do not hold, as it was shown, for example, in [4] with the help of Markovization method.

On the other hand in series of work of B.V. Gnedenko, A.D. Solov'ev [5–7] and others it was shown that under "quick" restoration the reliability characteristics become asymptotically insensitive to the shapes of their elements life and repair times distributions. In the papers [8–10] the problem of system's stationary reliability characteristics sensitivity with

respect to the shape of life and repair time distributions of its components has been considered for the simple case of a cold standby double redundant system when one of the input distributions (either of life or repair time) is exponential. For these models explicit expressions for steady state probabilities (s.s.p.) have been obtained, which show their evident dependence on the non-exponential distributions. At that the numerical investigations, proposed in [11] show that this dependence becomes vanishingly small under “quick” restoration for the case, when both distributions are non-exponential.

In the presentation we extend these studies for heterogeneous hot standby renewable reliability systems.

2. The Problem setting and notations

Consider a heterogeneous hot double redundant repairable reliability system. Suppose that the life times of components are exponentially distributed random variables (r.v.) with parameters α_1 and α_2 correspondingly. The repair times of components have absolute continuous distributions with cumulative distribution functions (c.d.f.) $B_k(x)$ ($k = 1, 2$) and probability density functions (p.d.f.) $b_k(x)$ ($k = 1, 2$) correspondingly. All life and repair times are independent. The “up” (working) states of each component and the whole system will be marked by 0 and the “down” (failed) state by 1 correspondingly.

Under considered assumptions the system behavior can be described by a random process, taking the values in the system state space $E = \{0, 1, 2, 3\}$, which means: 0 — both components are working, 1 — the first component is repairing, and the second one is working, 2 — the second component is repairing, and the first one is working, 3 — both components are in down states, system is failed.

For the system behavior study under the system set of states E introduce a random process $J = \{J(t), t \geq 0\}$: $J(t) = i$ if in the time t the system is in the state $i \in E$. Denote also by

- $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ the summary intensity of the system failure;
- $b_k = \int_0^\infty (1 - B_k(x))dx$ k -th element repair time expectations;
- $\beta_k(x) = (1 - B_k(x))^{-1}b_k(x)$ k -th element conditional repair intensity given elapsed repair time is x ;
- $\hat{b}_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}b_k(x)dx$ Laplace transform (LT) of the k -th element repair time distribution,
- $T = \inf t : J(t) = 3$ the system life time.

In the presentation we are interesting in study of the system reliability function

$$R(t) = \mathbf{P}\{T > t\},$$

as well as steady-state probabilities

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{J(t) = j\}.$$

3. Reliability function calculation

For the reliability function calculation the Markovization principle is used. To implement it consider the two-dimensional Markov process $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$, with $Z(t) = (J(t), X(t))$ where $J(t)$ represents the system state, and $X(t)$ is an additional variable, which means the elapsed repair time of $J(t)$ -th component at time t . The process phase space equals to $\mathcal{E} = \{0, (1, x), (2, x), 3\}$, which means: 0 – both components are functioning, $(1, x)$ – the second component is functioning, the first one has failed and is being repaired, and its elapsed repair time equals x , $(2, x)$ – the first component is functioning, the second one has failed and is being repaired, and its elapsed repair time is equal to x , 3 – both components have failed, and therefore the system is in failure mode (absorbing state). Appropriate probabilities are denoted by $\pi_0(t)$, $\pi_1(t; x)$, $\pi_2(t; x)$, $\pi_3(t)$. The state transition graph of the system is represented in figure 1.

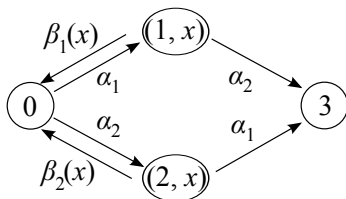


Figure 1. Transition graph of the system with an absorbing state

By usual method Kolmogorov forward system of partial differential equations jointly with initial and boundary conditions for these probabilities can be obtained. Its solution in terms of Laplace Transforms (LT) is represented in the following theorem.

Theorem 1. *The LT $\tilde{\pi}_i(s)$ ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$) and $\tilde{R}(s)$ of the time dependent probabilities $\pi_i(t)$ ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$) and the reliability function $R(t)$ are*

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_0(s) &= \frac{1}{s + \psi(s)}, \\ \tilde{\pi}_1(s) &= \alpha_1 \frac{1 - \tilde{b}_1(s + \alpha_2)}{(s + \alpha_2)(s + \psi(s))}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= \alpha_2 \frac{1 - \tilde{b}_2(s + \alpha_1)}{(s + \alpha_1)(s + \psi(s))}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\pi}_3(s) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\phi_1(s) + \phi_2(s))}{s(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(s + \psi(s))},$$

$$\tilde{R}(s) = \frac{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2) + \alpha_1 \phi_1(s) + \alpha_2 \phi_2(s)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(s + \psi(s))},$$

where the following notations are used

$$\phi_i(s) = (s + \alpha_i)(1 - \tilde{b}_i(s + \alpha_{i^*})), \quad (i = 1, 2),$$

$$\psi(s) = \alpha_1(1 - \tilde{b}_1(s + \alpha_2)) + \alpha_2(1 - \tilde{b}_2(s + \alpha_1)).$$

with $i^* = 2$ for $i = 1$, and $i^* = 1$ for $i = 2$.

