Программа учебной дисциплины
«Приложения теории операторов и функционального анализа»
(подготовка магистра)

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № __от __2020

Разработчик	Лебедев Владимир Владимирович, профессор департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	62
Самостоятельная работа (час.)	90
Курс, Образовательная программа	1, Системный анализ и математические технологии
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целью освоения дисциплины «Приложения теории операторов и функционального анализа» является:

- углублённое изучение основ теории функций и функционального анализа с применением в анализе Фурье и его приложениях.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- **Знать:** основные положения теорий меры и интегрирования; теорию метрических, нормированных и евклидовых пространств; теорию линейных функционалов и линейных операторов, а также основы анализа Фурье, включая теорию функциональных пространств и операторов, связанных с преобразованием Фурье.
- **Уметь:** применять методы функционального анализа к решению теоретических и прикладных задач, в том числе, к решению теоретико-вероятностных задач и задач математического моделирования.

- **Иметь навыки** (приобрести опыт) использования стандартных методов функционального анализа и анализа Фурье и их применения к решению теоретических и прикладных задач.

Настоящая дисциплина относится к циклу математических дисциплин (вариативная часть). Изучение данной дисциплины базируется на знаниях и умениях, приобретённых в рамках следующих курсов:

- «Математический анализ»;
- «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»;
- «Теория функций комплексной переменной»;
- «Функциональный анализ».

Для освоения дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями:

- знание курса «Математический анализ» в полном объеме;
- знание курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» в части, касающейся теории линейных пространств и теории матриц;
- знание курса «Теория функций комплексной переменной» в части, касающейся рядов Тейлора и Лорана;
- знание курса функционального анализа в объёме бакалаврского курса, читающегося в МИЭМ – это требование является желательным, но не обязательным, поскольку магистерский курс предусматривает обзор основных концепций функционального анализа, необходимых для его дальнейшего углублённого изучения.

Основные положения дисциплины используются в дальнейшем при изучении следующих курсов:

- «Принципы построения математических моделей»; «Стохастические методы»; «Математическое моделирование систем».

2. Содержание учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Элементы теории множеств	7	1	2	4
2	Элементы теории функций	24	2	7	15
3	Метрические, нормированные и евклидовы пространства	24	1	7	16

4	Линейные непрерывные функционалы и операторы	22	2	10	10
5	Преобразование Фурье в L^2. Преобразование Фурье мер и распределений	13	1	2	10
6	Функциональные пространства	27	2	10	15
7	Операторы в функциональных пространствах	35	3	12	20
	Итого:	**152**	**12**	**50**	**90**

Раздел 1. Элементы теории множеств.

Эквивалентность множеств по Кантору. Понятие мощности. Теорема Кантора–Бернштейна.

***Литература*:** [**1**, гл. I, §3].

Раздел 2. Элементы теории функций.

Мера Лебега в R^n . Интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе в интегралах (теоремы Лебега, Леви и Фату). Теорема Фубини. Теорема о точках плотности множества. Точки Лебега.

Теорема о дифференцируемости интеграла. Абстрактное пространство с мерой, процедура продолжения меры, интеграл. Мера Стилтьеса, интеграл Стилтьеса. Дифференцирование

монотонных функций. Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции. Первообразные.

***Литература*:** [**1**, гл. V, VI].

Раздел 3. Метрические, нормированные и эвклидовы пространства.

Определение метрического пространства. Примеры метрических пространств $l^2, l^1, l^\infty, C([a,b]), BC([a,b]), C_2([a,b]), L^1(X), L^2(X), L^\infty(X)$. Шар, окрестность. Предел последовательности точек. Открытые и замкнутые множества. Замыкание. Операции над открытыми и замкнутыми множествами. Всюду плотные множества. Нигде не плотные множества. Сепарабельные метрические пространства. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категориях. Непрерывные отображения метрических пространств, изометрия. Пополнение. Сжимающие отображения. Теорема о неподвижной точке, ее приложения. Вполне ограниченные множества в метрических пространствах. Связь вполне ограниченности и ограниченности. Определение ε-сети. Определение компактного множества. Непрерывные функции на компактных множествах. Критерии компактности в некоторых пространствах ($C(I), l^1, l^2$). Энтропийные числа. Определение линейного нормированного пространства. Естественное расстояние, порождаемое нормой. Банаховы пространства. Непрерывность нормы. Эквивалентные нормы. Изоморфизм и изометрия нормированных пространств. Пополнение. Теорема о почти перпендикуляре и ее следствие о некомпактности шара в бесконечномерном нормированном пространстве. Ряды в нормированных пространствах. Базис. Определение евклидова пространства. Естественная норма, порожденная скалярным произведением. Гильбертово пространство. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Неевклидовость $C(I)$ и других пространств. Ортогональность. Критерий сходимости ортогонального ряда. Ортогональное дополнение. Задача о наилучшем приближении. Ортогональная проекция на подпространство. Полная система векторов. Ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряд Фурье. Равенство Парсеваля. Критерий полноты ортогональной системы. Процедура ортогонализации. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Примеры базисов. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

***Литература*:** [**1**, гл. II, §§ 1–4, гл. III, §§ 3,4].

<u>Раздел 4.</u> Линейные непрерывные функционалы и операторы.

Определение линейного непрерывного функционала. Связь непрерывности и ограниченности. Норма функционала. Сопряженное пространство. Полнота сопряженного пространства. Примеры. Теоремы об общем виде функционала в $C(I)$ и в гильбертовом пространстве. Поточечная сходимость и сходимость по норме последовательности функционалов. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза). Критерий слабой сходимости. Определение линейного непрерывного оператора. Связь линейности и ограниченности. Норма оператора. Полнота пространства операторов. Умножение операторов. Сильная и слабая

сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха–Штейнгауза для операторов. Критерий слабой сходимости. Приложения. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном

операторе. Теорема Неймана об обратимости оператора, близкого к обратимому. Собственные числа оператора. Спектр и резольвента. Разложение резольвенты в ряд Лорана. Сопряженные операторы. Спектральный радиус. Самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Спектральный радиус самосопряженного оператора.

***Литература*: .** [**1**, гл. IV, §§ 1–3, 5, 6].

<u>Раздел 5.</u> Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье в $L^2(R^n)$, его свойства и приложения. Ряды Фурье функций на T^n. Пространство Шварца. Меры и распределения (обобщенные функции) – их преобразования Фурье. Свертка.

***Литература*:** [**1**, гл. VIII; гл. IV, § 4].

<u>Раздел 6.</u> Функциональные пространства.

Модуль непрерывности функции в функциональном пространстве на R^n и T^n. Пространства L^p, пространства C, Lip_ω, пространства гладких функций, пространства Соболева. Скорость приближения тригонометрическими многочленами и гладкость. Теорема Уитни о продолжении с сохранением модуля непрерывности. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Существование непрерывной функции с поточечно расходящимся рядом Фурье. Теорема Фейера в $L^1(T)$ и $C(T)$. Пространство U. Банаховы алгебры. Алгебра Винера $A(T^n)$. Теорема об $1/f$. Полиномы Рудина–Шапиро. Условия гладкости, гарантирующие принадлежность классу $A(T^n)$. Теорема о тривиальности эндоморфизмов алгебры Винера. Функции Радемахера, оценка функции распределения полиномов по системе Радемахера. Неравенство Хинчина. Сходимость случайных рядов.

***Литература*:** [**1**, гл. VIII, [**2**, гл.2, § 2, гл. 4], [**3**, гл. I, II, VI], [**1**, Дополнение].

Раздел 7. Операторы в функциональных пространствах.