4. Stationary probabilities

For the system stationary regime study we need to determine the system behavior after its failure. There are at least two possibilities:

- partial repair, when after failure the system prolong to work in the same regime, i.e. the repaired element prolong to be repaired and after its renewal the system goes to the state 1 or 2 dependently on what type of component is repaired in state 3;
- full repair — after the system failure begins the renewal of all system during some random time, say with c.d.f. $B_3(t)$, and after this time the system goes to the state 0.

Therefore the case of partial repair we need to divide the state 3 into two states (3, 1) which means that both elements are fail and the first one is repaired, and (3, 2) which means that both elements are fail and the second one is repaired, and to extend the set of system states up to $E = \{0, 1, 2, (3, 1), (3, 2)\}$.

4.1. Partial repair

In case of partial repair the transition graph represented in figure 2.

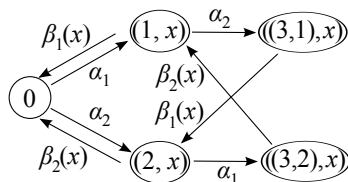


Figure 2. Transition graph of the system under partial repair

To calculate s.s.p. consider the same as before two-dimensional Markov process $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ with phase space $\mathcal{E} = \{0, (1, x), (2, x), ((3, 1), x), ((3, 2), x)\}$, where additional states have the following meaning: $((3, 1), x)$ – both elements have failed, and the first one is being repaired with elapsed time equal to x , $((3, 2), x)$ – both elements have failed, and the second one is being repaired with elapsed time equal to x . Corresponding probabilities are denoted by $\pi_0(t)$, $\pi_1(t; x)$, $\pi_2(t; x)$, $\pi_{(3,1)}(t; x)$, $\pi_{(3,2)}(t; x)$.

Analogously to previous case Kolmogorov's forward system of partial differential equations for these probabilities can be obtained, where only two equations for $\pi_{(3,1)}(t; x)$, and $\pi_{(3,2)}(t; x)$ should be added. We omit these equations, and using Harris property of the process $Z(t)$ propose the system of equations for the s.s.p.

$$\pi_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_0(t), \quad \pi_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t; x), \quad (i = 1, 2, (3, 1), (3, 2)).$$

These probabilities satisfy to the system of balance equations jointly with corresponding boundary conditions that will be done in the full paper. The following theorem demonstrate their solution result.

Theorem 2. *The s.s.p. of the system with partial repair has the form*

$$\begin{aligned} \pi_1(x) &= C_1 e^{-\alpha_2 x} (1 - B_1(x)), \\ \pi_2(x) &= C_2 e^{-\alpha_1 x} (1 - B_2(x)), \\ \pi_{(3,1)}(x) &= C_1 (1 - e^{-\alpha_2 x}) (1 - B_1(x)), \\ \pi_{(3,2)}(x) &= C_2 (1 - e^{-\alpha_1 x}) (1 - B_2(x)), \end{aligned}$$

where

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \pi_0, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \pi_0,$$

with

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (1 - \tilde{b}_1(\alpha_2))(1 - \tilde{b}_2(\alpha_1)), \\ \Delta_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 (1 - \tilde{b}_2(\alpha_1)), \\ \Delta_2 &= \alpha_2 - \alpha_1 (1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)), \end{aligned}$$

and

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)}{\alpha_2} (1 + b_1) + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{1 - \tilde{b}_2(\alpha_1)}{\alpha_1} (1 + b_2) \right]^{-1}.$$

By simple calculation one can get the following Corollary.

Corollary 1. Corresponding macro-states s.s.p. are

$$\pi_1 = C_1 \frac{1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)}{\alpha_2},$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= C_2 \frac{1 - \tilde{b}_2(\alpha_1)}{\alpha_1}, \\ \pi_{(3,1)} &= C_1 b_1 \frac{1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)}{\alpha_2}, \\ \pi_{(3,2)} &= C_2 b_2 \frac{1 - \tilde{b}_2(\alpha_1)}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

with the same values of $C_1, C_2, \Delta_1, \Delta_2, \Delta$ and π_0 .

By simple calculations one can show that the corresponding formulas for s.s.p. of homogeneous system coincide with those obtained before, see for example [8,10].

4.2. Full repair

For the system with full restoration after failure its behavior can be described by the same process $J = \{J(t), t \geq 0\}$ with the same state space $E = \{0, 1, 2, 3\}$, where only the process transition from state 3 to the state 0 should be added. Suppose that the time of the system repair after its failure has some absolutely continuous c.d.f, say $B_3(x)$, and p.d.f. $b_3(x)$ and transition intensity (conditional p.d.f. given elapsed summary system repair time equals to x) equals $\beta_3(x)$. The transition graph for the process in this case is represented in figure 3.