Сильный и слабый тип операторов. Операторы слабого типа $(1,1)$. Интерполяционная теорема Марцинкевича. Неравенство Хаусдорфа--Юнга. Преобразование Гильберта (на R и T). Его ограниченность в L^p (теорема Рисса). Оператор взятия частичной суммы. Сходимость рядов Фурье функций из L^p Мультипликаторы Фурье. Задача Какейя, множества Какейя–Безиковича и теорема Феффермана о шаровом мультипликаторе. Дополняемые подпространства нормированного пространства, проектор. Теорема Дворецкого–Линденштраусса–Цафрири. Пример недополняемого подпространства в $L^p(R^2),\ p \neq 2$ (следствие теоремы Феффермана). Пример недополняемого подпространства в $L^1(T)$.

***Литература*:**.[**2**, гл. 5, § 1], [**2**, Приложение 1, § 2].

3. Оценивание

Блокирующие элементы контроля отсутствуют.

В модулях 3–4 первого курса проводится один коллоквиум и дается домашнее задание. Накопленная оценка $O_{нак}$ вычисляется как среднее арифметическое этих оценок.

В конце четвёртого модуля проводится итоговый экзамен. Окончательная (идущая в диплом) оценка по учебной дисциплине формируется следующим образом:

$$O_{окон} = \frac{1}{2}(O_{нак} + O_{экз}).$$

Оценки по всем формам текущего и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале с округлением в пользу студента. Оценка $O_{нак}$ не округляется.

Студент, получивший неудовлетворительную оценку (меньше 4 баллов по десятибалльной шкале) за коллоквиум может исправить свой результат, пересдав (один раз) коллоквиум. Результат пересдачи коллоквиума умножается на коэффициент 0.7, но первоначальная оценка не может ухудшиться.

На экзамене проверяется умение студента: 1) формулировать и доказывать теоремы курса (демонстрируя при этом знание соответствующих определений); 2) решать стандартные задачи курса. При доказательстве теорем допустимо пользоваться соображениями и понятиями, выходящими за рамки курса. При этом, однако, студент должен продемонстрировать знание соответствующих определений и методов.

Форма экзамена – устная. На экзамене даётся два теоретических вопроса и две задачи, оценка выводится как среднее арифметическое.

4. Примеры оценочных средств

Образец задачи из домашнего задания.

Докажите, что функциональное уравнение $x(t) + \int_0^1 s^2 x^2(s)\, ds = t,\ 0 \le t \le 1,$ имеет единственное решение, принадлежащее замкнутому единичному шару в $C([a,b])$. Найдите это решение с точностью 10^{-3}.

Образец вопроса из коллоквиума.

Сформулируйте теорему Банаха–Штейнгауза для операторов (принцип равномерной ограниченности для последовательности операторов). Сформулируйте критерий слабой сходимости операторов. Приведите пример его использования.

Примерный перечень вопросов к экзамену.

1. Выведите формулы двойственности для операций пересечения и объединения.
2. Определите понятие эквивалентности множеств по Кантору.

3. Дайте определение счётного множества. Докажите, что множество Q рациональных чисел

является счётным. Докажите, что множество Q^n является счётным. Является ли Q^∞ счётным?

4. Докажите, что объединение не более чем счётного набора счётных множеств является счётным.

5. Докажите, что при добавлении к бесконечному множеству конечного или счётного множества получается множество эквивалентное исходному.

6. Что такое несчётное множество? Докажите, что прямая R является несчётным множеством; выведите отсюда существование трансцендентных чисел.

7. Дайте определение континуального множества. Докажите континуальность множеств R^n, R^∞.

8. Расскажите о понятии мощности X множества Y. Что означают записи $|X|=|Y|$, $|X|\geq|Y|$, $|X|>|Y|$? Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна о сравнении множеств.

9. Докажите, что множество $C(I)$ непрерывных функций на отрезке I является континуальным.

10. Докажите, что множество всех подмножеств множества X имеет мощность большую, чем мощность X.

11. Изложите (схематично) построение меры Лебега в R^n. Приведите примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Докажите, что всякое счётное множество имеет меру

нуль. Приведите пример несчётного множества на прямой, имеющего меру нуль (троичное множество Кантора).

12. Докажите существование неизмеримых по Лебегу множеств.

13. Докажите, что класс измеримых множеств замкнут относительно операций (счетного) объединения, пересечения и перехода к дополнению.

14. Что означает фраза «свойство X выполнено почти всюду»? Дайте определение сходимости последовательности функций почти всюду и сходимости по мере. Как они связаны между собой?
Приведите примеры.
15. Дайте определение измеримой функции. Покажите, что класс измеримых функций замкнут относительно арифметических операций и поточечного предельного перехода.
16. Дайте определение сходимости почти всюду и сходимости по мере. Сформулируйте теорему об их связи.
17. Сформулируйте теоремы Егорова и Лузина об исправлении на множестве малой меры.
18. Определите интеграл Лебега (включая интеграл по всему R^n – ограничьтесь одномерным случаем). Сформулируйте и поясните его основные свойства (линейности и правило интегрирования неравенств).
19. Опишите (с обоснованием) связь между интегралом Лебега и интегралом Римана (включая и случай несобственного интеграла Римана).
20. Докажите теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и ее следствие для рядов. Сформулируйте лемму Фату.
21. Дайте определение точки плотности множества. Докажите теорему о точках плотности. Дайте определение точки Лебега и докажите теорему о точках Лебега интегрируемой функции.
Докажите теорему о дифференцируемости интеграла.
22. Докажите, что монотонная функция имеет производную почти всюду. Дайте определение функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывной функции. Докажите теорему о связи абсолютно непрерывных функций с первообразными.
23. Сформулируйте теорему Фубини.

24. Дайте определение алгебры множеств. Дайте определения сигма алгебры множеств и меры. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о продолжении меры. Дайте определение пространства с мерой.

25. Дайте определение интеграла в случае абстрактного пространства с мерой.

26. Что такое функция распределения? Определите меру Стилтьеса на R. Что такое абсолютно непрерывная мера? Что такое дискретная мера. Что такое интеграл Стилтьеса? Как вычисляется интеграл по абсолютно непрерывной и по дискретной мере.

27. Дайте определение метрического пространства. Определите пространства $l^2, l^1, l^\infty, C([a,b]), BC([a,b]), C_2([a,b])$. Определите пространства $L^1(X), L^2(X)$ и $L^\infty(X)$. Что такое подпространство метрического пространства?

28. Дайте определение открытого шара $B(x_0, r)$ и окрестности точки в метрическом пространстве.

29. Дайте определение предела последовательности точек в метрическом пространстве. Докажите единственность предела.

30. Сравните сходимость l^2 с покоординатной сходимостью. Сделайте тоже самое для l^1 и l^∞.

31. Сравните сходимость в $C([a,b])$ с поточечной сходимостью и со сходимостью в $L^2[a,b]$ и $L^1[a,b]$

32. Дайте определение внутренней точки множества в метрическом пространстве и дайте определение открытого множества. Приведите примеры открытых множеств. Покажите, что открытый шар является открытым множеством.

33. Дайте определение точки прикосновения и предельной точки множества в метрическом пространстве. Дайте определение замыкания $\overline{E}$ множества E в метрическом пространстве. Выведите основные свойства операции замыкания: $E \subseteq \overline{E}$, $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$, $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$. Докажите, что $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$. Верно ли, что $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cap \overline{F}$?Приложения

34. Дайте определение замкнутого множества в метрическом пространстве. Докажите теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей.

35. Докажите, что замкнутый шар $\overline{B}(x_0, r)$ является замкнутым множеством.

36. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

37. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством. Верно ли, что пересечение любого набора открытых множеств является открытым
множеством? Приведите контрпример.