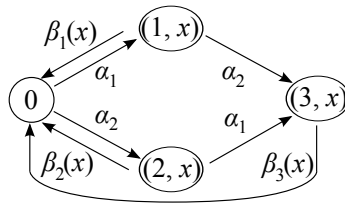


Figure 3. Transition graph of the system under full repair

Corresponding probabilities are denoted by

$$\pi_0(t), \pi_1(t; x), \pi_2(t; x), \pi_3(t; x).$$

Analogously to the previous cases the Kolmogorov’s forward system of partial differential equations for these probabilities jointly with initial and boundary conditions can be obtained. Also as before due to Harris property of the process for its limiting when $t \rightarrow \infty$ probabilities, which coincide with stationary ones

$$\pi_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_0(t), \quad \pi_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t; x) \quad (i \in \{1, 2, 3\}).$$

The solution of this system of equation (balance system of equations) with corresponding boundary conditions in terms of probabilities $\pi_i(x)$ LT represented in the following theorem.

Theorem 3. *The stationary probabilities of the system under full repair have the form*

$$\begin{aligned}\pi_1(x) &= \alpha_1 e^{-\alpha_2 x} (1 - B_1(x)) \pi_0, \\ \pi_2(x) &= \alpha_2 e^{-\alpha_1 x} (1 - B_2(x)) \pi_0, \\ \pi_3(x) &= [\alpha_1 (1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)) + \alpha_2 (1 - \tilde{b}_1(\alpha_2))] (1 - B_3(x)) \pi_0.\end{aligned}$$

where π_0 is given by

$$\pi_0 = \left[1 + (1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \alpha_1 b_3 \right) + (1 - \tilde{b}_2(\alpha_1)) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \alpha_2 b_3 \right) \right]^{-1},$$

with $b_3 = \mathbf{E}[B_3] = \int_0^\infty (1 - B_3(x)) dx$.

By simple calculation one can get the following Corollary.

Corollary 2. Corresponding stationary macro-state probabilities are

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)) \pi_0, \\ \pi_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1 - \tilde{b}_2(\alpha_1)) \pi_0, \\ \pi_3 &= [\alpha_1 (1 - \tilde{b}_1(\alpha_2)) + \alpha_2 (1 - \tilde{b}_2(\alpha_1))] b_3 \pi_0\end{aligned}$$

with the same value of π_0 .

Remark. For homogeneous system, when $\alpha_i = \alpha$, $b_i(x) = b(x)$ ($i = 1, 2$), the last expression takes the form

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 2(1 - \tilde{b}(\alpha))(1 + \alpha b_3)},$$

which coincides with one in [8, 10].

5. Conclusions

Markovization method is used for heterogeneous double redundant hot standby renewable reliability system analysis. The time dependent and stationary probability distributions for the system are calculated.

Acknowledgments

The publication was prepared with the support of the ‘‘RUDN University Program 5-100’’, and was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research according to the research projects No. 17-07-00142 and No. 17-01-00633.

References

1. B.A. Sevast'yanov. An Ergodic Theorem for Markov Processes and Its Application to Telephone Systems with Refusals. *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 2, No. 1, 1957.
2. I.N. Kovalenko. *Investigations on Analysis of Complex Systems Reliability*. Kiev: Naukova Dumka, 1976. - 210 p. (In Russian).
3. V. Rykov. Multidimensional Alternative Processes as Reliability Models. *Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. (BWWQT 2013) Proceedings*. Eds: A.Dudin, V.Klimenok, G.Tsarenkov, S.Dudin. Series: CCIS 356. Springer, 2013. P.147-157.
4. D. Koenig, V. Rykov, D. Shtoyan. *Queueing Theory*. - M.: Gubkin University Press, 1979. - 115 p. (In Russian)
5. B.V. Gnedenko. On cold double redundant system. // *Izv. AN SSSR. Techn. Cybern.* No. 4 (1964), P. 3–12. (In Russian)
6. B.V. Gnedenko. On cold double redundant system with restoration. // *Izv. AN SSSR. Techn. Cybern.* No. 5 (1964), P. 111 -- 118. (In Russian)
7. A.D. Solov'ev. On reservation with quick restoration. // *Izv. AN SSSR. Techn. Cybern.* No. 1 (1970), P. 56–71. (In Russian)
8. V. Rykov, Tran Ahn Ngia. On sensitivity of systems reliability characteristics to the shape of their elements life and repair time distributions. // *Vestnik PFUR. Ser. Mathematics. Informatics. Physics.* No.3 (2014), P. 65-77. (In Russian)
9. D.Efrosinin, V.Rykov. Sensitivity Analysis of Reliability Characteristics to the Shape of the Life and Repair Time Distributions // *Communications in Computer and Information Science*, V.487, pp. 101-112.
10. Dmitry Efrosinin, Vladimir Rykov and Vladimir Vishnevskiy. Sensitivity of Reliability Models to the Shape of Life and Repair Time Distributions. (9-th International Conference on Availability, Reliability and Security (ARES 2014)), p.430-437. Published in CD: 978-I-4799-4223-7/14, 2014, IEEE. DOI 10.1109/ARES 2014.65.
11. Vladimir Rykov, Dmitry Kozyrev, Elvira Zaripova (2017). Modeling and Simulation of Reliability Function of a Homogeneous Hot Double Redundant Repairable System, *ECMS 2017 Proceedings* Edited by: Zita Zoltay Paprika, Péter Horák, Kata Váradi, Péter Tamás Zwierczyk, Ágnes Vidovics-Dancs, János Péter Rádics European Council for Modeling and Simulation. doi: 10.7148/2017-0701
12. V. Rykov, D. Kozyrev. On Markovization method application to reliability function calculation. // *Markov Processes and Related Fields*. Submitted for publication.
13. W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, 3rd Edition, Wiley, N.Y., 1968.
14. D.V. Kozyrev. Analysis of Asymptotic Behavior of Reliability Properties of Redundant Systems under the Fast Recovery // *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* No.3 (2011), pp.49–57. (In Russian)