38. Докажите, что дополнение к открытому множеству является замкнутым, а дополнение к замкнутому --- открытым. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли, что объединение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством? Приведите контрпример.

39. Дайте определение множества плотного в некотором множестве метрического пространства. Докажите, что если A плотно в B и B плотно в C, то A плотно в C.

40. Что такое всюду плотное множество? Что такое нигде не плотное множество? Приведите примеры. Докажите, что множество $\{x: x(t_0)=0\}$ замкнуто и нигде не плотно $C([a,b])$ и всюду плотно в $C_2([a,b])$.

41. Докажите, что множество $\{x: \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в l^1 и всюду плотно в l^2.

42. Дайте определение сепарабельного метрического пространства. Докажите сепарабельность прямой R. Докажите сепарабельность R^n.

43. Докажите, что пространство l^2 сепарабельно. Докажите, что пространство l^1 сепарабельно. Докажите, что l^∞ не сепарабельно.

44. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о многочленах и выведите из нее сепарабельность пространства $C([a,b])$.

45. Докажите сепарабельность $L^1[a,b], L^1(R), L^2[a,b], L^2(R)$. Сепарабельно ли $L^\infty[a,b]$?

46. Дайте определение полного метрического пространства. Докажите полноту прямой R. Приведите пример метрического пространства, не являющегося полным.

47. Докажите полноту пространства R^n

48. Докажите полноту пространств l^2, l^1.

49. Докажите полноту пространств $l^\infty, C([a,b])$.

50. Докажите полноту пространств $L^1(X), L^2(X)$ и $L^\infty(X)$ в случае $X=[a,b]$ и $X=R$. Сравните $C_2[a,b]$ и $L^2[a,b]$.

51. Докажите, что если X – полное метрическое пространство и Y его подпространство, то Y полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

52. Докажите теорему о вложенных шарах в метрических пространствах.

53 Сформулируйте теорему Бэра о полных метрических пространствах. При её помощи докажите существование непрерывной функции на отрезке не дифференцируемой ни в одной точке.

54. Дайте определение непрерывного отображения одного метрического пространства в другое. Покажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества открыт. Что такое изометричные пространства?

55. Дайте определение пополнения метрического пространства. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о пополнении метрических пространств.

56. Дайте определение сжимающего отображения в метрическом пространстве, приведите примеры. Является ли отображение $t \to \sin t$ сжимающим как отображение прямой R в себя?

57. Докажите теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Выведите оценку расстояния между n-ой итерацией и неподвижной точкой.

58. Приведите примеры применения теоремы о неподвижной точке.

59. При помощи теоремы о неподвижной точке докажите теорему существования и единст-венности решения задачи Коши $y' = f(x,y),\ y(0) = y_0$ при некоторых (каких?) условиях на f.

60. Дайте определение вполне ограниченного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Покажите, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным. Верно ли обратное (рассмотрите шар в l^2)?

61. Докажите, что в конечномерном нормированном пространстве понятия «ограниченность» и «вполне ограниченность» совпадают.

62. Что называется ε-сетью для множества K в метрическом пространстве? Покажите, что K является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для K.

63. Дайте определение компактного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Докажите теорему о связи вполне ограниченности и компактности.

64. Докажите теорему Вейерштрасса о непрерывных функциях на компактных множествах. Приведите пример, показывающий, что условие компактности множества в этой теореме нельзя заменить условием ограниченности и замкнутости. Определите пространство $C(K)$.

65. Докажите теорему Арцела (критерий вполне ограниченности множества в $C([a,b])$). Проиллюстрируйте ее применение на примерах.

66. Сформулируйте критерии вполне ограниченности множества в l^2 и l^1. Выведите один из них. Проиллюстрируйте их применения (например, рассмотрите «гильбертов кирпич»).

67. Дайте определение энтропийного числа. Найдите их для куба в R^n и для троичного канторова множества на прямой.

68. Найдите энтропийные числа ковра Серпинского и гильбертова кирпича.

69. Дайте определение нормированного пространства. Приведите примеры. Покажите, что соотношение $\rho(x,y) = \|x - y\|$ определяет метрику в нормированном пространстве (естественная метрика, порожденная нормой).

70. Что такое банахово пространство. Что называют (замкнутым) подпространством нормированного пространства? Докажите свойство непрерывности нормы.

71. Что такое эквивалентные нормы? Являются ли нормы $\|x\|_1 = \max_{[0,1]}|x(t)|$ и $\|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)|\,dt$ эквивалентными в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$? Покажите, что любые две нормы в конечномерном пространстве – эквивалентны.

72. Дайте определение линейно изоморфных и линейно изометрических нормированных пространств. Сформулируйте теорему о пополнении нормированных пространств.

73. Докажите лемму о почти перпендикуляре и докажите, что шар в линейном нормированном пространстве вполне ограничен лишь в случае, когда пространство конечномерно.

74. Дайте определение сходящегося ряда в нормированном пространстве. Покажите, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, то его члены стремятся к нулю, т.е. $\|x_k\| \to 0$ (необходимое условие сходимости). Покажите, что в банаховом пространстве из сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (достаточное условие сходимости).

75. Дайте определение базиса в нормированном пространстве. Покажите, что всякое нормированное пространство с базисом сепарабельно.

76. Дайте определение евклидова пространства. Выведите неравенство Коши–Буняковского– Шварца. Как определяется естественная норма в евклидовом пространстве? Что такое гильбертово пространство? Покажите, что скалярное произведение является непрерывной функцией сомножителей.

77. Выведите равенство параллелограмма в евклидовом пространстве. Сформулируйте критерий того, что норма в нормированном пространстве

порождена скалярным произведением. Докажите, что пространство $C([a,b])$ не является евклидовым.

78. Сформулируйте задачу о наилучшем приближении в общем случае метрических пространств; дайте определение элемента наилучшего приближения. Дайте определение ортогональной проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве. Сформулируйте утверждение о существовании ортогональной проекции вектора на подпространство и докажите ее единственность. Как связаны проекция и элемент наилучшего приближения в гильбертовом пространстве?

79. Дайте определение полной системы векторов. Покажите, что полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве является базисом и выведите теорему о разложении в ряд Фурье по полной ортонормированной системе в гильбертовом пространстве. Выведите равенство Парсеваля.

80. Изложите процедуру ортогонализации.

81. Докажите теорему о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Приведите примеры таких базисов.

82. Докажите теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

83. Дайте определение линейного непрерывного функционала, заданного на нормированном пространстве. Дайте определение линейного ограниченного функционала. Покажите, что эти понятия совпадают. Приведите примеры. Дайте определение нормы функционала (укажите все три эквивалентных определения). Дайте определение пространства X^* сопряженного к нормированному пространству X.

84. Приведите примеры линейных функционалов в пространстве $C([a,b])$. Сформулируйте теорему Рисса об общем виде ограниченных линейных функционалов в этом пространстве.

85. Докажите теорему Рисса об общем виде ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве. Какие следствия влечет эта теорема для пространства l^2 и $L^2[a,b]$.

86. Когда говорят, что последовательность функционалов $f_n \in X^*$, $n=1,2,...,$ сходится слабо (поточечно)? Когда говорят, что она сходится сильно (по норме)? Приведите примеры.

Докажите единственность слабого и сильного предела (если они есть). Докажите, что из сильной сходимости вытекает слабая сходимость к тому же пределу.

87. Рассмотрим последовательность функционалов f_n, $n=1,2,...,$ на $C([0,1])$, вида $f_n(x)=x(1/n)$. Является ли эта последовательность слабо сходящейся? Сильно сходящейся? Если да, то каков предел?

88. Рассмотрим последовательность функционалов f_n, $n=1,2,...,$ на $C([0,1])$ вида $f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)$. Является ли эта последовательность слабо сходящейся? Сильно сходящейся? Если да, то каков предел?