УДК 519.212.2

Число пар одинаково помеченных вхождений заданного поддерева в q -ичное дерево со случайными метками вершин

А. М. Зубков*, В. И. Круглов*

* Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
ул. Губкина, д.8, Москва, Россия, 119991

Аннотация. Рассматривается полное q -ичное дерево, каждой вершине которого случайно, равновероятно и независимо от остальных вершин присвоена метка из конечного алфавита. Получена асимптотическая формула для среднего числа пар одинаково помеченных вхождений заданного поддерева, сформулирована теорема о сходимости распределения числа таких пар к пуассоновскому распределению.

Ключевые слова: q -ичные деревья с помеченными вершинами, суммы зависимых индикаторов, пуассоновская аппроксимация.

1. Основная часть

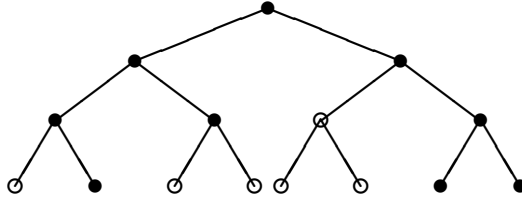
Пусть T_q^n — полное q -ичное дерево высоты n . Корень дерева будем обозначать символом $*$ и считать, что он образует слой вершин $I^{(0)}$. Для каждого $k = 1, \dots, n$ слой $I^{(k)}$ состоит из q^k вершин $\mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k]$, где $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Из корня $*$ выходит q ребер в вершины $[0], [1], \dots, [q-1] \in I^{(1)}$, при $k = 1, \dots, n-1$ из каждой вершины $\mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k]$ слоя $I^{(k)}$ выходит q ребер, соединяющих ее с вершинами $\mathbf{i}_j^+ = [\mathbf{i}, j] = [i_1, i_2, \dots, i_k, j]$, $j = 0, 1, \dots, q-1$, слоя $I^{(k+1)}$. В каждую вершину $\mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k]$ при $k > 1$ входит ребро из вершины $\mathbf{i}^- = [i_1, i_2, \dots, i_{k-1}]$, а при $k = 1$ — из корня $*$ $= [0]^- = [1]^- = \dots = [q-1]^-$. Для вершины $\mathbf{i} \in I^{(k)}$ будем считать, что ее «высота» $h(\mathbf{i}) = k$. Если $\mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_k]$, $\mathbf{j} = [j_1, j_2, \dots, j_m]$, то $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \stackrel{\text{def}}{=} [i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m]$, $[\mathbf{i}, *] \stackrel{\text{def}}{=} [i_1, i_2, \dots, i_k]$.

На множестве вершин дерева T_q^n введем лексикографический порядок, считая, что $\mathbf{i} < \mathbf{j}$, если либо $h(\mathbf{i}) < h(\mathbf{j})$, либо $h(\mathbf{i}) = h(\mathbf{j}) = k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$ и $\sum_{m=1}^k i_m q^{k-m} < \sum_{m=1}^k j_m q^{k-m}$.

Определение 1. *Шаблон* будем называть поддерево B дерева T_q^n с корнем $*$ и $|B|$ вершинами $\mathbf{i}_0^{[B]} = * < \mathbf{i}_1^{[B]} < \dots < \mathbf{i}_{|B|-1}^{[B]}$. Если $\mathbf{i}_{|B|-1}^{[B]} \in I^{(h)}$, то будем называть h *высотой* $h(B)$ шаблона B . При $\mathbf{j} \in I^{(k)}$, $0 \leq k \leq n - h(B)$, *вложением* $B(\mathbf{j})$ шаблона B в дерево

T_q^n называется поддеревом дерева T_q^n , имеющее вершины $\mathbf{j} = [\mathbf{j}, \mathbf{i}_0^{[B]}] \prec [\mathbf{j}, \mathbf{i}_1^{[B]}] \prec [\mathbf{j}, \mathbf{i}_2^{[B]}] \prec \dots \prec [\mathbf{j}, \mathbf{i}_{|B|-1}^{[B]}]$.