89. Докажите, что дельта-функция является слабым пределом некоторой последовательности функционалов интегрального типа. Можно ли здесь слабый предел заменить сильным.

90. Сформулируйте теорему Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности для последовательности функционалов). Выведите критерий слабой сходимости последовательности функционалов.

91. Докажите полноту сопряженного пространства.

92. Дайте определение линейного непрерывного оператора, действующего из одного нормированного пространства в другое. Дайте определение ограниченного линейного оператора. Покажите, что эти понятия совпадают. Приведите примеры. Дайте определение

нормы оператора (укажите все три эквивалентных определения).

93. Покажите, что пространство $B(X,Y)$ линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y с естественными операциями умножения на скаляры и суммы, является линейным нормированным пространством. Покажите, что если Y банахово, то $B(X,Y)$ также банахово.

94. Дайте определение произведения операторов. Выведите оценку нормы произведения через нормы сомножителей. Покажите, что пространство $B(X)$ линейных ограниченных операторов, действующих из X в X образует алгебру.

95. Вычислите норму а) диагонального оператора в l^2; б) оператора умножения на функцию в $L^2[a,b]$.

96. Выведите оценку сверху для нормы интегрального оператора в L^2 .

97. Дайте определение сильной (по норме) и слабой (поточечной) сходимости последовательности операторов. Покажите, что из сильной сходимости вытекает слабая (к тому же пределу), но обратное неверно (рассмотрите в l^2 последовательность операторов $I_n:(x_1,x_2,...)\to(x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)$).

98. Сформулируйте теорему Банаха–Штейнгауза для операторов (принцип равномерной ограниченности для последовательности операторов). Выведите критерий слабой сходимости последовательности операторов.

99. Определите понятие обратного оператора. Что означает обратимость оператора на языке отображений? На языке уравнений? Приведите примеры. Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе.

100. Выведите условия обратимости диагонального оператора в l^2 и оператора умножения на функцию в L^2.

101. Докажите, что если $\|I-A\|<1$, то A обратим, и докажите более общую теорему Неймана об обратимости оператора, близкого к обратимому.

102. Определите понятие регулярного числа и спектра оператора. Приведите соответствующие примеры для диагонального оператора в l^2 и оператора умножения в $L^2[a,b]$. Покажите, что всякое собственное число является точкой спектра. Верно ли обратное?

103. Покажите, что спектр является замкнутым ограниченным множеством на комплексной плоскости. Что такое спектральный радиус оператора? Получите оценку спектрального радиуса через норму оператора. Сформулируйте теорему о не пустоте спектра.

104. Дайте определение резольвенты оператора. Выведите ее разложение в ряд Лорана.

105. Дайте определение и выведите простейшие свойства самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Докажите, что спектральный радиус самосопряженного оператора
равен его норме.

106. Определите преобразование Фурье в пространствах $L^2(T^n)$ и $L^2(R^n)$. Расскажите о его основных свойствах. Выведите формулу обращения.

107. Определите свертку функций и мер. Как найти преобразование Фурье свертки. Расскажите о связи гладкости и скорости убывания функции с гладкостью и скоростью убывания ее преобразования Фурье.

108. Определите пространство Шварца основных функций. Дайте определение распределения. Дайте определение преобразования Фурье распределения и приведите примеры.

109. Определите пространства L^p. Выведите соотношения двойственности.

110. Определите пространства Lip_ω и пространства Соболева. В евклидовом случае укажите
эквивалентную норму в терминах преобразования Фурье (докажите эквивалентность).

111. Дайте определение модуля непрерывности функции в функциональном пространстве, инвариантном относительно сдвига на R^n и T^n.

112. Дайте определение оператора Уитни и докажите теорему о продолжении.

113. Запишите ядро Дирихле и перечислите его свойства. Запишите частичные суммы ряда Фурье в виде свертки с ядром Дирихле. Докажите существование непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в точке.