Пример: на рисунке для случая $q = 2$ изображен шаблон B с $h(B) = 3$, $|B| = 9$ и вершинами $\mathbf{i}_0^{[B]} = * \prec \mathbf{i}_1^{[B]} = [0] \prec \mathbf{i}_2^{[B]} = [1] \prec \mathbf{i}_3^{[B]} = [0, 0] \prec \mathbf{i}_4^{[B]} = [0, 1] \prec \mathbf{i}_5^{[B]} = [1, 1] \prec \mathbf{i}_6^{[B]} = [0, 0, 1] \prec \mathbf{i}_7^{[B]} = [1, 1, 0] \prec \mathbf{i}_8^{[B]} = [1, 1, 1]$.



Пусть каждой вершине \mathbf{i} дерева T_q^n присвоена случайная метка $m(\mathbf{i})$, принимающая значения в множестве $\{1, \dots, d\}$, причем значения $m(\mathbf{i})$, $\mathbf{i} \in T_q^n$, независимы в совокупности и $\mathbf{P}\{m(\mathbf{i}) = j\} = \frac{1}{d}$, $j \in \{1, \dots, d\}$, для всех $\mathbf{i} \in T_q^n$. Каждому вложению $B(\mathbf{j})$ шаблона B соответствует упорядоченный набор

$$M(B(\mathbf{j})) = \left(m([\mathbf{j}, \mathbf{i}_k^{[B]}]), k = 0, 1, \dots, |B| - 1 \right)$$

случайных меток вершин поддерева $B(\mathbf{j})$.

Очевидно, что если для некоторых вершин $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s$ поддерева $B(\mathbf{g}_1), \dots, B(\mathbf{g}_s)$ попарно не пересекаются, то соответствующие им совокупности меток $M(B(\mathbf{g}_1)), \dots, M(B(\mathbf{g}_s))$ взаимно независимы и имеют равномерное распределение на множестве $\{1, \dots, d\}^{|B|}$.

Задачи о появлении или не появлении заданных комбинаций знаков в строках рассматривались, например, в [7], задачи о появлении заданных поддеревьев в деревьях — в [8, 9]. Задачи о появлении одинаковых комбинаций в случайных дискретных последовательностях рассматривались, например, в [1, 3–5, 10]. Первые результаты о совпадении меток на цепочках вершин в двоичном дереве были получены авторами настоящей работы в [2]. Такие характеристики имеют естественные интерпретации, например, для генеалогических деревьев и для повторяющихся вычислений при переборе с ветвлением вариантов. Здесь изучаются распределения чисел непродолжаемых к корню совпадений наборов меток в разных вложениях заданного шаблона B

(зависящего от n), т. е. сумм индикаторов вида

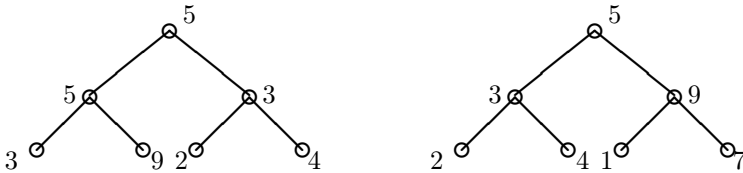
$$X_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, B} = \mathbb{I}\{M(B(\mathbf{i})) = M(B(\mathbf{j})), m(\mathbf{i}^-) \neq m(\mathbf{j}^-)\}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \bigsqcup_{k=0}^{n-l+1} I^{(k)}, \mathbf{i} \prec \mathbf{j}$$

(при $\mathbf{i} = *$ условие $m(\mathbf{i}^-) \neq m(\mathbf{j}^-)$ считается выполненным автоматически).

Пример: для двоичного дерева рассмотрим шаблон B , для которого $h(B) = 2$ и $|B| = 3$,



и два фрагмента двоичного дерева со следующими метками вершин:



причем мы предполагаем, что вершина, предшествующая корневой вершине правого поддерева, имеет метку, отличную от 5. Тогда в рассмотренных фрагментах имеет место одно непродолжаемое к корню совпадение меток, рассматриваемых в соответствии с шаблоном B , которое образовано вершинами с метками 5, 3 и 9, а также еще одно совпадение, образованное вершинами с метками 3, 2 и 4, которое может быть продолжено к корню и поэтому не учитывается.

Для каждого натурального n и шаблона $B = B_n$ высоты $h_n = h(B_n)$ мы рассматриваем случайные величины

$$V_{n, B_n} = \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in T_q^{n-h_n} : \mathbf{i} \prec \mathbf{j}} X_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, B_n} \quad \text{и} \quad \tilde{V}_{n, B_n} = \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}_{n, B_n}} X_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, B_n},$$

где

$$\mathcal{P}_{n, B_n} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) : \mathbf{i}, \mathbf{j} \in T_q^{n-h_n}, * \prec \mathbf{i} \prec \mathbf{j}, \mathbf{j} \neq [\mathbf{i}, \mathbf{z}] \forall \mathbf{z} : h(\mathbf{z}) \leq h_n + 1\}.$$

Ограничение одним шаблоном B_n , условие $m(\mathbf{i}^-) \neq m(\mathbf{j}^-)$ и выбор множества \mathcal{P}_{n, B_n} сделаны для того, чтобы упростить формулировку

и доказательство теоремы о сходимости распределений сумм V_{n,B_n} и \tilde{V}_{n,B_n} к распределению Пуассона при $n \rightarrow \infty$.