114. Докажите теорему Фейера в $C(T)$ и $L^1(T)$.

115. На примере одного из пространств $C(T)$ или $L^p(T)$ установите связь скорости приближения тригонометрическими полиномами на T и модулем непрерывности.

116. Дайте определение пространства $U(T)$ равномерно сходящихся рядов Фурье. Покажите, что оно является банаховым пространством. Покажите, что $U(T)$ не совпадает с $C(T)$.

117. Выведите достаточные условия принадлежности функции классу U в терминах модуля непрерывности функции.

118. Выведите достаточные условия принадлежности функции классу U в терминах убывания коэффициентов.

119. Покажите, что $V \bigcap C(T) \subseteq U(T)$ (теорема Жордана).

120. Покажите, что $U(T)$ не является алгеброй.

121. Дайте определение банаховой алгебры. Приведите примеры. Определите алгебру Винера A на T^n и ее аналоги на R^n.

122. Докажите $1/f$ -теорему.

123. Изложите построение полиномов Рудина–Шапиро.

124. Докажите, что $\mathrm{Lip}_\alpha(T) \subseteq A(T)$ при $\alpha > 1/2$. Покажите, что указанное включение неверно при $\alpha = 1/2$. Как выглядят эти результаты в многомерном случае?

125. Докажите теорему Берлинга–Хелсона о тривиальности эндоморфизмов алгебры Винера.

126. Определите систему функций Радемахера и установите свойство независимости.

127. Выведите оценку функции распределения для полиномов по системе Радемахера. Выведите неравенство Хинчина.

128. Докажите теорему о сходимости случайных числовых рядов.

129. Дайте определение оператора слабого (и сильного) типа (p,p). Дайте определение пространства L^{weak} (слабое L^p). Укажите норму в случае $p > 1$ и покажите, что оно не нормируемо при $p = 1$.

130. Докажите интерполяционную теорему Марцинкевича. В качестве приложения, докажите неравенство Хаусдорфа–Юнга.

131. Определите преобразование Гильберта Hf функций f (на R и T). Докажите ограничен-ность оператора H в L^2.

132. Докажите, что H имеет слабый тип $(1,1)$ и выведите его ограниченность в L^p при $1<p<\infty$.

133. Покажите, что H не является ограниченным оператором в L^1 и L^∞.

134. Запишите оператор взятия частичной суммы при помощи H и установите сходимость рядов Фурье функций из $L^p\,(1<p<\infty)$.

135. Дайте определение мультипликатора Фурье. Докажите, что пространство мультипликато-ров M_p является банаховой алгеброй. Покажите, что индикатор любого куба является мультипликатором.

136. Расскажите о задаче Какейя и её решении – постройте множество Какейя–Безиковича на плоскости.

137. Докажите, что индикатор шара является мультипликатором лишь при $p=2$ (теорема Феффермана о шаровом мультипликаторе).

138. Дайте определение проектора и дополняемого подпространства в нормированном пространстве. Приведите примеры. Сформулируйте теорему Дворецкого–Линденштраусса–Цафрири. Используя теорему Феффермана укажите пример не дополняемого подпространства в

$L^p(R^2),\ p\neq 2$.

139. Приведите пример недополняемого подпространства в $L^1(T)$.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

[2] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. – М: Наука, 1984 (а также более поздние издания).

[3] Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. – М.: Мир, 1976.
[4] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961.
[5] Кирилллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988.
[6] Бородин П. А., Савчук А. М., Шейпак И. А. Задачи по функциональному анализу. – М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010.
[7] Люстерник Л. А., Соболев В. И.,Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
[8] Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.

5.3. Программное обеспечение не предусмотрено.

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы) не предусмотрены.

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины не предусмотрено.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.2. *для лиц с нарушениями слуха*: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата*: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

7. Дополнительные сведения

Дополнительные сведения отсутствуют.