Лексикографический порядок на множестве вершин дерева T_q^n обладает, в частности, следующим свойством: если $\mathbf{i} \prec \mathbf{j}$, то такое же отношение порядка существует между любыми двумя соответствующими вершинами вложений $B(\mathbf{i})$ и $B(\mathbf{j})$ шаблона $B: [\mathbf{i}, \mathbf{i}_k^{[B]}] \prec [\mathbf{j}, \mathbf{j}_k^{[B]}]$, $1 \leq k < |B|$. Поэтому в последовательности $m(\mathbf{i}^-) \neq m(\mathbf{j}^-)$, $m([\mathbf{i}, \mathbf{i}_k^{[B]}]) = m([\mathbf{j}, \mathbf{j}_k^{[B]}])$, $k = 0, 1, \dots, |B| - 1$, каждое соотношение содержит хотя бы одну новую вершину поддерева $B(\mathbf{j})$. Из этого свойства и из предположения о независимости и равновероятности меток следует, что условная вероятность выполнения каждого соотношения при условии, что выполнены все предыдущие, равна безусловной вероятности выполнения этого соотношения, т. е. что при $\mathbf{i} \prec \mathbf{j}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_{\mathbf{i},\mathbf{j},B} &= \mathbf{E}\mathbb{I}\{m([\mathbf{i}, \mathbf{i}_k^{[B]}]) = m([\mathbf{j}, \mathbf{j}_k^{[B]}]), 0 \leq k < |B|\} \mathbb{I}\{m(\mathbf{i}^-) \neq m(\mathbf{j}^-)\} = \\ &= \mathbf{P}\{m(\mathbf{i}^-) \neq m(\mathbf{j}^-)\} \prod_{k=0}^{|B|-1} \mathbf{P}\{m([\mathbf{i}, \mathbf{i}_k^{[B]}]) = m([\mathbf{j}, \mathbf{j}_k^{[B]}])\} = \\ &= \begin{cases} \frac{d-1}{d^{|B|+1}}, & \text{если } \mathbf{i} \neq *, \\ \frac{1}{d^{|B|}}, & \text{если } \mathbf{i} = *. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 1. Если $n, h_n = h(B_n) \rightarrow \infty$ так, что $n - h_n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}V_{n,B_n} &= \frac{d-1}{d^{|B_n|+1}} \frac{q^{2(n-h_n+1)}}{2(q-1)^2} (1 + o(1)), \\ 0 &\leq \mathbf{E}V_{n,B_n} - \mathbf{E}\tilde{V}_{n,B_n} = o(\mathbf{E}V_{n,B_n}). \end{aligned}$$

Следствие 1. Если $n, h_n = h(B_n) \rightarrow \infty$ так, что $n - h_n \rightarrow \infty$ и величина $\mathbf{E}V_{n,B_n}$ остается ограниченной, то $\mathbf{P}\{\tilde{V}_{n,B_n} = V_{n,B_n}\} \rightarrow 1$.

Применяя метод Чена-Стейна (см., например, [6]), можно получить достаточное условие для стремления к нулю расстояния по вариации между распределением $\mathcal{L}(\tilde{V}_{n,B_n})$ случайной величины \tilde{V}_{n,B_n} и ашпроксимирующим пуассоновским распределением $Pois(\mathbf{E}\tilde{V}_{n,B_n})$:

$$\begin{aligned} &d_{tv}(\mathcal{L}(\tilde{V}_{n,B_n}), Pois(\mathbf{E}\tilde{V}_{n,B_n})) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathbf{P}\{\tilde{V}_{n,B_n} = k\} - \mathbf{P}\{Pois(\mathbf{E}\tilde{V}_{n,B_n}) = k\} \right|. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если $n, h_n = h(B_n) \rightarrow \infty$ так, что $n - 2h_n \rightarrow \infty$, то для некоторой функции $\varepsilon(n) = o(1), n \rightarrow \infty$, справедливы неравенства

$$d_{\text{tv}}(\mathcal{L}(\tilde{V}_{n, B_n}), \text{Pois}(\mathbf{E}\tilde{V}_{n, B_n})) \leq \frac{16 \left(1 - e^{-\mathbf{E}\tilde{V}_{n, B_n}}\right) \mathbf{E}\tilde{V}_{n, B_n}}{q^{n-2h_n-1}} (1 + \varepsilon(n));$$

если дополнительно $q^n = o(d^{|B_n|})$, то

$$d_{\text{tv}}(\mathcal{L}(\tilde{V}_{n, B_n}), \text{Pois}(\mathbf{E}\tilde{V}_{n, B_n})) \rightarrow 0.$$

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Литература

1. Зубков А. М., Михайлов В. Г. Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний // Теория вероятн. и ее примен. — 1974. — Т. 19, вып. 1. — С. 173–181.
2. Зубков А. М., Круглов В. И. Повторения цепочек на бинарном дереве со случайными метками вершин // Дискрет. матем. — 2015. — Т. 27, вып. 4. — С. 38–48.
3. Михайлов В. Г. Оценка точности сложной пуассоновской аппроксимации для распределения числа совпадающих цепочек // Теория вероятн. и ее примен. — 2001. — Т. 46, вып. 4. — С. 713–723.
4. Михайлов В. Г. Оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа серий повторений длинных цепочек в цепи Маркова // Дискрет. матем. — 2015. — Т. 27, вып. 4. — С. 67–78.
5. Михайлов В. Г. О вероятности наличия в случайной последовательности цепочек с одинаковой структурой // Дискрет. матем. — 2016. — Т. 28, вып. 3. — С. 97–110.
6. Erhardsson T. Stein's method for Poisson and compound Poisson approximation // Barbour A. D., Chen L. H. Y. (ed.) "An introduction to Stein's method". — Singapore Univ. Press, 2005. — P. 61–113.
7. Guibas L. J., Odlyzko A. M. Long repetitive patterns in random sequences // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. — 1980. — Vol. 53. — P. 241–262.
8. Hoffmann C. M., O'Donnell M. J. Pattern matching in trees // J. ACM. — 1982. — Vol. 29, no. 1. — P. 68–95.
9. Steyaert J.-M., Flajolet P. Patterns and pattern-matching in trees: an analysis // Inf. & Control. — 1983. — Vol. 58, no. 1. — P. 19–58.

10. *Karlin S., Ost F.* Counts of long aligned word matches among random letter sequences // *Adv. Appl. Probab.* — 1987. — Vol. 19, no. 2. — P. 293–351.

UDC 519.212.2

Number of pairs of identically marked embeddings of given subtree in q -ary tree with randomly marked vertices

A. M. Zubkov*, V.I. Kruglov*

* *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
Gubkina str. 8, Moscow, 119991, Russia*

Let for all vertices of a complete q -ary tree independent random marks are assigned and all marks have uniform distribution on a finite alphabet. We consider pairs of identically marked embeddings of a given subtree. An asymptotic formula for the expectation of the number of such pairs is obtained and the Poisson limit theorem for this number is proposed.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant № 14-50-00005.

Keywords: q -ary trees with marked vertices, sums of dependent indicators, Poisson approximation.

Author index

- Abramov O.V. 150
 Afanaseva L. G. 566
 Alawadhi S. A. 331
 Alyabieva V. G. 70
 Andronov A. M. 430
 Antonyuk P.N. 341
 Anulova S. V. 547
 Asfandiyarov D. G. 100
- Balashova D. 674
 Basharin G. P. 166
 Bashtova E.E. 110
 Belkina T. A. 485
 Belopolskaya Ya. I. 480
 Belyaev Yu. K. 619
 Berezin S. 639
 Blagodatskikh D. V. 100
 Bochkov A. V. 252
 Boivin M. 380
 Boldin M. V. 309
 Borodina A. B. 538
 Broner V. I. 350
 Brysina I. V. 705
 Bulinskaya E. V. 435
 Bulinskaya E. Vl. 144
 Bulinski A. V. 576
 Burnaev E. V. 244
 Butko Ya. A. 139
- Chebotarev V. I. 695
 Chernavskaya E.A. 110
 Chernousova E. 276
 Chinenova V. 105
- Demidov S. S. 260
 Dimitrov M. 46
 Domoradzki S. 678
 Dzama D. V. 100
- Efimov V. V. 51
 Efrosinin D. V. 538
- Ermishkina E. M. 603
- Farkas Yu. 506
 Farkhadov M. P. 226
 Fedorova E. A. 560
 Fedotkin M. A. 90, 629
 Filina M. V. 490
 Formanov Sh. K. 517
 Foss Sergey 147
- Gabdullin R. 207
 Gadolina I. V. 555
 Glazunov N. M. 220
 Golubev G. K. 244
 Gorbunova A. V. 384
 Grebeshkov A. Yu. 290
 Gribkova N. V. 215
 Grishunina S. A. 119
 Grishunina Yu. 80
 Grusho A. A. 156
- Han D. 281
 Hashorva E. 506
- Isguder H. Okan 512
 Ivnitiskiy V. A. 234
- Ju Y. T. 336
- Kalimulina E. Yu. 60
 Kalinkin A. V. 723
 Källberg D. 619
 Kalyagin V. A. 500
 Kanzitdinov S. K. 36
 Kashtanov V.A. 26
 Kelbert M. 406
 Kharin Yu. S. 552
 Khamourkin G. G. 347
 Khokhlov Y. S. 665
 Kiseleva K. 462
 Knobloch E. 669
 Kobanenko G. K. 533
 Kocer U. U. 512

Koldanov A. P.	500	Mashnikov O. V.	634
Koldanov P. A.	500	Mastikhin A. V.	591
Kolesnikov S. N.	129, 176	Melezhik V. S.	319
Kolev N.	336	Menozzi S.	202
Kolnogorov A. V.	210	Mishkoy Gh. K.	301
Kolosova I. S.	718	Mogulskii A. A.	495
Konakov V.	202	Moiseev A. N.	314
Kondrashova E.V.	21	Molchanov S. 198, 202, 276, 281	
Kondrat'yev A. I.	192	Morozov E. V.	538, 665
Konstantinides D. G.	446	Muromskaya A. A.	571
Konyukhova N. B.	485		
Korolev V.	462	Nagaev S. V.	695
Koroliouk D.	370	Naumov V. A.	166
Koroliuk V. S.	370	Nazarov A. A.	350, 560
Kovalenko I. N.	365	Nazin A. V.	41
Kozlov M. V.	306	Ngo N.	336
Kozlov V. V.	124	Novikova A. Yu.	395
Kozyrev D.	727		
Kradenyh A. A.	384	Oprisan A.	659
Krishnamoorthy A.	355, 360	Orlov O. P.	598
Kruglov V. I.	735		
Kudryavtsev E. V.	90	Pakhteev A. I.	467
Kumar R.	700	Pardalos P. M.	500
Kuzicheva Z.A.	420	Pastukhova Yu. I.	239
		Paul S. V.	560
Lemeshko B. Yu.	395	Pavlov A. V.	31
Lemeshko S. B.	395	Pavlov I. V.	723
Li J. Z.	446	Petriev M. N.	309
Limnios N.	95	Petrova S. S.	260
Lisachenko N. G.	555	Petukhova N. V.	226
Logachev A. V.	375	Piterbarg V. I.	506
Lotov V. I.	400	Popov G.	624
Ludkovsky S.V.	453	Pshenichnikov A. P.	290
Lukashenko O. V.	665		
Lyuter I.O.	425	Rachinskaya M. A.	629
		Rusakov O. V.	161
Makarenko V.	207	Rusev V. N.	681
Makarichev A. V. 705, 708, 711		Rydén P.	619
Makarichev V. A.	708	Rykov V. V.	430, 727
Makarova Yu.	281	Rytova A. I.	689
Malyshev V. A.	416		
Malyshkin Y.	55	Sakhanenko A. I.	286, 581
Manita A.	644, 649	Sakhobov O.	12
Manita L.	80, 649	Satin Ya.	462
Manjunath A. S.	355	Savelov M. P.	249
Martynov G. V.	295	Savinkina E. N.	286

- Senatov V. V. 324
 Shajin Dhanya 355, 360
 Sharma S. 700
 Shchemelinin D. A. 51
 Shevtsova I. 207
 Shklennik M. A. 314
 Shklyayev A. V. 113
 Shorgin S. Ya. 156
 Shukhman A. E. 65
 Shukhman E. V. 65
 Sidnyaev N. I. 723
 Sikorskii A. 380
 Simon L. 686
 Simonov R. A. 134
 Singpurwalla Nozer D. 440
 Skorikov A.V. 681
 Slavko B. V. 485
 Slepov N. A. 75
 Smirnova G. S. 187
 Sobolev V. N. 171
 Sokół M. 471
 Soloviev A. D. 171
 Somogyi I. 686
 Soós A. 686
 Sopin E. S. 541
 Sorokovikova O. S. 100
 Stepanova A.O. 480
 Stuhl I. 406
 Suhov Yu. M. 375
 Suhov Y. 406

 Tarasenko A. S. 595
 Thorisson H. 389
 Tikhomirov V. M. 258

 Timonin V. I. 270
 Timonina E. E. 156
 Tsitovich I. I. 85
 Turzynsky M. K. 265
 Tyannikova N. D. 270

 Vasilyev S. A. 36, 718
 Vatutin V. A. 148
 Veretel'nikova I. V. 395
 Veretennikov A.Yu. 182
 Veretennikova M. 380
 Vishnevsky V. M. 430
 Vvedenskaya N. D. 375

 Yakymiv A. L. 522
 Yambartsev A. A. 375
 Yarovaya E. 281, 608, 624
 Yastrebenetsky M. A. 252

 Zamyatin A. A. 416, 634
 Zariпова E. R. 290
 Zaryadov I. S. 384
 Zayats O. 639
 Zaytsev E. 475
 Zaytseva O.B. 21
 Zeifman A. 462
 Zhang Zh. 198
 Zhdanok A.I. 654
 Zheng L. 198
 Zolotukhin A. Ya. 695
 Zolotukhin I. V. 456
 Zorine A. V. 586
 Zubkov A. M. 490, 598, 735
 Zverkina G. A. ... 411, 528, 613

Научное издание

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯХ
(АВМТВ-2017)**

Издание подготовлено в авторской редакции

Компьютерная верстка *В.К. Чупритский*
Ответственный за выпуск *Д.В. Козырев*
Дизайн обложки *О.В. Чухно, Н.В. Чухно, Д.В. Козырев*

Подписано в печать 17.10.2017 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 43,25. Тираж 150 экз. Заказ 1636.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41